ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 39-60.

УДК 517.518.234 + 517.548.3

ОБ ИЗОМОРФНОСТИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ ДЕЙСТВИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.Б. КЛИМЕНТОВ

Аннотация. Рассматриваются представления «второго рода» для решений общей линейной равномерно эллиптической системы первого порядка в единичном круге $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ в комплексной записи

$$\mathcal{D}w \equiv \partial_{\bar z}w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = R(z),$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $q_1(z)$ и $q_2(z)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0 = \mathrm{const} < 1,\ z \in \overline{D},$$

$A(z)$, $B(z)$, $R(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, — также заданные комплексные функции. Представление второго рода основывается на известной формуле Помпейю: если $w \in W^1_p(\overline{D})$, $p > 2$, то

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\partial w}{\partial \bar z}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

откуда для данного решения $w \in W^1_p(\overline{D})$, $p > 2$, при $A(z)$, $B(z)$, $R(z) \in L_p(\overline{D})$ можно записать представление второго рода

$$\Omega(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + TR(z)$$

где $\Omega(w) \equiv w(z) + T(q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w})$.

Установлено, что при определённых предположениях о коэффициентах и свободном члене системы оператор Ω есть изоморфизм банаховых пространств $C^k_\alpha(\overline{D})$ и $W^k_p(\overline{D})$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $p > 2$. Эти результаты развивают и дополняют работы Б.В. Боярского, где получены представления «первого рода», а также работы автора по представлениям «второго рода» с более сложными операторами.

В качестве следствия свойств оператора Ω получены следующие априорные оценки для норм $\|w\|_{C^{k+1}_\alpha(\overline{D})}$ и $\|w\|_{W^k_p(\overline{D})}$.

Ключевые слова: общая линейная эллиптическая система первого порядка, представление второго рода.

Mathematics Subject Classification: 35C15

S.B. Klimentov, On isomorphism of some functional spaces under action of integro-differential operators.

Поступила 2 июня 2017 г.

1. Введение. Формулировка результатов

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E_z, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

В статье используются следующие функциональные пространства со стандартными нормами в них: $L_p(\overline{D})$ — пространство суммируемых с показателем $p \geq 1$ в $\overline{D}$ функций; $W_p^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \ldots$, $p \geq 1$, — класс функций, имеющих в $\overline{D}$ обобщённые в смысле Соболева производные до k-го порядка, суммируемые с показателем p, $W_p^0(\overline{D}) \equiv L_p(\overline{D})$; $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \ldots$, $0 < \alpha < 1$, — пространство функций, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ частные производные до порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $C_\alpha^0(\overline{D}) \equiv C_\alpha(\overline{D})$; $L_p(\Gamma)$ и $C_\alpha^k(\Gamma)$ определяются аналогично, но для функций, определённых на Γ. Подробные определения этих пространств и норм в них можно найти в [1].

Замкнутое подпространство голоморфных функций пространства $C_\alpha^k(\overline{D})$ (соответственно $W_p^k(\overline{D})$) будем обозначать $A_\alpha^k(\overline{D}) = A_\alpha^k$ (соответственно $A_p^k(\overline{D}) = A_p^k$). Очевидный смысл имеют обозначения $C_\alpha^k(\overline{G})$, $A_\alpha^k(\overline{G})$ и т. д., если G — некоторая другая область комплексной плоскости.

Также используется пространство $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ следов функций из $W_p^k(\overline{D})$ (подробности см. в п. 2.3).

Рассмотрим в $\overline{D}$ общую эллиптическую систему первого порядка в комплексной записи

$$\mathcal{D}w \equiv \partial_{\bar z} w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = R(z), \tag{1}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial_z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$,— производные в смысле Соболева, $q_1(z)$ и $q_2(z)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы (1)

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0 = \text{const} < 1,\ z \in \overline{D}, \tag{2}$$

$A(z)$, $B(z)$, $R(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, — также заданные комплексные функции.

При исследовании решений уравнения (1) важную роль играют различные представления, устанавливающие соответствие между голоморфными функциями и решениями системы. Для непрерывных в $\overline{D}$ решений в частном случае $q_1(z) = q_2(z) \equiv 0$ различными авторами были получены два представления:
для однородной системы представление первого рода

$$w(z) = \Phi(z)\exp\left\{-T\left(A + B\frac{\overline{w}}{w}\right)\right\} \tag{3}$$

и, для неоднородной системы, представление второго рода

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z) + TR(z), \tag{4}$$

где в обоих представлениях $\Phi(z)$ — некоторая голоморфная функция, а

$$Tf(z) = T_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta; \qquad \partial_{\bar z}Tf(z) = f(z) \tag{5}$$

(см. [1], там же библиографию).

Естественно, интересны случаи, когда в этих представлениях по заданной голоморфной функции $\Phi(z)$ можно восстановить решение $w(z)$, т.е. когда представления (3), (4) можно использовать как инструмент для построения решений системы (1), принадлежащих различным функциональным пространствам.

Для представления (3) в [1, гл. 3, §7] доказана биекция между решениями $w(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, и голоморфными функциями класса $A_p^1(\overline{D})$. При этом, если голоморфная функция $\Phi(z)$ имеет произвольные особенности, то из представления (3) также однозначно восстанавливается решение $w(z)$, имеющее соответствующие особенности. Вместе с тем, если коэффициенты A и B достаточно гладкие и голоморфная функция $\Phi(z)$ из какого-либо более узкого, чем $A_p^1(\overline{D})$ класса (например, из $A_\alpha^1(\overline{D})$), то для восстановленного решения гарантируется принадлежность максимум классу $W_p^1(\overline{D})$, где $p > 2$ может быть сколь угодно велико.

Для представления (4) непрерывных в $\overline{D}$ решений картина более полная, а именно, при соответствующих предположениях о коэффициентах A и B (сейчас не будем на них останавливаться), в [1] доказано, что оператор $I + T$ является изоморфизмом банахова пространства $W_p^k(\overline{D})$ либо $C_\alpha^k(\overline{D})$).

Первое фундаментальное исследование решений общей системы (1) было предпринято Б. В. Боярским [2]. Им было получено обобщение представления первого рода (3) и доказана обратимость этого представления при заданной голоморфной функции $\Phi(z)$. Недостатки здесь остались прежние, плюс при любой достаточно «хорошей» голоморфной функции $\Phi(z)$ можно лишь утверждать, что $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$, где $s > 2$ достаточно близко к двум.

Представление второго рода (4) основано на хорошо известных формулах Помпейю [1, с. 41, 57]: если $w(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, то

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\partial w}{\partial \bar z}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}; \\ w(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta)}{\bar\zeta - \bar z}d\bar\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\bar\zeta - \bar z}, \end{aligned} \qquad z \in D. \tag{6}$$

В связи с этим для данного решения $w(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, общего уравнения (1) при $A(z)$, $B(z)$, $R(z) \in L_p(\overline{D})$ можно записать представление второго рода

$$\Omega(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + TR(z) \tag{7}$$

где

$$\Omega(w) \equiv w(z) + T(q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w}). \tag{8}$$

При этом естественно возникает вопрос об обратимости оператора Ω.

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $q_1(z)$, $q_2(z) \in C(\overline{D})$, $A(z)$, $B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^1(\overline{D})$.*

Теорема 2. *Если $q_1(z)$, $q_2(z)$, $A(z)$, $B(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$.*

Теорема 3. *Если $q_1(z)$, $q_2(z)$, $A(z)$, $B(z) \in W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 1$, $p > 2$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^{k+1}(\overline{D})$.*

Представления второго рода можно выписывать, основываясь на любом операторе «типа T» (т.е., правом обратном к оператору Коши-Римана $\partial_{\bar z}$). Аналоги теорем 1 – 3, основанные на более сложном, чем (5), операторе $T_n f(z)$, таком, что $\mathrm{Re}\{z^{-n}T_n f(z)\} = 0$, $z \in \Gamma$, $T_n f(z_m) = 0$, $z_m \in \Gamma$, $m = 1, \ldots, n$, получены автором в [3]. Доказательство изоморфности оператора Ω, основанного на более простом операторе T, оказалось заметно сложнее.

Оператор $T_n f(z)$ и результаты работы [3] существенно привязаны к тому, что D — единичный круг. Развитая здесь техника позволяет перенести теоремы 1 – 3 на случай, когда D — односвязная ограниченная область с границей соответствующей гладкости. Чтобы не увеличивать чрезмерно объём статьи, здесь такой перенос не проводится.

Построению решений системы (1) класса $W_p^1(\overline{D})$ при произвольном $p > 2$, в предположениях о коэффициентах, совпадающих с предположениями теоремы 1, посвящены также работы В.С. Виноградова [4], [5]. В этих работах используются не представления второго рода (7), а так же, как и в [2], исключительно двумерные сингулярные интегральные уравнения (без которых, конечно, не обошлось и в настоящей работе). Результаты работы [5] относительно краевой задачи Римана-Гильберта с каноническим краевым условием повторяют соответствующие результаты из [3].

Приведём ещё два простых, но важных следствия теорем 1 – 3.

Теорема 4. *В предположениях теоремы 2 для любой функции $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$, $k \geq 0$, имеет место априорная оценка:*

$$\|w\|_{C_\alpha^{k+1}(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const} \left\{ \|\mathcal{D}w\|_{C_\alpha^k(\overline{D})} + \|w\|_{C_\alpha^{k+1}(\Gamma)} \right\},$$

где const *зависит лишь от k, α и норм в $C_\alpha^k(\overline{D})$ коэффициентов оператора $\mathcal{D}$.*

Теорема 5. *В предположениях теорем 1, 3 для любой функции $w(z) \in W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 1$ имеет место априорная оценка:*

$$\|w\|_{W_p^k(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const} \left\{ \|\mathcal{D}w\|_{W_p^{k-1}(\overline{D})} + \|w\|_{W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \right\},$$

где const *зависит лишь от k, p и норм в $W_p^{k-1}(\overline{D})$ коэффициентов оператора $\mathcal{D}$ при $k > 1$, а при $k = 1$ от p и норм $\|q_1\|_{C(\overline{D})}$, $\|q_2\|_{C(\overline{D})}$, $\|A\|_{L_p(\overline{D})}$, $\|B\|_{L_p(\overline{D})}$.*

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Операторы T и Π. Обозначим

$$\Pi f(z) = \partial_z T f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения (по Коши). Справедлива

Лемма 1. *Сингулярный оператор Π непрерывно отображает пространства $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, и $W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$, в себя. При этом $\|\Pi\|_{L_2} = 1$ и для всякого $q_0 : 0 < q_0 < 1$ найдётся $s_0 = s_0(q_0) > 2$ такое, что $q_0 \|\Pi\|_{L_s} < 1$ при $2 < s < s_0$.*

Замечание 1. *Утверждение об ограниченности Π в $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, и свойства его нормы в L_s доказаны в* [1, гл. 1, §8, §9]. *Аккуратное доказательство ограниченности Π в $W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$, можно найти в* [6].

Из (5) и леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 2. *Оператор T непрерывно отображает $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, в $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$ и $W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$, в $W_p^{k+1}(\overline{D})$.*

Очевидно, что аналогичное утверждение справедливо для оператора

$$\overline{T} f(z) = \overline{\left(T \overline{f(z)} \right)}, \quad \partial_{\bar{z}} \overline{T} f(z) = f(z).$$

2.2. Сдвиги. Будем говорить, что контур $\mathcal{L} \in C^k_\alpha$, $k \geq 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, если существует гомеоморфное отображение $\zeta = f(z)$ окружности Γ на $\mathcal{L}$ класса $C^k_\alpha(\Gamma)$, при этом обратное отображение $z = f^{-1}(\zeta)$ будет класса $C^k_\alpha(\mathcal{L})$. В этом случае отображение $\zeta = f(z)$ (как и обратное) называют диффеоморфизмом класса C^k_α контуров Γ и $\mathcal{L}$.

Отметим, что если s — длина дуги на Γ, а σ — длина дуги на $\mathcal{L}$, то при диффеоморфизме имеют место соотношения: $\zeta'_t(t) \neq 0$, где $\zeta'_t = \zeta'_s \cdot s'_t = \zeta'_s \cdot \overline{t'}_s$, t — аффикс точки контура Γ; и, соответственно, $z'_\tau(\tau) \neq 0$, где $z'_\tau = z'_\sigma \cdot \sigma'_\tau = z'_\sigma \cdot \overline{\tau'}_\sigma$, τ — аффикс точки контура $\mathcal{L}$.

Обобщая [7, с. 33], для функции $\varphi(\zeta)$, определённой на $\mathcal{L}$, введём оператор $\mathcal{W}\varphi(t) = \varphi(\zeta(t))$, где $\zeta = \zeta(t)$ — диффеоморфное класса C^k_α, $k \geq 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, отображение контура Γ на контур $\mathcal{L} \in C^k_\alpha$. Очевидно, $\mathcal{W}$ — линейный, ограниченный, непрерывно обратимый оператор, действующий из $C^k_\alpha(\mathcal{L})$ в $C^k_\alpha(\Gamma)$.

Пусть $\zeta(t)$ — диффеоморфизм класса $C^k_\alpha(\Gamma)$, $k \geq 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ контура Γ на контур $\mathcal{L}$.

Обозначим
$$S_\Gamma\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad t \in \Gamma, \tag{9}$$
одномерный сингулярный (интегральный) оператор. Аналогично определяется оператор $S_\mathcal{L}$.

Нам будут необходимы следующие свойства суперпозиции
$$\Psi\varphi(t) = \left(\mathcal{W}S_\mathcal{L}\mathcal{W}^{-1} - S_\Gamma\right)\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\varphi(\tau)d\tau,$$
установленные в [8].

Теорема 6. *Если $\zeta(t) \in C^1_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\mu = \alpha + \beta \leqslant 2$, то при $\mu < 1$ $\Psi\varphi(t) \in C_\mu(\Gamma)$, причём*
$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C_\mu(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C_\beta(\Gamma)}, \tag{10}$$
где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^1_\alpha(\Gamma)}$.

Если $\mu = 1$, то $\Psi\varphi(t) \in C_{\mu-\varepsilon}(\Gamma)$ для $\forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < \mu$ с выполнением оценки, аналогичной (10).

Если $\mu > 1$, то $\Psi\varphi(t) \in C^1_{\mu-1}(\Gamma)$, причём
$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^1_{\mu-1}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C_\beta(\Gamma)}, \tag{11}$$
где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^1_\alpha(\Gamma)}$.

Следствие 1. *Если $\zeta(t) \in C^1_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^1_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta \leqslant 1$, то $\Psi\varphi(t) \in C^1_\alpha(\Gamma)$, причём*
$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^1_\alpha(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^1_\beta(\Gamma)}, \tag{12}$$
где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^1_\alpha(\Gamma)}$.

Замечание 2. *В работе* [8] *в формулировке теоремы 6 в качестве кривой $\mathcal{L}$ фигурирует единичная окружность, но в доказательстве это нигде не используется. Очевидно, в вышеприведённой формулировке можно считать $\mathcal{L}$ окружностью, а Γ — её диффеоморфным образом (о замене переменной интегрирования в сингулярном интеграле см., например,* [13, с. 31]*).*

2.3. Пространство $W^{k-\frac{1}{p}}_p(\Gamma)$. Следуя [9, гл. 5], обозначим $W^{k-\frac{1}{p}}_p(\Gamma)$, $k \geq 1$, $p > 2$, множество граничных значений (следов) функций из пространства $W^k_p(\overline{D})$. Норму функции $f \in W^{k-\frac{1}{p}}_p(\Gamma)$ определим как норму в пространстве $W^k_p(\overline{D})$ гармонической в D функции с граничными значениями на Γ, совпадающими с f. Это банахова норма и сингулярный оператор (9) ограничен в банаховом пространстве $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ (см. [10, гл. 6, § 1]).

Поскольку по теореме вложения Соболева-Кондрашева $W_p^k(\overline{D}) \subset C_\beta^{k-1}(\overline{D})$, $\beta = \frac{p-2}{p}$, имеет место вложение

$$W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma) \subset C_\beta^{k-1}(\Gamma), \;\; k \geq 1, \; p > 2. \tag{13}$$

Обозначим $\mathcal{K}f(z)$ интеграл типа Коши

$$\mathcal{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}dt, \;\; z \in D. \tag{14}$$

Имеет место неравенство

$$\|\mathcal{K}f(z)\|_{W_p^k(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|f(t)\|_{W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)}, \;\; k \geq 1, \; p > 2, \tag{15}$$

где const от f не зависит (см. [10, гл. 6, § 1]).

2.4. Средства локализации.

2.4.1. Приграничные области. Имеет место

Лемма 3 ([3])**.** *Пусть $f(x)$ — чётная, монотонно возрастающая при $x > 0$ функция вещественного аргумента x, $f(x) \in C_\gamma^1[-\varepsilon, \varepsilon]$, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$, и $\|f\|_{C_\gamma^1[-\varepsilon,\varepsilon]} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Для данной константы $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x)$ продолжима на сегмент $[-1, 1]$ с сохранением чётности, монотонности при $x > 0$ и класса C_γ^1; $f(x) \equiv \mathrm{const} > 0$ вблизи точек $x = \pm 1$ и

$$\|f^*\|_{C_\gamma^1[-\varepsilon,\varepsilon]} < \delta,$$

где f^* — продолжение f на $[-1, 1]$.

При этом будет выполнено неравенство

$$\left\|\frac{df^*}{dx}\right\|_{C[\varepsilon,1]} \leqslant \left.\frac{df^*}{dx}\right|_{x=\varepsilon}.$$

Пусть G — единичный круг $|\zeta| < 1$ в комплексной ζ-плоскости E_ζ. Построим в этой плоскости специальную область G^* с границей $\mathcal{L}$, задаваемой уравнением

$$\zeta(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}, \;\; -\infty < \theta < \infty,$$

где $\rho(\theta) \in C_\gamma^1(-\infty, \infty)$ — 2π-периодическая функция, $0 < \gamma < 1$.

Функцию $\rho(\theta)$ определим так, чтобы $\rho(0) = 1$, $\rho(\theta) \geq 1$, $\zeta(\theta)$ задавала для $\theta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, окружность радиуса $r > 1$,

$$\begin{aligned} &\rho'(\varepsilon) \geq |\rho'(\theta)|, \;\; \theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \\ &\|\rho(\theta) - 1\|_{C_\gamma^1[0,2\pi]} < \delta, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\delta > 0$ — заданная константа, значение которой уточним ниже.

В силу леммы 3 такая функция $\rho(\theta)$ существует. Переменную точку области G^* обозначим t и положим $\overline{G}^* = G^* \cup \mathcal{L}$.

Справедливо следующее утверждение [11].

Лемма 4. *Пусть $f(t) = \zeta$ — конформное отображение области G^* на круг G, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.*

Тогда существует такое (достаточно малое) число $\delta > 0$, что если выполнено второе неравенство (16), *то $f \in C_\gamma^1(\overline{G}^*)$ и*

$$\|f(t) - t\|_{C_\gamma^1(\overline{G}^*)} \leqslant M \cdot \delta, \tag{17}$$

где константа M зависит только от γ.

В дальнейшем в (16) число δ предполагаем подходящим для применения леммы 4 и меньшим $1/2M$. Эти предположения с помощью (17) позволяют провести следующую оценку:

$$|1-|f'(t)||\leqslant\|f'(t)-1\|_{C_\gamma(\overline{G}^*)}\leqslant\|f(t)-t\|_{C^1_\gamma(\overline{G}^*)}\leqslant\frac{1}{2},$$

откуда

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\leqslant|f'(t)|\leqslant\frac{3}{2},\ \ \forall t\in\overline{G}^*;\\ \frac{1}{2}\leqslant\|f'(t)\|_{C_\gamma(\overline{G}^*)}\leqslant\frac{3}{2}.\end{gathered}\tag{18}$$

Будем считать совмещёнными плоскости E_z и E_ζ (а значит, и единичные круги G и D).

Пусть $z_0\in\Gamma=\partial D$. Подвергнем $\overline{G}^*$ преобразованию подобия

$$z=\frac{1}{r}\cdot t\tag{19}$$

и движением расположим образ замкнутой области $\overline{G}^*$ так, чтобы образ точки $t=1$ совместился с z_0, а соответствующая часть границы образа $\overline{G}^*$ наложилась на Γ. В силу первого неравенства (16) область G^* перейдёт в подобласть класса C^1_γ круга D, которую обозначим D_r. Описанное отображение обозначим $z=g(t)$. Конформное отображение

$$\varphi=g\circ f^{-1}:G\to G^*\to D_r,\ \ z=\varphi(\zeta),$$

по лемме 4 класса $C^1_\gamma(\overline{G})$ и в силу (18), (19)

$$\min_{\zeta\in\overline{G}}|\varphi'(\zeta)|\geq\frac{2}{3r};\ \ \max_{\zeta\in\overline{G}}|\varphi'(\zeta)|\leqslant\frac{2}{r}\to 0,\ \ r\to+\infty.\tag{20}$$

Из (18) и (20) для $\zeta=\psi(z)=\varphi^{-1}(z)$ будем иметь:

$$\begin{gathered}\max_{\zeta\in\overline{D}_r}|\psi'(z)|\leqslant\frac{3r}{2},\ \ \min_{\zeta\in\overline{D}_r}|\psi'(z)|\geq\frac{r}{2},\\ \|\psi'(z)\|_{C_\gamma(\overline{D}_r)}\leqslant 2r.\end{gathered}\tag{21}$$

Ясно, что при $r\to+\infty$ имеем $\varepsilon\to 0$ и $\operatorname{diam}D_r\to 0$.

Лемма 5. *Функция* $\omega(z)=\dfrac{\psi'(z)}{\overline{\psi'(z)}}\in C_\gamma(\overline{D}_r)$ *и* $\|\omega(z)\|_{C_\gamma(\overline{D}_r)}\leqslant\mathrm{const}$, *где константа не зависит от r.*

Доказательство. Поскольку $|\omega(z)|\equiv 1$, нужно оценить константу Гёльдера этой функции.

Итак, пусть z_1, $z_2\in\overline{D}_r$. Очевидно соотношение:

$$|\omega(z_1)-\omega(z_2)|=\frac{|(\psi'(z_1)-\psi'(z_2))\overline{\psi'(z_2)}+\psi'(z_2)(\overline{\psi'(z_2)}-\overline{\psi'(z_1)})|}{|\psi'(z_1)|\cdot|\psi'(z_2)|}.$$

Отсюда, с учётом (21), получаем:

$$|\omega(z_1)-\omega(z_2)|\leqslant\frac{12}{r}|\psi'(z_1)-\psi'(z_2))|\leqslant 24\cdot|z_1-z_2|^\gamma.$$

□

Замечание 3. *В вышеприведённых построениях число $\gamma:0<\gamma<1$, может быть выбрано произвольным, не связанным с показателем Гёльдера из формулировки теоремы 2.*

Замечание 4. *Очевидно, если в качестве области D_r взять круг радиуса $1/r$, содержащийся в D, то оценки (20), (21) и утверждение леммы 5 остаются в силе.*

2.4.2. Разбиение единицы. Обозначим $\mathcal{U} = \{U_l\}$ конечное покрытие замкнутого круга $\overline{D}$, $U_l \subset \overline{D}$, состоящее из открытых кругов фиксированного радиуса $1/r$, содержащихся в D, и областей типа D_r, прилегающих к границе Γ и описанных в предыдущем пункте. Число r считаем достаточно большим; насколько оно большое, будем уточнять при использовании покрытия $\mathcal{U}$.

Через $\mathcal{H} = \{h_l\}$ обозначим разбиение единицы класса C^∞ на $\overline{D}$, подчинённое покрытию $\mathcal{U}$, т.е., все функции h_l неотрицательны, $\forall h_l \in C^\infty(\overline{D})$, носитель каждой функции $\operatorname{supp} h_l \subset U_l$ и $\sum\limits_l h_l(z) = 1$ для $\forall z \in \overline{D}$. О существовании такого разбиения единицы см., например, [12, гл. II, § 4].

Лемма 6. *Пусть $f(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta < 1$, $\mathcal{K}f(z)$ — интеграл типа Коши* (14), *h_l — элемент разбиения единицы $\mathcal{H}$.*

Если $\mathcal{K}f(z) \in A^k_\alpha$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ (A^{k+1}_p, $p > 2$), то $\mathcal{K}(h_l f)(z) \in A^k_\alpha$ (A^{k+1}_p).

Доказательство. Ясно, что при $k = 0$, $\alpha \leqslant \beta$, а также при $\operatorname{supp} h_l \cap \Gamma = \varnothing$ утверждение тривиально. Пусть $\operatorname{supp} h_l \cap \Gamma \neq \varnothing$.

Рассмотрим выражение

$$h_l(z)\mathcal{K}f(z) - \mathcal{K}(h_l f)(z) = P(z) \in C_\beta(\overline{D}).$$

В силу формул Сохоцкого–Племеля [13, гл. 1, §4] предельные значения функции $P(z)$ при $z \to \tau \in \Gamma$ имеют вид:

$$P^+(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{h_l(\tau) - h_l(t)}{t - \tau} \cdot f(t) \cdot dt.$$

Так как $h_l \in C^\infty(\Gamma)$, из формулы Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме с очевидностью следует, что как функция аргумента τ дробь

$$\frac{h_l(\tau) - h_l(t)}{t - \tau} \in C^\infty(\Gamma),$$

т.е., $P^+(\tau) \in C^\infty(\Gamma)$.

Вместе с тем, $h_l(\tau)\mathcal{K}^+f(\tau) \in C^k_\alpha(\Gamma)$ $(W^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma))$, что влечёт за собой $\mathcal{K}^+(h_l f)(\tau) \in C^k_\alpha(\Gamma)$ $(W^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma))$, откуда, с учётом свойств интеграла типа Коши (см. [1, гл. 1, §3] и (15)) и формулы Коши для голоморфных функций, получаем утверждение леммы 6. □

2.5. Регулярность и единственность решений.

Лемма 7. *Если в уравнении* (1), *при выполнении условий эллиптичности* (2),

$$q_1(z),\, q_2(z) \in C^{k+1}_\alpha(D),\ k \geq 0,\ 0 < \alpha < 1\ \ (W^{k+1}_p(D),\ k \geq 0,\ p > 2),$$

$$A(z),\, B(z), R(z) \in C^k_\alpha(D),\ k \geq 0,\ 0 < \alpha < 1\ \ (W^k_p(D),\ k \geq 0,\ p > 2),$$

то любое решение этого уравнения $w(z) \in W^1_s(D)$, $s > 2$, принадлежит классу $C^{k+1}_\alpha(D)$ ($W^{k+1}_p(D)$).

Доказательство этого утверждения по существу содержится в [1, гл. 2, §7; гл. 4, §7].

Лемма 8. *Если в уравнении* (1), *при выполнении условий эллиптичности* (2), *$q_1(z)$, $q_2(z)$ — измеримые функции, $A(z)$, $B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, $R(z) \equiv 0$, а граничные значения решения $w(z) \in W^1_s(\overline{D})$, $s > 2$, равны нулю на множестве положительной линейной меры на Γ, то $w(z) \equiv 0$.*

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 4.4 работы [2] (см. также [1, гл. 3, §17]).

3. Доказательство основных результатов

Схема доказательства следующая. Сначала доказывается однозначная разрешимость уравнения

$$\Omega(w) = F \in W_p^1(\overline{D}), \quad p > 2, \tag{22}$$

в пространстве $W_s^1(\overline{D})$, где $s : 2 < s \leqslant p$ и s достаточно близко к двум. Далее теоремы 1–2 устанавливаются в случае постоянных коэффициентов q_1 и q_2 и $A(z) = B(z) \equiv 0$, после чего с помощью развитого в [3] варианта метода «локальной регуляризации» с замораживанием коэффициентов получаем общие утверждения этих теорем. Доказательство теоремы 3 представляет собой небольшую переработку доказательства теоремы 2.

3.1. Разрешимость уравнения (22) в $W_s^1(\overline{D})$.

Лемма 9. *Если $q_1(z)$, $q_2(z)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию* (2), *а $A(z)$, $B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$, то уравнение*

$$\Omega(w) = 0 \tag{23}$$

в классе $W_s^1(\overline{D})$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Предположим противное, что решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D}) \subset C_\beta(\overline{D})$, $\beta = \dfrac{s-2}{s}$, уравнения (23) не равно тождественно нулю. Известно, что при $f(z) \in L_s(\overline{D})$ функция $Tf(z) \in C_\beta(E)$, голоморфна вне $\overline{D}$ и $Tf(\infty) = 0$ [1, с. 54–58]. Таким образом, из (23) следует, что функция $w(z)$ непрерывно продолжима вне $\overline{D}$ голоморфным образом и равна нулю на бесконечности.

С другой стороны, продифференцировав (23) по $\bar{z}$, мы получим, что $w(z)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) (при $F(z) \equiv 0$). Отсюда и из (6) получаем, что $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega(w) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(t)}{t-z} dt, \tag{24}$$

т.е., интеграл типа Коши в правой части (24) непрерывен на всей плоскости и равен нулю на бесконечности. Но это возможно только при $w(t) \equiv 0$, $t \in \Gamma$ [13, с. 39]. Вместе с тем, непрерывное в $\overline{D}$ решение однородного уравнения (1), равное нулю на Γ, тождественно равно нулю (см. лемму 8). □

Лемма 10. *Если $q_1(z)$, $q_2(z)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию* (2), *а $A(z)$, $B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, то уравнение* (22) *имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$, где $s : 2 < s \leqslant p$ и s достаточно близко к двум.*

Доказательство. Единственность следует из леммы 9. Покажем, что оператор

$$\Omega_1(w) = w + T(q_1 \partial_z w + q_2 \partial_{\bar{z}} \overline{w}) \tag{25}$$

имеет ограниченный обратный в $W_s^1(\overline{D})$, если $2 < s \leqslant p$ и s достаточно близко к двум.

Рассмотрим уравнения

$$\Omega_1(w) = \omega \in W_s^1(\overline{D}), \tag{26}$$

$$\lambda + \Pi(q_1\lambda + q_2\overline{\lambda}) \equiv \lambda + \sigma\lambda = \partial_z\omega. \tag{27}$$

Уравнение (27) получено дифференцированием (26) по z и заменой $\partial_z w$ на $\lambda(z)$. По лемме 1 существует $s : 2 < s < s_0(q_0) \leqslant p$ такое, что $q_0\|\Pi\|_{L_s} < 1$, поэтому по принципу сжатых отображений уравнение (27) однозначно разрешимо в $L_s(\overline{D})$:

$$\lambda(z) = (I + \sigma)^{-1}\partial_z\omega(z) \tag{28}$$

и норма линейного оператора $(I+\sigma)^{-1} : L_s(\overline{D}) \to L_s(\overline{D})$ ограничена константой, зависящей только от q_0.

Будем искать решение уравнения (26) в виде

$$w(z) = \overline{T\overline{\lambda}} + \Psi(\bar{z}), \tag{29}$$

где $\Psi(z)$ — голоморфная в D функция класса $W_s^1(\overline{D})$. Подставив (29) в (26), получим

$$\Psi(\bar{z}) = \omega(z) - \overline{T\overline{\lambda}} - T(q_1\lambda + q_2\overline{\lambda}). \tag{30}$$

Так как $Tf(z) \in W_s^1(\overline{D})$ если $f(z) \in L_s(\overline{D})$ [1, гл. 1, §6], в силу (5), (27) $\partial_z\Psi(\bar{z}) = 0$, т.е. функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (30), голоморфна и из класса $W_s^1(\overline{D})$.

Таким образом, формулой

$$w(z) = \omega(z) - T\left(q_1(z)(I+\sigma)^{-1}\partial_z\omega + q_2(z)\overline{(I+\sigma)^{-1}\partial_z\omega}\right) \tag{31}$$

определяется решение уравнения (26). Поскольку в силу свойств оператора T (см. лемму 2) оператор $\Omega_1 : W_s^1(\overline{D}) \to W_s^1(\overline{D})$, непрерывен, по теореме Банаха обратный оператор $\Omega_1^{-1} : W_s^1(\overline{D}) \to W_s^1(\overline{D})$ также непрерывен (это можно усмотреть и непосредственно из (31)).

Замечание 5. *Из* (31) *и свойств оператора* T [1, гл. 1, §6] *следует, что норма линейного оператора* $\Omega_1^{-1} : W_s^1(\overline{D}) \to W_s^1(\overline{D})$ *ограничена числом, зависящим лишь от* q_0.

Перепишем уравнение (22) в виде

$$w + \Omega_1^{-1} \circ Pw = \Omega_1^{-1}F, \tag{32}$$

где $Pw = T(Aw + B\overline{w})$. Так как оператор P вполне непрерывен в $C(\overline{D})$ и отображает $C(\overline{D})$ в $W_p^1(\overline{D})$ [1, гл. 1, §6], то оператор $\Omega_1^{-1} \circ P$ вполне непрерывен в $C(\overline{D})$ и отображает $C(\overline{D})$ в $W_s^1(\overline{D})$.

В силу отмеченных свойств участвующих в (32) операторов, непрерывное в $\overline{D}$ решение однородного уравнения (32) принадлежит классу $W_s^1(\overline{D})$ и по лемме 9 равно нулю. Таким образом, по теореме Фредгольма уравнение (32) однозначно разрешимо в классе $C(\overline{D})$ и его решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$. □

3.2. Случай постоянных коэффициентов q_1 и q_2 у оператора Ω_1.

Лемма 11. *Если* $q_1(z) = \mathrm{const}$, $q_2(z) = \mathrm{const}$, *то оператор* Ω_1, *определяемый формулой* (25), *является (вещественно) линейным изоморфизмом банахова пространства* $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ $(W_p^{k+1}(\overline{D}),\ k \geq 0,\ p > 2)$.

Доказательство. Из свойств оператора T (см. лемму 2) следует, что отображение

$$\Omega_1 : C_\alpha^{k+1}(\overline{D}) \to C_\alpha^{k+1}(\overline{D}) \quad \left(W_p^{k+1}(\overline{D}) \to W_p^{k+1}(\overline{D})\right)$$

непрерывно. В силу теоремы Банаха достаточно показать его сюрьективность. Рассмотрим уравнение

$$\Omega_1(w) = F(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}) \ \left(W_p^{k+1}(\overline{D})\right). \tag{33}$$

По лемме 10 уравнение (33) имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$, где $s > 2$ достаточно близко к двум. Покажем, что это решение принадлежит классу $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$ $\left(W_p^{k+1}(\overline{D})\right)$.

Пользуясь (6), уравнение (33) перепишем в виде

$$w(z) + T(q_1\partial_z w + q_2\partial_{\bar{z}}\overline{w}) = \Phi(z) + T\partial_{\bar{z}}F(z), \tag{34}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{F(t)}{t-z}dt \in A_\alpha^{k+1} \quad \left(A_p^{k+1}\right).$$

Применяя к (34) оператор

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\bullet}{z-\zeta}dz,\ \ \zeta\in D,$$

получим, что $\Phi(z)$ также представляется формулой

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{w(t)}{t-z}dt. \tag{35}$$

Сначала предположим, что $q_1=0$, т.е., рассмотрим уравнение

$$w+T(q_2\partial_{\bar z}\overline{w})=\Phi(z)+T\partial_{\bar z}F. \tag{36}$$

Дифференцируя (36) по $\bar z$, получим

$$\partial_{\bar z}(w+q_2\overline{w})=\partial_{\bar z}F,$$

т.е., в силу (6), $w(z)$ удовлетворяет соотношению

$$w(z)+q_2\overline{w(z)}=\Phi(z)+q_2\Psi(z)+T\partial_{\bar z}F, \tag{37}$$

где $\Phi(z)$ определяется формулой (35), а

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{w(t)}}{t-z}dt. \tag{38}$$

Переходя к пределу при $z\to\tau\in\Gamma$, для предельных значений $\Psi^+(\tau)$ функции $\Psi(z)$ по формулам Сохоцкого–Племеля [13, с. 38] получим следующее выражение:

$$\Psi^+(\tau)=\frac{1}{2}\overline{w(\tau)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{w(t)}}{t-\tau}dt.$$

Поскольку на Γ $t\cdot\bar t=1$, $\tau\cdot\bar\tau=1$, выражение для $\Psi^+(\tau)$ мы можем преобразовать следующим образом:

$$\Psi^+(\tau)=\overline{w(\tau)}-\overline{\Phi^+(\tau)}-C, \tag{39}$$

где

$$\Phi^+(\tau)=\frac{1}{2}w(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{w(t)}{t-\tau}dt,\ \ C=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{w(t)}}{\bar t}d\bar t. \tag{40}$$

Таким образом, из (37) имеем

$$w(\tau)=\Phi^+(\tau)-q_2\overline{\Phi^+(\tau)}-q_2C+T\partial_{\bar z}F(\tau)\in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)\ \left(W_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma)\right).$$

Но в таком случае и $\overline{w(\tau)}\in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$ $\left(W_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma)\right)$, откуда $\Psi(z)\in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$ $\left(W_p^{k+1}(\overline{D})\right)$ (см. [1, с. 38], (15)), и

$$w(z)+q_2\overline{w(z)}=F_0(z)\in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})\ \ \left(W_p^{k+1}(\overline{D})\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w(z)=\frac{1}{1-|q_2|^2}\left(F_0(z)-q_2\overline{F_0(z)}\right)\equiv \\ \equiv\Xi(\Phi,\,F)(z)\in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})\ \ \left(W_p^{k+1}(\overline{D})\right) \end{aligned} \tag{41}$$

и частный случай $q_1=0$ исчерпан.

Замечание 6. *Отметим, что отсюда следует, что если* $q_1 = 0$ *и* $w(z) \in W^1_s(\overline{D})$, $s > 2$, $\Phi^+(t) \in C^n_\gamma(\Gamma)$, *где* $0 \leqslant n \leqslant k+1$, $0 < \gamma \leqslant \alpha < 1$, *то* $w(z) \in C^n_\gamma(\overline{D})$. *Более того, справедлива*

Лемма 12. *Если* $\Phi(z) \in A^n_\gamma(\overline{D})$, *где* $0 \leqslant n \leqslant k+1$, $0 < \gamma \leqslant \alpha < 1$, *то формулой* (41) *однозначно определяется в* D *решение уравнения*

$$\partial_{\bar z} w + q_2 \partial_{\bar z} \overline{w} = \partial_{\bar z} F$$

класса $C^n_\gamma(\overline{D})$, *для которого функция* $\Phi(z)$ *представима формулой* (35).

Пусть теперь $q_1 \neq 0$. Рассуждаем по индукции. Покажем сначала, что лемма справедлива при $k = 0$.

Обозначим

$$\mu = \frac{2q_1}{1 + |q_1|^2 - |q_2|^2 + \sqrt{\Delta}} = \mathrm{const},$$

где $\Delta = (1 + |q_1|^2 - |q_2|^2)^2 - 4|q_1|^2 \geq (1 - q_0^2)^2 > 0$, q_0 — константа эллиптичности из (2). Легко видеть, что $|\mu| < 1$.

Далее обозначим $\zeta = \zeta(z)$ основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar z} \zeta + \mu \partial_z \zeta = 0,$$

отображающий единичный круг $\overline{D}_z = \{z : |z| \leqslant 1\}$ на единичный круг $\overline{D}_\zeta = \{\zeta : |\zeta| \leqslant 1\}$ с нормировкой $\zeta(0) = 0$, $\zeta(1) = 1$. Как известно, $\zeta(z) \in C^\infty(\overline{D}_z)$ [14].

В уравнении

$$\partial_{\bar z} w + q_1 \partial_z w + q_2 \partial_{\bar z} \overline{w} = \partial_{\bar z} F(z) \tag{42}$$

перейдём к аргументу $\zeta = \zeta(z)$ и будем обозначать $w(z(\zeta)) = w(\zeta)$, где $z = z(\zeta) \in C^\infty(\overline{D}_\zeta)$ — отображение, обратное к $\zeta = \zeta(z)$. Уравнение (42) преобразуется к виду [15]:

$$\partial_{\bar\zeta} w + a \partial_{\bar\zeta} \overline{w} = R_1(\zeta) \in C^k_\alpha(\overline{D}_\zeta) \ \left(W^k_p(\overline{D}_\zeta)\right), \tag{43}$$

где

$$a = \frac{q_2(1 - |\mu|^2)}{|1 - q_1 \bar\mu|^2 - |q_2 \mu|^2} = \mathrm{const}, \quad |a| < 1.$$

Аналогично (36) функция $w = w(\zeta)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$w(\zeta) + aT(\partial_{\bar\zeta} \overline{w}) = \Phi_1(\zeta) + T\partial_{\bar\zeta} R_1, \tag{44}$$

где

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(z(\omega))}{\omega - \zeta} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(t)}{\zeta(t) - \zeta} \zeta'(t) dt \tag{45}$$

(о замене переменной интегрирования в сингулярном интеграле см. [13, с. 31]).

Отметим, что в силу теоремы вложения Соболева–Кондрашёва $w(z) \in W^1_s(\overline{D}_z) \subset C_\beta(\overline{D}_z)$, где $\beta = (s-2)/s$ [1, с. 51], т.е., $w(t) \in C_\beta(\Gamma_z)$ и $w(\zeta) = w(z(\zeta)) \in C_\beta(\Gamma_\zeta)$.

Обратимся теперь к выражению

$$\Psi w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_z} \left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] w(\tau) d\tau = \Phi_1^+(\zeta(t)) - \Phi^+(t),$$

где $\Phi^+(t)$ определяется формулой (40), а

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{1}{2} w(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{w(\omega)}{\omega - \zeta} d\omega.$$

Поскольку $\zeta(\tau) \in C^\infty(\Gamma_z)$, по теореме 6 $\Psi w(t) \in C^1_\beta(\Gamma_z)$, а так как $\Phi^+(t) \in C^1_\alpha(\Gamma_z)$ $(W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_z))$, то, если $\beta < \alpha$, $\Phi_1^+(\zeta(t)) \in C^1_\beta(\Gamma_z)$ $(W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_z))$ и $\Phi_1^+(\zeta) \in C^1_\beta(\Gamma_\zeta)$ $(W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_\zeta))$, откуда $w(\zeta) \in C^1_\beta(\overline{D}_\zeta)$ (см. замечание 6) (соответственно $w(\zeta) \in W^1_p(\overline{D}_\zeta)$) и $w(z) \in C^1_\beta(\overline{D}_z)$ $(w(z) \in W^1_p(\overline{D}_z))$, а $w(t) \in C^1_\beta(\Gamma_z)$.

Далее, если $\beta < \alpha$, в силу следствия 1 $\Psi(t) \in C^1_\alpha(\Gamma_z)$ и $\Phi_1^+(\zeta) \in C^1_\alpha(\Gamma_\zeta)$, вследствие чего $w(\zeta) \in C^1_\alpha(\overline{D}_\zeta)$ и $w(z) \in C^1_\alpha(\overline{D}_z)$. Если $\beta \geq \alpha$, рассуждения очевидным образом упрощаются.

Итак, в случае $k = 0$ лемма 11 доказана.

Отметим, что из проделанных рассуждений, формулы (41) и леммы 12 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 13. *Если*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(t)}{t-z}dt \in A^1_\alpha,\ \ 0 < \alpha < 1,\ \ (A^1_p,\ p > 2),$$

$w(z) \in C^1(D)\cap C_\alpha(\overline{D})$ *(*$W^1_p(D)\cap C_\beta(\overline{D})$, $0 < \beta < 1$*) — решение уравнения* (42)*, то функция* $w(z)$ *представима формулой*

$$w(z) = \Xi(\Phi,\, R_1)(\zeta(z)), \tag{46}$$

а следовательно, $w(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$ *(*$W^1_p(\overline{D})$*).*

Предположим теперь, что лемма 11 справедлива при некотором $k = m-1$, $m \geq 1$, и покажем, что тогда она справедлива и при $k = m$. Таким образом, в силу нашего предположения индукции, если в уравнении (33) правая часть принадлежит классу $C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$, то решение этого уравнения $w(z) \in C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$.

Пусть теперь правая часть уравнения (33) принадлежит классу $C^{m+1}_\alpha(\overline{D})$ $(W^{m+1}_p(\overline{D}) \subset C^m_\beta(\overline{D})$, $\beta = (p-2)/p)$.

Обозначим $z = re^{is}$ и введём в рассмотрение функцию

$$\frac{\partial w(re^{is})}{\partial s} \equiv w_s(z) = i(zw_z - \bar{z}w_{\bar{z}}). \tag{47}$$

По лемме 7 $w(z) \in C^{m+1}_\alpha(D)$ $(W^{m+1}_p(D))$, т.е., $w_s(z) \in C^m_\alpha(D) \cap C^{m-1}_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(D) \cap C^{m-1}_\beta(\overline{D}))$, и поэтому в D корректно определены функции

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} = i(zw_{z\bar{z}} - w_{\bar{z}} - \bar{z}w_{\bar{z}\bar{z}});\\
&\frac{\partial w_s}{\partial z} = i(w_z + zw_{zz} - \bar{z}w_{\bar{z}z});\\
&\frac{\partial \overline{w}_s}{\partial \bar{z}} = -i(\overline{w}_{\bar{z}} + \overline{z}\overline{w}_{\bar{z}\bar{z}} - z\overline{w}_{z\bar{z}}).
\end{aligned} \tag{48}$$

Из (48) и (33) имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + q_1\frac{\partial w_s}{\partial z} + q_2\frac{\partial \overline{w}_s}{\partial \bar{z}} = i(-w_{\bar{z}} + q_1 w_z - q_2\overline{w}_{\bar{z}}) -\\
&-i\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_{\bar{z}} + q_1 w_z + q_2\overline{w}_{\bar{z}}) + iz\frac{\partial}{\partial z}(w_{\bar{z}} + q_1 w_z + q_2\overline{w}_{\bar{z}}) =\\
&= 2iq_1 w_z - i\bar{z}F_{\bar{z}\bar{z}} + izF_{\bar{z}z} - iF_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $w_s(z)$ удовлетворяет в D уравнению

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + q_1\frac{\partial w_s}{\partial z} + q_2\frac{\partial \overline{w}_s}{\partial \bar{z}} = R_s(z) \in C^{m-1}_\alpha(\overline{D})\ (W^{m-1}_p(\overline{D})). \tag{49}$$

Наша ближайшая цель — доказать, что $w_s(z) \in C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$.

Обозначим

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w_s(t)}{t-z}dt.$$

Имеет место соотношение [1, с. 39]:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w_s(t)\bar{t}'_s}{t-z}dt.$$

Учитывая, что на Γ $t \cdot \bar{t} = 1$, $\bar{t}'(s) = -i\bar{t}$, отсюда получаем:

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w_s(t)}{t}dt + iz\Phi'(z) \in C^m_\alpha(\overline{D})\ (W^m_p(\overline{D})). \tag{50}$$

При $m = 1$ из (50) и леммы 13 имеем $w_s(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$ $(W^1_p(\overline{D}))$.

Если же $m > 1$, то $w_s(z)$ является решением уравнения

$$\Omega_1 w_s = TR_s + \Phi_s \in C^m_\alpha(\overline{D})\ (W^m_p(\overline{D})),$$

а следовательно, в силу предположения индукции, $w_s(z) \in C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$.

Из (47) и (42) получаем:

$$w_z = \frac{-i[w_s(\bar{z} + z\bar{q}_1) + \bar{z}q_2\overline{w}_s] + \bar{z}F_{\bar{z}}(\bar{z} + z\bar{q}_1) - |z|^2 q_2 \overline{F}_z}{|z + \bar{z}q_1|^2 - |z|^2|q_2|^2}. \tag{51}$$

Поскольку $|q_1| + |q_2| < 1$, знаменатель дроби в (51) при $z \neq 0$ в нуль не обращается.

Из (51), $w_s(z) \in C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$ и $w(z) \in C^{m+1}_\alpha(D)$ $(W^{m+1}_p(D))$ получаем $w_z(z) \in C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$. Отсюда и из (42) следует, что $w_{\bar{z}} \in C^m_\alpha(\overline{D})$ $(W^m_p(\overline{D}))$. Таким образом, $w(z) \in C^{m+1}_\alpha(\overline{D})$ $(W^{m+1}_p(\overline{D}))$ и лемма 11 полностью доказана. □

3.3. Доказательство теоремы 1. Докажем теорему сначала для частного случая — для оператора (25). По лемме 10 уравнение

$$\Omega_1(w) = F \in W^1_p(\overline{D}) \tag{52}$$

имеет единственное решение $w(z) \in W^1_s(\overline{D})$, $s : 2 < s \leqslant p$. Поскольку оператор Ω_1 непрерывно отображает $W^1_p(\overline{D})$ в $W^1_p(\overline{D})$, в силу теоремы Банаха достаточно показать, что это решение $w(z) \in W^1_p(\overline{D})$.

Рассмотрим на $\overline{D}$ разбиение единицы $\mathcal{H} = \{h_l\}$, о котором говорится в п. 2.4.2, и набор функций $\{w_l(z)\}$, $w_l = h_l \cdot w \in W^1_s(\overline{D})$. Так как

$$\sum_l w_l(z) = w(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

достаточно показать, что $w_l(z) \in W^1_p(\overline{D})$ для $\forall l$, или, что эквивалентно, $w_l(z) \in W^1_p(\overline{U}_l)$.

Решение $w(z)$ уравнения (52) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\overline{w} = \partial_{\bar{z}} F(z) \in L_p(\overline{D}),$$

поэтому функция $w_l(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w_l + q_1(z)\partial_z w_l + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\overline{w}_l = F_l(z) \in L_p(\overline{D}), \tag{53}$$

где

$$F_l(z) = \partial_{\bar{z}} F + \partial_{\bar{z}} h_l \cdot (w_l + q_2\overline{w}_l) + q_1 \cdot w_l \cdot \partial_z h_l.$$

Отсюда и из (6) следует, что $w_l(z)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$w_l(z) + T_{U_l}(q_1\partial_z w_l + q_2\partial_{\bar{z}}\overline{w}_l) = T_{U_l}F_l + \Phi_l(z), \tag{54}$$

где
$$\Phi_l(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_l} \frac{w_l(t)dt}{t-z}.$$
Отметим, что если $\operatorname{supp} h_l \cap \Gamma = \varnothing$, то $\Phi_l(z) \equiv 0$, а если $\operatorname{supp} h_l \cap \Gamma \neq \varnothing$, то
$$\Phi_l(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{w_l(t)dt}{t-z}, \tag{55}$$
т.е., в любом случае справедлива формула (55).

В (52), аналогично (34),
$$F(z) = T_D\partial_{\bar z}F(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{w(t)dt}{t-z} \in W_p^1(\overline{D}),$$
т.е., функция
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{w(t)dt}{t-z} \in A_p^1. \tag{56}$$
Отсюда, по лемме 6 $\Phi_l(z) \in A_p^1 \subset C_\beta(\overline{D})$, $\beta = (p-2)/p$.

Обозначим $\zeta = \psi(z)$ конформное отображение области $D_r = U_l$ на единичный круг $G = \{\zeta : |\zeta| < 1\|$, $\partial G = \Gamma^*$, о котором говорится в п. 2.4.1. Если $U_l \cap \Gamma = \varnothing$ — это преобразование подобия (см. замечание 4). Число $\gamma : 0 < \gamma < 1$, $\partial D_r \in C_\gamma^1$, выберем такое, чтобы $\beta + \gamma > 1$ (см. замечание 3).

В дифференциальном уравнении (53) перейдём к аргументу ζ и обозначим $w_l(\zeta) = w_l(\varphi(\zeta))$, где $\varphi = \psi^{-1}$. Уравнение (53) при этом преобразуется в уравнение
$$\partial_{\bar\zeta}w_l + q_1^*(\zeta)\partial_\zeta w_l + q_2^*(\zeta)\partial_{\bar\zeta}\overline{w}_l = F_l^*(\zeta), \tag{57}$$
где
$$\begin{gathered} q_1^*(\zeta) = q_1(\varphi(\zeta)) \cdot \frac{\psi'(\varphi(\zeta))}{\overline{\psi'(\varphi(\zeta))}}; \quad q_2^*(\zeta) = q_2(\varphi(\zeta)); \\ F_l^*(\zeta) = \overline{\varphi'(\zeta)} \cdot F_l(\varphi(\zeta)); \end{gathered} \tag{58}$$
$$|q_1^*(\zeta)| + |q_2^*(\zeta)| \leqslant q_0 = \mathrm{const} < 1; \tag{59}$$
$$q_1^*(\zeta),\, q_2^*(\zeta) \in C(\overline{G}); \quad F_l^*(\zeta) \in L_p(\overline{G}).$$
Аналогично (54), функция $w_l(\zeta)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению
$$w_l(\zeta) + T_G(q_1^*\partial_\zeta w_l + q_2^*\partial_{\bar\zeta}\overline{w}_l) = T_G F_l^*(\zeta) + \Phi_l^*(\zeta), \tag{60}$$
где
$$\Phi_l^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*} \frac{w_l(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_l} \frac{w_l(t)\psi'(t)dt}{\psi(t)-\zeta}. \tag{61}$$
В силу теоремы 6 и $\beta+\gamma>1$ будем иметь:
$$\Psi w_l(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial U_l}\left[\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)-\psi(t)} - \frac{1}{\lambda - t}\right] w_l(\lambda)d\lambda \in C^1_{\beta+\gamma-1}(\partial U_l).$$
Так как из формул Сохоцкого-Племеля [13, гл. 1, §4] имеем
$$\Psi w_l(t) = [\Phi_l^*(\psi(t))]^+ - \Phi_l^+(t), \quad t \in \partial U_L, \tag{62}$$

а $\psi(z) \in C^1_\gamma(\overline{U}_l)$ и $\Phi^+_l(z) \in A^1_p(\overline{D})$, из (62) получаем, что $[\Phi^*_l(\psi(t))]^+ \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial U_l)$, $\Phi^*_l(\psi(z)) \in A^1_p(\overline{U}_l)$ и $\Phi^*_l(\zeta) \in A^1_p(\overline{G})$.

Таким образом, правая часть уравнения (60)

$$F^{**}_l(\zeta) = T_G F^*_l(\zeta) + \Phi^*_l(\zeta) \in W^1_p(\overline{G}). \tag{63}$$

Зафиксируем в $\overline{U}_l = \overline{D}_r$ точку z_l. Для конкретности будем считать, что если U_l — круг, то z_l — его центр; если U_l — прилегающая к Γ область, то $z_l \in \operatorname{supp} h_l \cap \Gamma$.

Обозначим $\zeta_l = \psi(z_l)$ и $\tilde{q}_1 = q^*_1(\zeta_l)$, $\tilde{q}_2 = q^*_2(\zeta_l)$.

Покажем, что величина

$$\varepsilon_l = \max_{\zeta \in \overline{G}} \{|q^*_1(\zeta) - \tilde{q}_1| + |q^*_2(\zeta) - \tilde{q}_2|\}$$

при $r \to \infty$ стремится к нулю равномерно по l (эти подробности пригодятся нам далее).

В обозначениях леммы 5 имеем:

$$\begin{aligned} |q^*_1(\zeta) - \tilde{q}_1| &= |[q_1(z) - q_1(z_l)]\omega(z) + q_1(z_l)|\omega(z) - \omega(z)]| \leqslant \\ &\leqslant |q_1(z) - q_1(z_l)| + 24|z - z_l|^\gamma, \quad z = \varphi(\zeta). \end{aligned} \tag{64}$$

Из $q_1(z)$, $q_2(z) \in C(\overline{D})$, (58) и (64) получаем, что

$$\varepsilon_l \to 0, \quad r \to \infty, \tag{65}$$

равномерно по l.

Перепишем уравнение (60) в виде

$$\Omega^*_1(w_l) + \Omega^*_2(w_l) = F^{**}_l(\zeta), \tag{66}$$

где

$$\Omega^*_1(w_l) = w_l + T_G(\tilde{q}_1 \partial_\zeta w_l + \tilde{q}_2 \partial_{\bar{\zeta}} \overline{w}_l),$$
$$\Omega^*_2(w_l) = T_G[(q^*_1(\zeta) - \tilde{q}_1)\partial_\zeta w_l + (q^*_2(\zeta) - \tilde{q}_2)\partial_{\bar{\zeta}} \overline{w}_l].$$

По лемме 11 оператор Ω^*_1 есть линейный изоморфизм пространства $W^1_p(\overline{G})$ и, очевидно, он непрерывно зависит от чисел $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$. Так как переход к обратному оператору есть операция непрерывная [16, гл. 2, §9], то и $[\Omega^*_1]^{-1}$ есть непрерывная операторнозначная функция переменных $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, определённая на компакте, определяемом неравенством (59). Следовательно, норма обратного оператора $[\Omega^*_1]^{-1}$ ограничена равномерно по $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$.

Для оператора Ω^*_2 из леммы 2 имеем оценку:

$$\|\Omega^*_2(w_l)\|_{W^1_p(\overline{G})} \leqslant \text{const} \cdot \varepsilon_l \cdot \|\partial_\zeta w_l\|_{L_p(\overline{G})} \leqslant \text{const} \cdot \varepsilon_l \cdot \|w_l\|_{W^1_p(\overline{G})}, \tag{67}$$

где const не зависит от r и l.

Перепишем уравнение (66) в виде

$$w_l + [\Omega^*_1]^{-1} \circ \Omega^*_2(w_l) = [\Omega^*_1]^{-1} F^{**}_l \tag{68}$$

и зафиксируем r настолько большим, чтобы

$$\| [\Omega^*_1]^{-1} \| \cdot \text{const} \cdot \varepsilon_l < 1,$$

равномерно по l, т.е., чтобы оператор $[\Omega^*_1]^{-1} \circ \Omega^*_2$ в уравнении (68) был оператором сжатия, действующим из $W^1_p(\overline{G})$ в $W^1_p(\overline{G})$.

После этого мы получаем, что $w_l(\zeta) \in W^1_p(\overline{G})$, а следовательно $w_l(z) \in W^1_p(\overline{U}_l)$ для любого l, и теорема 1 для оператора (25) доказана.

Перейдём к общему случаю. Уравнение (22), согласно лемме 10, имеет единственное решение $w(z) \in W^1_s(\overline{D})$, $s > 2$. Аналогично предыдущему, достаточно показать, что $w(z) \in W^1_p(\overline{D})$.

Перепишем уравнение (22) в виде

$$\Omega_1(w) = F_2(z),$$

где

$$F_2(z) = F(z) - T_D(Aw + B\overline{w}) \in W_p^1(\overline{D}).$$

Отсюда, согласно доказанному частному случаю,

$$w(z) = [\Omega_1]^{-1} F_2(z) \in W_p^1(\overline{D})$$

и теорема 1 полностью доказана.

3.4. Доказательство теоремы 2. Первоначально отдельно рассмотрим случай $k = 0$.

3.4.1. Случай $k = 0$. Для рассмотрения этого случая слегка модифицируем рассуждения п. 3.3.

Сначала докажем утверждение теоремы для оператора Ω_1. Рассмотрим уравнение

$$\Omega_1(w) = F(z) \in C_\alpha^1(\overline{D}), \tag{69}$$

которое по теореме 1 имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D}) \subset C_\beta(\overline{D})$, где $s > 2$ сколь угодно велико, а следовательно $\beta = \dfrac{s-2}{s}$ сколь угодно близко к единице. Как и в п. 3.3, в силу теоремы Банаха достаточно показать, что $w(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$.

Так же, как и в (34),

$$F(z) = T_D \partial_{\bar z} F(z) + \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ представляется формулой (35) и $\Phi(z) \in A_\alpha^1(\overline{D})$.

Как и в п. 3.3 рассмотрим разбиение единицы $\mathcal{H} = \{h_l\}$, функцию $w_l(z) = h_l(z)w(z)$, и покажем, что $w_l(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$ для любого l. Будем считать, что приграничные области $U_l = D_r$ ограничены кривыми класса C_γ^1, где $\beta + \gamma > 1 + \alpha$ (см замечание 3).

Функция $w_l(z)$ удовлетворяет уравнению (53), где $F_l \in C_\alpha(\overline{D})$ и уравнению (54). Аналогично (56), использую лемму 6 и то, что $\Phi(z) \in A_\alpha^1(\overline{D})$, получаем, что $\Phi_l(z) \in A_\alpha^1(\overline{D})$.

Далее перейдём к уравнению (57), в котором $q_1^*(\zeta)$, $q_2^*(\zeta) \in C_\alpha(\overline{G})$, $F_l^*(\zeta) \in C_\alpha(\overline{G})$, и к уравнению (60), в котором, аналогично п. 3.3, из $\beta+\gamma > 1+\alpha$ и теоремы 6 $\Phi_l^*(\zeta) \in A_\alpha^1(\overline{G})$, $F_l^{**}(\zeta) \in C_\alpha^1(\overline{G})$.

Как и в п. 3.3 уравнение (60) переписываем в виде (66). По лемме 11 оператор Ω_1^* есть линейный изоморфизм пространства $C_\alpha^1(\overline{G})$ и обратный опратор $[\Omega_1^*]^{-1}$ ограничен равномерно по $\tilde q_1$ и $\tilde q_2$.

Для оператора Ω_2^*, аналогично (67), из леммы 2 будем иметь:

$$\|\Omega_2^*(w_l)\|_{C_\alpha^1(\overline{G})} \leqslant \mathrm{const} \cdot \tilde\varepsilon_l \cdot \|w_l\|_{C_\alpha^1(\overline{G})}, \tag{70}$$

где

$$\tilde\varepsilon_l = \|q_1^*(\zeta) - \tilde q_1\|_{C_\alpha(\overline{G})} + \|q_2^*(\zeta) - \tilde q_2\|_{C_\alpha(\overline{G})},$$

а const не зависит от r и l.

Покажем, что

$$\tilde\varepsilon_l \to 0, \quad r \to \infty, \tag{71}$$

равномерно по l. Во первых, в силу (65)

$$\|q_i^*(\zeta) - \tilde q_i\|_{C(\overline{G})} \to 0, \quad r \to \infty, \ \ i = 1,\, 2,$$

равномерно по l.

Оценим константы Гёльдера этих разностей. Из $q_i(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, (64) и (20) получаем, что

$$|q_i^*(\zeta_1) - q_i^*(\zeta_2)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2|^\alpha \leqslant \frac{\mathrm{const}}{r^\alpha} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \ i = 1,\, 2,$$

где ζ_1, $\zeta_2 \in \overline{G}$, а const не зависит от r и l. Таким образом, при $r \to \infty$ константы Гёльдера функций $q_i^*(\zeta)-\tilde{q}_i$, $i = 1, 2$, равномерно по l стремятся к нулю и соотношение (71) доказано.

Далее перейдём к уравнению (68). В силу (70), (71) и равномерной ограниченности оператора $[\Omega_1^*]^{-1}$ можно зафиксировать такое большое r, что при любом l оператор $[\Omega_1^*]^{-1} \circ \Omega_2^*$ будет оператором сжатия, действующим из $C_\alpha^1(\overline{G})$ в $C_\alpha^1(\overline{G})$. Зафиксировав такое r, получим $w_l(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$ для $\forall l$ и $w(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$, чем случай $k = 0$ для оператора Ω_1 исчерпан.

Перейдём к оператору Ω (при $k = 0$). Запишем оператор Ω в виде

$$\Omega(w) = \Omega_1(w) + P(w),$$

где $P(w) = T_D(Aw + B\overline{w})$. В силу леммы 2 оператор P непрерывно отображает $C_\alpha(\overline{D})$ в $C_\alpha^1(\overline{D})$ и вполне непрерывен в $C_\alpha(\overline{D})$. Таким образом, оператор Ω непрерывно отображает пространство $C_\alpha^1(\overline{D})$ в себя и, в силу теоремы Банаха, достаточно доказать, что уравнение

$$\Omega(w) = F \in C_\alpha^1(\overline{D})$$

однозначно разрешимо в $C_\alpha^1(\overline{D})$. Перепишем это уравнение в виде

$$w + [\Omega_1]^{-1} \circ P(w) = [\Omega_1]^{-1} F. \tag{72}$$

Оператор $[\Omega_1]^{-1} \circ P$ вполне непрерывен в $C_\alpha(\overline{D})$ и отображает это пространство в $C_\alpha^1(\overline{D})$. Таким образом, решение $w \in C_\alpha(\overline{D})$ однородного уравнения (72) принадлежит классу $C_\alpha^1(\overline{D})$ и по лемме 9 равно нулю. По теореме Фредгольма уравнение (72) имеет единственное решение в классе $C_\alpha(\overline{D})$, которое принадлежит классу $C_\alpha^1(\overline{D})$ и случай $k = 0$ исчерпан полностью.

3.4.2. Регулярность решения во внутренних точках. Для перехода к случаю $k \geq 1$ исследуем регулярность решения во внутренних точках круга D.

Лемма 14. *Если $w(z)$ — финитная в D функция ($\operatorname{supp} w(z) \subset D$) класса $W_s^1(\overline{D})$, $s > 2$, удовлетворяющая уравнению* (1), *в котором*

$$q_1(z),\ q_2(z),\ A(z),\ B(z),\ R(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}), k \geq 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

то $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$.

Замечание 7. *Ясно, что в этом случае $R(z)$ — финитная в D функция.*

Доказательство леммы 14. В силу (6) функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega(w) = T_D R \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$$

и по лемме 9 определена однозначно. Утверждение леммы 14 в случае $k = 0$ — следствие уже доказанной изоморфности оператора Ω в $C_\alpha^1(\overline{D})$.

Рассмотрим случай $k = 1$. Сначала предположим, что $A(z) = B(z) \equiv 0$, т.е., что $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\overline{w} = R(z). \tag{73}$$

Формально продифференцируем (73) по z и перепишем результат, обозначив $\partial_z w(z) = W(z)$:

$$\partial_{\bar{z}} W + q_1\partial_z W + q_2\partial_z\overline{W} + A_1(z)W + B_1(z)\overline{W} = \partial_z R(z) \in C_\alpha(\overline{D}), \tag{74}$$

где

$$A_1(z) = \partial_z q_1(z),\ A_2(z) = \partial_z q_2(z) \in C_\alpha(\overline{D}).$$

Исключив из (74) и комплексно сопряжённого равенства $\partial_z\overline{W}$, получим:

$$\partial_{\bar{z}} W + Q_1\partial_z W + Q_2\partial_{\bar{z}}\overline{W} + A_2(z)W + B_2(z)\overline{W} = R_2(z), \tag{75}$$

где

$$Q_1(z) = \frac{q_1(z)}{1-|q_2(z)|^2},\ Q_2(z) = -\frac{\bar{q}_1 \cdot q_2}{1-|q_2(z)|^2},$$
$$A_2(z) = \frac{A_1 - q_2 \cdot \overline{B}_1}{1-|q_2|^2},\ B_2(z) = \frac{B_1 - q_2 \cdot \overline{A}_1}{1-|q_2|^2}, \tag{76}$$
$$R_2(z) = \partial_z R - q_2 \cdot \partial_{\bar{z}} \overline{R};$$

$Q_1,\ Q_2 \in C^1_\alpha(\overline{D}),\ A_2,\ B_2,\ R_2 \in C_\alpha(\overline{D})$,

$$|Q_1| + |Q_2| \leqslant \mathrm{const} < 1.$$

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$W + T_D(Q_1 \partial_z W + Q_2 \partial_{\bar{z}} \overline{W} + A_2 W + B_2 \overline{W}) = T_D R_2. \tag{77}$$

По доказанному (для $k = 0$) это уравнение имеет единственное решение $W(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$. Покажем, что $W(z)$ — функция, финитная в D.

Из (77) и (6) имеем, что функция $W(z)$ непрерывна, голоморфным образом продолжима из $\overline{D}$ на всю комплексную плоскость и интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{W(t)dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in \overline{D}.$$

и непрерывен на всей плоскости. Это, как уже отмечалось в доказательстве леммы 9, влечёт за собой

$$W(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma. \tag{78}$$

Поскольку функция $R_2(z)$ финитна в D, в некотором кольце $1 - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$, $W(z)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (77). А отсюда и из (78) следует, что в этом кольце $W(z) \equiv 0$ (см. [1, гл. 3, §17]).

Исключая из (75) и комплексно сопряжённого равенства $\partial_{\bar{z}} \overline{W}$, получим, что решение $W(z)$ уравнения (77) удовлетворяет уравнению (74).

Положим

$$w(z) = \overline{T}_D W(z) \in C^2_\alpha(\overline{D}). \tag{79}$$

Аналогично предыдущему устанавливается, что функция $w(z)$ финитна в D. Так как $\partial_z w = W(z)$, соотношение (74) можно переписать в виде

$$\partial_z \left[\partial_{\bar{z}} w + q_1 \partial_z w + q_2 \partial_{\bar{z}} \overline{w} - R\right] = 0,\ z \in \overline{D}. \tag{80}$$

Таким образом, выражение в квадратных скобках в (80) есть антиголоморфная функция, равная нулю на Γ, т.е., это тождественный нуль, а (79) — то самое рассматриваемое нами единственное решение уравнения (73).

В случае $k = 1$ и общего уравнения (1) перепишем его в виде

$$\partial_{\bar{z}} w + q_1(z) \partial_z w + q_2(z) \partial_{\bar{z}} \overline{w} = R_3(z).$$

где $R_3 = R - Aw - B\overline{w} \in C^1_\alpha(\overline{D})$, поскольку по доказанному для $k = 0$ $w \in C^1_\alpha(\overline{D})$. Отсюда и из рассуждений для уравнения (73) получим $w(z) \in C^2_\alpha(\overline{D})$.

Далее проведём индукцию по k. Пусть утверждение леммы 14 верно при $k = n - 1 \geq 1$. Покажем, что тогда оно верно и при $k = n$.

Итак,

$$q_1(z),\ q_2(z),\ A(z),\ B(z),\ R(z) \in C^n_\alpha(\overline{D}),$$

и по предположению индукции $w(z) \in C^n_\alpha(\overline{D})$, $n \geq 2$. Продифференцируем уравнение (1) по z, обозначим $\partial_z w = W$ и исключим из получившегося равенства $\partial_z \overline{W}$. В итоге получим уравнение (в котором уже априори финитная функция W — производная рассматриваемого решения):

$$\partial_{\bar z}W + Q_1(z)\partial_z W + Q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{W} + A_3(z)W + B_3(z)\overline{W} = R_4(z),$$

где $Q_1(z)$, $Q_2(z) \in C^n_\alpha(\overline{D})$ и определяются формулами (76), а $A_3(z)$, $B_3(z)$, $R_4(z) \in C^{n-1}_\alpha(\overline{D})$. Выписать точные формулы для A_3, B_3 и R_4 не составляет труда, но они здесь не нужны.

По лемме 7 $W(z) = \partial_z w(z) \in C^n_\alpha(D)$; с учётом этого, из (1) получаем $\partial_{\bar z}w(z) \in C^n_\alpha(D)$. В силу финитности $w(z) \in C^{n+1}_\alpha(\overline{D})$. Лемма 14 доказана полностью. □

Лемма 15. *Если в уравнении* (1)

$$q_1(z),\ q_2(z),\ A(z),\ B(z),\ R(z) \in C^k_\alpha(\overline{D}), k \geq 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

то любое его решение $w(z) \in W^1_s(\overline{D})$ принадлежит классу $C^{k+1}_\alpha(D)$.

Доказательство леммы 15. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in D$ и круг $D_\varepsilon = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$, $\varepsilon > 0$. Обозначим $h_\varepsilon(z) \in C^\infty(\overline{D})$ финитную функцию, определяемую условиями:

1. $h_\varepsilon(z) \geq 0$;
2. $h_\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & |z - z_0| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & |z - z_0| \geq \dfrac{3\varepsilon}{4}. \end{cases}$

О существовании такой функции см., например, [12, гл. II, § 4].

Очевидно, достаточно показать, что финитная в D функция $w_\varepsilon(z) = h_\varepsilon(z) \cdot w(z) \in C^{k+1}_\alpha(\overline{D})$. Но функция $w_\varepsilon(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar z}w_\varepsilon + q_1(z)\partial_z w_\varepsilon + q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w}_\varepsilon + A_\varepsilon(z)w_\varepsilon + B_\varepsilon(z)\overline{w}_\varepsilon = R_\varepsilon(z),$$

коэффициенты которого и свободный член принадлежат классу $C^k_\alpha(\overline{D})$. Далее применяем лемму 14.

Лемма 15 доказана. □

Замечание 8. *Легко видеть, что в условии леммы 15 на коэффициенты и свободный член достаточно наложить требование принадлежности к $C^k_\alpha(D)$ и рассматривать решение $w(z) \in W^1_s(D)$.*

3.4.3. Случай $k = 1$. Так же, как и выше, нам нужно доказать, что решение $w(z)$ уравнения

$$\Omega(w) = F^*(z) \in C^2_\alpha(\overline{D})$$

принадлежит классу $C^2_\alpha(\overline{D})$.

По доказанному в п. 3.4.1 $w(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$. Перепишем это уравнение в виде:

$$\Omega_1(w) = F(z) \in C^2_\alpha(\overline{D}), \tag{81}$$

где $F(z) = F^*(z) - T_D(A(z)w + B(z)\overline{w}) \in C^2_\alpha(\overline{D})$. Так как $w(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$, в $\overline{D}$ корректно определена функция (47):

$$\frac{\partial w(re^{is})}{\partial s} \equiv w_s(z) = i(zw_z - \bar z w_{\bar z}).$$

В силу леммы 15 $w(z) \in C^2_\alpha(D)$, поэтому $w_s(z) \in C^1_\alpha(D) \cap C_\alpha(\overline{D})$.

Поскольку в силу (81) $w(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar z}w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} = \partial_{\bar z}F(z) \in C^1_\alpha(\overline{D}), \tag{82}$$

аналогично (49) $w_s(z)$ в D удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar z} + q_1(z)\frac{\partial w_s}{\partial z} + q_2(z)\frac{\partial \overline{w}_s}{\partial \bar z} = \widetilde{R}_s(z), \tag{83}$$

где

$$\widetilde{R}_s(z) = 2iq_1(z) + i\bar{z}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \bar{z}} w_z + \frac{\partial q_2}{\partial \bar{z}} \overline{w}_{\bar{z}}\right) - iz\left(\frac{\partial q_1}{\partial z} w_z + \frac{\partial q_2}{\partial z} \overline{w}_{\bar{z}}\right) -$$

$$-i\bar{z}F_{z\bar{z}} + izF_{\bar{z}z} - iF_{\bar{z}} \in C_\alpha(\overline{D}).$$

Так же, как и в (50)

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w_s(t)}{t-z}dt \in C^1_\alpha(\overline{D}).$$

Рассмотрим теперь интегродифференциальное уравнение

$$\Omega_1(W_s) = T_D\widetilde{R}_s + \Phi_s \in C^1_\alpha(\overline{D}).$$

По доказанному в п. 3.4.1 это уравнение имеет единственное решение $W_s(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$, для которого

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{W_s(t)}{t-z}dt.$$

Таким образом, функция $W(z) = w_s(z) - W_s(z) \in C_\alpha(\overline{D}) \cap C^1_\alpha(D)$, удовлетворяет однородному уравнению (83) и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{W(t)}{t-z}dt = 0, \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{84}$$

Из (84) следует, что $W(t)$, $t \in \Gamma$, есть граничные значения голоморфной при $|z| > 1$ функции, равной нулю на бесконечности (см. [13, гл. 1, п. 4.3]). Но это означает, что $W(z) \equiv 0$ [2, теорема 4.5], и $w_s(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$. Отсюда и из формулы (51) (которая, очевидно, справедлива и для непостоянных коэффициентов $q_1(z)$, $q_2(z)$), имеем $w_z \in C^1_\alpha(\overline{D} \setminus \{0\})$, а поскольку $w_z \in C^1_\alpha(D)$, то $w_z \in C^1_\alpha(\overline{D})$ и в силу (82) $w_{\bar{z}} \in C^1_\alpha(\overline{D})$.

Случай $k = 1$ исчерпан.

3.4.4. Случай $k > 1$. Проведём индукцию по k. Итак, пусть утверждение теоремы имеет место при $k = n-1 \geq 1$. Доказательство его справедливости при $k = n$ дословно повторяет рассуждения п. 3.4.3, только везде надо заменить $C^2_\alpha(\overline{D})$ и $C^1_\alpha(\overline{D})$ на $C^{n+1}_\alpha(\overline{D})$ и $C^n_\alpha(\overline{D})$ и, утверждая, что $W_s(z) \in C^n_\alpha(\overline{D})$, сослаться на предположение индукции.

Теорема 2 полностью доказана.

3.5. Доказательство теоремы 3. Рассуждения почти дословно повторяют соответствующие пункты из доказательства теоремы 2. Отметим немногочисленные отличия.

1) Нужно везде заменить классы $C^n_\alpha(\overline{D})$ на $W^n_p(\overline{D})$.

2) Случай $k = 0$ отсутствует.

3) Вместо лемм 14 и 15 используются следующие утверждения.

Лемма 16. *Если $w(z)$ — финитная в D функция ($\operatorname{supp} w(z) \subset D$) класса $W^1_s(\overline{D})$, $s > 2$, удовлетворяющая уравнению (1), в котором*

$$q_1(z),\ q_2(z),\ A(z),\ B(z),\ R(z) \in W^k_p(\overline{D}), k \geq 1,\ p > 2,$$

то $w(z) \in W^{k+1}_p(\overline{D})$.

Лемма 17. *Если в уравнении (1)*

$$q_1(z),\ q_2(z),\ A(z),\ B(z),\ R(z) \in W^k_p(\overline{D}), k \geq 1,\ p > 2,$$

то любое его решение $w(z) \in W^1_s(\overline{D})$ принадлежит классу $W^{k+1}_p(D)$.

Доказательства этих лемм дословно повторяют доказательства лемм 14 и 15 с указанной заменой пространств и тем лишь отличием, что существование решения $w(z) \in W_p^1(\overline{D})$ уравнения (77) следует из теоремы 1 (везде далее также ссылку на рассмотренный случай $k = 0$ нужно заменить ссылкой на теорему 1).

4) При рассмотрении случая $k = 1$ нужно учесть, что $W_p^n(\overline{D}) \subset C_\beta^{n-1}(\overline{D})$, где $n \geq 1$, $\beta = \dfrac{p-2}{p}$, поэтому, в силу теоремы 2, решение уравнения (81) $w(z) \in C_\beta^1(\overline{D})$ и $W(z) = w_s(z) - W_s(z) \in W_p^1(\overline{D}) \cap C_\beta(\overline{D})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщённые аналитические функции.* М.: Физматгиз. 1959. 628 с.
2. Боярский Б.В. *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами* // Математ. сборник. Т. 43, № 4. 1957. С. 451–503.
3. Климентов С.Б. *Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны* // Украинский геометрический сборник. В.29. 1986. С.56–82. Английский перевод: S.B. Klimentov, *On a method of constructing the solutions of boundary-value problems of the theory of bendings of surfaces of positive curvature* // Journal of Mathematical Sciences. Volume 51, Number 2. 1990. Pages 2230–2248.
4. Виноградов В.С. *О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения* // Докл. АН СССР. Т. 241, № 2. 1978. С. 272–274.
5. Виноградов В.С. *О построении регуляризаторов для эллиптических граничных задач на плоскости* // Дифференц. уравнения. Т. 26, № 1. 1990. С. 16–23.
6. S.B. Klimentov *Another version of Kellogg's theorem* // Complex Variables and Elliptic Equations. Vol. 60, № 12. 2015. P. 1647–1657.
7. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* М.: Физматгиз. 1977. 448 с.
8. Климентов С.Б. *О комбинациях диффеоморфных сдвигов окружности и некоторых одномерных интегральных операторов* // Владикавказский математ. журнал. Т. 19, в. 1. 2017. С. 30–40.
9. Агмон , Дуглис А., Ниренберг Л. *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.* М.: Издатинлит. 1962. 205 с.
10. Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.* Новосибирск: Наука. 1977. 424 с.
11. Данилов В.А. *Оценки искажения квазиконформного отображения в пространстве типа* C_α^m // Сибирский математ. журнал. Т. 14, № 3. 1973. С. 525–535.
12. Стернберг С.*Лекции по дифференциальной геометрии.* М.: Мир. 1970. 412 с.
13. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* М.: Наука. 1977. 640 с.
14. Климентов С.Б. *Представления «второго рода» для решений классов Харди уравнения Бельтрами* // Сибирский математ. журнал. Т. 55, № 2. 2014. С. 324–340.
15. Климентов С.Б. *Задача Римана-Гильберта в классах Харди для общих эллиптических систем первого порядка* // Известия вузов. Математика. № 6. 2016. С. 36–47.
16. Наймарк М.А. *Нормированные кольца.* М.: Наука. 1968. 664 с.

Сергей Борисович Климентов,
Южный федеральный университет, ЮМИ ВНЦ РАН,
ул. Мильчакова, 8-а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru