

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ

**В.Ф. ВИЛЬДАНОВА**

**Аннотация.** В известной работе A. Bertozzi, D. Slepcev (2010) установлено существование и единственность решения смешанной задачи для уравнения агрегации

$$u_t - \Delta A(x, u) + \operatorname{div}(u \nabla K * u) = 0,$$

описывающего эволюцию колонии бактерий в ограниченной выпуклой области  $\Omega$ . В данной работе доказывается существование решения и единственность смешанной задачи для более общего уравнения

$$\beta(x, u)_t = \operatorname{div}(\nabla A(x, u) - \beta(x, u)G(u)) + f(x, u).$$

Слагаемое  $f(x, u)$  в уравнении моделирует процессы "рождения – уничтожения" бактерий. Класс интегральных операторов  $G(v)$  достаточно широк и содержит, в частности, операторы свертки  $\nabla K * u$ . Векторное ядро  $g(x, y)$  оператора  $G(v)$  может иметь особенности.

Доказательство единственности решения из работы A. Bertozzi, D. Slepcev опирается на факт сохранения "массы"  $\int_{\Omega} u(x, t) dx = \text{const}$  бактерий и использует выпуклость области и свойства оператора свертки. Наличие в уравнении "неоднородности"  $f(x, u)$  нарушает сохранение "массы". Предложенное в работе доказательство единственности пригодно для неоднородного уравнения, не использует выпуклость области  $\Omega$ .

**Ключевые слова:** Уравнение агрегации, интегро-дифференциальное уравнение, глобальное решение, единственность решения.

**Mathematics Subject Classification:** 35K20, 35K55, 35K65

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие появилось много работ, посвященных исследованию уравнения агрегации

$$u_t = \operatorname{div}(\nabla A(x, u) - u \nabla K * u), \quad K * u = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y) u(y, t) dy, \quad (1)$$

где ядро  $K$  может иметь особенности типа ньютоновского потенциала (см. [1] и имеющиеся там ссылки). Подробный обзор результатов этих исследований занял бы неоправданно много места. Приведем лишь пионерские работы, посвященные уравнению (1).

---

V.F. VIL'DANOVA, ON THE UNIQUENESS OF A WEAK SOLUTION TO INTEGRO-DIFFERENTIAL AGGREGATION EQUATION.

© Вильданова В.Ф. 2018.

Поступила 19 апреля 2018 г.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-01-00428а).

Для моделирования хемотаксиса бактерий в работе [2] была предложена система уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(\nabla u - u\nabla v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ -\Delta v &= u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что при ограниченной функции  $v$  система (2) сводится к одному уравнению вида (1).

В работе [3] система (2) названа системой Смолуховского-Пуассона и использовалась для изучения гравитационного коллапса облака самогравитирующих частиц. Эта же система в работе [4] названа Chavanis-Sommeria-Robert моделью со ссылкой на работу [5].

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  с границей класса  $C^1$ . Рассмотрим в цилиндрической области  $D^T = \Omega \times (0, T)$  уравнение

$$\beta(x, u)_t = \operatorname{div}(\nabla A(x, u) - \beta(x, u)G(u)) + f(x, u) \quad (3)$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$(\nabla A(x, u) - \beta(x, u)G(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (5)$$

где  $\nu$  — вектор внешней нормали. Интегральный оператор

$$G(v) = (G_1(v), G_2(v), \dots, G_n(v))$$

определяется формулами

$$G_i(v) = \int_{\Omega} g_i(x, y)b(v(y))dy.$$

Целью работы является доказательство существования и единственности слабого решения задачи (3)–(5) в цилиндре  $D^T$ , высота которого определяется данными задачи.

В работе [6] было доказано существование и единственность слабого решения задачи (1),(4) с краевым условием

$$(\nabla A(x, u) - u\nabla K * u) \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T)$$

в случае, когда ядро  $K$  принадлежит  $C^2(\mathbb{R}^n)$ . В более ранней работе [7] были установлены существование и единственность решения этой же задачи в случае  $A = A(u) \in C^1[0, \infty]$  и выпуклой области  $\Omega$ . Но доказательство существования решения в этой работе содержит пробел. В работе [7] рассмотрены также задача Коши и задача с периодическим краевым условием.

В известных автору работах функция  $A(x, u)$  возрастает по  $u$  и среди степенных функций  $A(x, u) = u^m$  охвачен только случай  $m \geq 1$ . Отметим, что замена  $v = u^m$  в уравнении (1) с  $A(x, u) = u^m$  приводит к уравнению вида (3) и позволяет таким образом доказать существование решения в случае  $m \in (0, 1)$  (см. теорему 3 в пункте 2, вытекающую из результатов работы [8].)

В работе [8] было доказано существование слабого решения смешанной задачи в  $D^T$  для уравнения

$$\beta(x, u)_t = \operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) - \beta(x, u)G(u)) + f(x, u) \quad (6)$$

с начальным условием (4) и краевым условием

$$(a(x, u, \nabla u) - \beta(x, u)G(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (7)$$

Высота  $T$  цилиндра  $D^T$  определяется функциями, входящими в постановку задачи. Этот результат подробно цитируется в пункте 2.

Наличие нелокальности в уравнении (3) не позволяет использовать метод удвоения переменных С.Н. Кружкова, примененный в работе [9] для доказательства единственности ренормализованного решения смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нелинейностью.

Более полный обзор работ по уравнению агрегации можно найти в работе [6].

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагается, что  $\beta(x, r)$ ,  $f(x, r)$ ,  $A(x, r)$  – каратеодориевы функции. Функция  $A(x, u) \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ ,  $A(x, u) \geq 0$ , имеет положительную производную  $A_u$ ,

$$A_u(x, u) > a_0 > 0, \quad x \in \Omega, \quad u > 0, \quad (8)$$

$$(A(x, u) - A(x, v))(\beta(x, u) - \beta(x, v)) \geq a_0(u - v)^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_+. \quad (9)$$

Опишем условия на функции, входящие в интегральный оператор  $G(v)$ :  $g_i(x, y) \in C^1(P)$ ,  $P = \{(x, y) : x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y\}$ . Предполагается, что при некотором  $\lambda < n$  выполняются неравенства:

$$\sum_{i=1}^n |(g_i(x, y))_{x_i}| + |g_i(x, y)| \leq C(1 + |x - y|^{-\lambda}), \quad (x, y) \in P; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \nu_i g_i(x, y) \leq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \quad (11)$$

Функции  $f(x, s)$ ,  $b(s)$ ,  $f(x, 0) = 0$ ,  $b(0) = 0$ , удовлетворяют условию Липшица :

$$|f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leq L_r |s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in [0, r], \quad \forall r > 0, \quad (12)$$

$$|b(s_1) - b(s_2)| \leq L_k |s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in [0, k], \quad \forall k > 0. \quad (13)$$

Из условия  $\lambda < n$  следует, что найдется число  $\bar{q} > 1$  такое, что  $\lambda < \frac{n}{\bar{q}}$ . Зафиксируем сопряженные числа  $q, \bar{q}$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$ .

Слабое решение определяется следующим образом:

**Определение 1.** Функция  $u : D^T \rightarrow [0, \infty)$ ,  $u \geq 0$ , называется слабым решением задачи (3)- (5), если  $u \in L_\infty(D^T)$ ,  $\beta(x, u) \in L_\infty(0, T; L_q(\Omega))$ ,  $A(x, u) \in L_2(0, T; H^1(\Omega))$  и для всех липшицевых функций  $\xi \in Lip(\bar{D}^T)$  таких, что  $\xi(T) = 0$  выполнено равенство

$$\int_{D^T} (-\beta(x, u)\xi_t + (\nabla A(x, u) - \beta(x, u)G(u)) \cdot \nabla \xi - f(x, u)\xi) dx dt = \int_{\Omega} u_0(x)\xi(x, 0) dx. \quad (14)$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (8)–(13). Пусть существует неотрицательное решение задачи (3)–(5). Тогда оно единственно.

Мы будем использовать следующие утверждения об оценках интегралов типа потенциалов (см., например, [10, гл. I, §6]).

**Лемма 1.** Если  $\lambda < \frac{n}{q} (\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1)$ ,  $1 < q < \infty$ ,  $f(x) \in L_q(\Omega)$ , то функция

$$v(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)dy}{|x-y|^\lambda}$$

непрерывна в  $\mathbb{R}^n$  и удовлетворяет неравенству

$$|v(x)| \leq C \|f\|_{q,\Omega}.$$

**Лемма 2.** Пусть область  $\Omega$  ограничена и  $\lambda < n$ ,  $f(x) \in L_2(\Omega)$ . Тогда функция

$$v(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)dy}{|x-y|^\lambda}$$

суммируема со степенью 2 и имеет место неравенство

$$\|v(x)\|_{2,\Omega} \leq C \|f\|_{2,\Omega}.$$

Пусть  $M_0 = \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}$  и  $M_T > M_0$  – произвольное число. Выведем некоторые оценки для интегрального оператора  $G(v)$ . Рассмотрим измеримую функцию  $v(x)$ ,  $|v(x)| \leq M_T$ . Из леммы 1 и условий (10), (13) следует, что

$$G(v) \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad |G(v)(x)| \leq C_G, \quad |\nabla G(v)(x)| \leq d_G, \quad x \in \Omega. \quad (15)$$

Приведем утверждение (см. [8]) о существовании решения задачи (6), (4), (7).

Ниже переменные показатели нелинейностей  $p_i(x)$ , удовлетворяют условию

$$|p_i(x) - p_i(y)| \leq \frac{C}{-\ln|x-y|}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

при  $|x-y| \leq 1/2$ ,  $x, y \in \overline{\Omega}$ . Приведем условия из работы [8] на функции, входящие в уравнение (6). Функция  $\beta(x, r)$  нечетная по  $r \in \mathbb{R}$  и при некоторых  $M_0, M_T$  удовлетворяет условиям

$$s\beta(x, r) \leq r\beta(x, s), \quad \text{при } 0 < M_0 \leq r < s \leq M_T, \quad x \in \Omega; \quad (17)$$

$$\beta(x, M_T) \in L_q(\Omega), \quad \text{где } q \geq \max_j(\overline{p}_j(x)), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

$$|\nabla\beta(x, r)| \leq N_g |\beta(x, r)|, \quad r \in [0, M_T], \quad x \in \Omega. \quad (19)$$

Функция  $q_1(x, r)$  определяется равенством  $f = \beta(x, r)q_1(x, r)$  и ограничена

$$|q_1(x, r)| \leq q_0, \quad \text{при } |r| \leq M_T. \quad (20)$$

Функции  $a_i(x, r, y)$  непрерывны по  $r \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$  и измеримы по  $x \in \Omega$ . Существуют функция  $F(x) \in L_1(\Omega)$  и непрерывная функция  $C(m)$ ,  $m \geq 0$ , такие, что

$$|a_j(x, r, y)|^{\overline{p}_j(x)} \leq C(m)(F(x) + \sum_{i=1}^n |y_i|^{p_i(x)}), \quad (21)$$

при всех  $r \in [-m, m]$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \Omega$ .

Условия монотонности и коэрцитивности предполагаются в следующем виде:

$$(a(x, r, y) - a(x, r, z)) \cdot (y - z) \geq 0, \quad y \neq z; \quad (22)$$

$$a(x, r, y) \cdot y \geq \delta_0 \sum_{i=1}^n |y_i|^{p_i(x)} - F(x), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega. \quad (23)$$

Функция  $B(x, r)$  определяется равенством  $B(x, r) = \int_0^r s d_s \beta(x, s)$ , возрастает по  $r$  и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq B(x, r) \leq r\beta(x, r), \quad r \geq 0.$$

Поэтому  $B(x, M_T) \in L_q(\Omega)$ .

**Теорема 2.** (см. [8]). Пусть выполнены условия (10), (11), (13), (16)–(23),  $0 \leq u_0(x) \leq M_0$ . Тогда существует  $T = T(M_0, M_T, q_0, d_G, N_g)$  и слабое решение задачи (6), (4), (7) такое, что  $0 \leq u(x, t) \leq M_T$ .

Мы не приводим здесь определение слабого решения задачи (6), (4), (7), поскольку оно стандартное и для рассматриваемой в работе задачи (3)–(5) совпадает с Определением 1.

Следующее утверждение является следствием теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (8), (10), (11), (13), (17)–(20) и  $0 \leq u_0(x) \leq M_0$ . Тогда существует слабое решение задачи (3)–(5) в цилиндре  $D^T$ ,  $T = T(M_0, M_T, q_0, d_G, N_g)$ .

Очевидно, что задача (3)–(5) является частным случаем задачи (6), (4), (7). Поэтому достаточно убедиться, что условия теоремы 3 обеспечивают выполнение условий теоремы 2. Для уравнения (3) функции  $a_j$  имеют вид  $a_j = A_u u_{x_j} + A_{x_j}$ , поэтому условие (21) выполнено при  $p_j = 2$  в силу условия гладкости функции  $A(x, u)$ . Условия (22) и (23) также выполнены в силу (8) и ограниченности  $u$ .

В качестве важного примера рассмотрим в  $D^T$  уравнение

$$u_t = \operatorname{div}(\nabla u^m - u \nabla K * u), \quad m \in (0, 1),$$

где ядро  $K$  удовлетворяет условию

$$\nabla_x^2 K(x, y) \leq C(1 + |x - y|^{-\lambda}), \quad (x, y) \in P, \quad \lambda < n.$$

Замена  $v = u^m$  приводит к уравнению

$$(v^{\frac{1}{m}})_t = \operatorname{div}(\nabla v - u \nabla K * v^{\frac{1}{m}})$$

вида (3). По теореме 3 устанавливаем, что соответствующая задача имеет слабое решение при  $m \in (0, 1)$  (но его единственность мы не утверждаем).

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Установим вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.** Пусть функция  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  – слабые решения задачи (3)–(5),  $N(t) = \int_{\Omega} |u(x, t) - v(x, t)| dx$ ,  $s(t) = \int_{\Omega} (\beta(x, u(x, t)) - \beta(x, v(x, t))) dx$ .

Тогда при всех  $\tau \in [0, T]$

$$\int_0^{\tau} s^2(t) dt \leq L_r^2 \tau^2 \int_0^{\tau} N^2(t) dt$$

и

$$\int_0^{\tau} s^2(t) dt \leq C(\Omega) \tau^2 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u(x, t) - v(x, t)|^2 dx dt,$$

где  $r = \|u + v\|_{L_{\infty}(D^T)}$ ,  $L_r$  – константа из (12).

*Доказательство.* Запишем соотношение (14) для функции  $v$ , вычтем его из (14), получим

$$\int_0^T \int_{\Omega} ((\beta(x, v) - \beta(x, u))\xi_t + (\nabla A(x, u) - \nabla A(x, v) + \beta(x, v)G(v) - \beta(x, u)G(u)) \cdot \nabla \xi) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (f(x, u) - f(x, v))\xi dx dt. \quad (24)$$

Подставляя в сюда  $\xi = \xi(t) \in C_0^\infty(0, T)$  получаем, что

$$\int_0^T \xi'(t) \int_{\Omega} (\beta(x, u) - \beta(x, v)) dx dt = \int_0^T \xi(t) \int_{\Omega} (f(x, v) - f(x, u)) dx dt.$$

Это значит, что функция  $s(t)$  абсолютно непрерывна по  $t$ . Поэтому, чтобы завершить доказательство леммы, достаточно подставить в (24) функцию

$$\xi(t) = \int_t^\tau s(r) dr, \quad t \in [0, \tau], \quad \xi(t) = 0, \quad t > \tau.$$

В силу (12), имеем по неравенству Стеклова-Фридрикса

$$\int_0^\tau s^2(t) dt \leq \int_0^\tau L_r N(t) |\xi(t)| dt \leq L_r \tau \left( \int_0^\tau N^2(t) dt \int_0^\tau s^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Отсюда легко следуют неравенства леммы.  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $u$  и  $v$  решения задачи (3)–(5). Определим функцию  $\phi(x, t)$  при фиксированном  $t \in (0, T)$  как решение задачи Неймана

$$\Delta \phi(x, t) = \beta(x, u(x, t)) - \beta(x, v(x, t)) - \bar{s}(t), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad (25)$$

где  $\bar{s}(t) = \frac{s(t)}{\text{meas} \Omega}$ . Условием разрешимости этой задачи является ортогональность в  $L_2(\Omega)$  правой части уравнения решениям однородного уравнения (см., например, [11, гл. II, теорема 5.2]). Решениями задачи для однородного уравнения являются только константы. Согласно лемме 3 имеем равенство

$$\int_{\Omega} (\beta(x, u(x, t)) - \beta(x, v(x, t)) - \bar{s}(t)) dx = 0,$$

то есть условие разрешимости задачи Неймана выполнено. Можно считать при этом, что  $\int_{\Omega} \phi(x, t) dx = 0$ . Отметим, что  $\phi(x, 0) = 0$ . Поскольку

$$(\beta(x, u(x, t)) - \beta(x, v(x, t))) \in L_\infty(0, T; L_q(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

то  $\phi \in L_\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega))$  (см., напр., [11], гл. II, (5.4)). Тогда  $\nabla \phi \in C(0, T; L_2(\Omega))$  и выполнено равенство

$$- \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} (\beta(x, u(x, t)) - \beta(x, v(x, t)) - \bar{s}(t)) w(x) dx, \quad (26)$$

при любом  $w \in W_2^1(\Omega)$ .

Преобразуем уравнение (24). Обозначим

$$P(x, t) = \nabla A(x, u) - \nabla A(x, v) + \beta(x, v)G(v) - \beta(x, u)G(u).$$

Из Определения 1 следует, что  $P \in L_2(D^T)$ . Положим  $F(x, t) = f(x, u) - f(x, v) \in L_2(D^T)$ . Подставим в (24)  $\xi = \varphi_{-h} = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \varphi(x, r) dr$ , где  $\varphi \in C^\infty(\overline{D^T})$ ,  $\varphi = 0$  при  $t \geq T - \delta$ . Учитывая (26), получим

$$\int_{D^T} (\nabla \phi \cdot \nabla (\varphi_{-h})_t - \bar{s}(t) (\varphi_{-h})_t + P \cdot \nabla \varphi_{-h} - F \varphi_{-h}) dx dt = 0.$$

Пользуясь свойством осреднения Стеклова, перепишем это в виде

$$\int_{D^T} (-(\nabla \phi_h)_t \cdot \nabla \varphi - (\bar{s}_h)_t \varphi + P_h \cdot \nabla \varphi - F_h \varphi) dx dt = 0.$$

Пусть  $\chi_{(0, \tau)}$  – характеристическая функция интервала  $(0, \tau)$ . Подставим в последнее соотношение  $\varphi = \chi(0 < t < \tau) \phi_h$  и перейдем к пределу при  $h \rightarrow 0$ . Получим

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi(\tau)|^2 + \int_0^\tau \int_{\Omega} (-\bar{s}_t \phi + P \cdot \nabla \phi - F \phi) dx dt = 0.$$

Учитывая, что  $\int_{\Omega} \phi(x, t) dx = 0$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi(\tau)|^2 dx &= \int_0^\tau \int_{\Omega} \nabla (A(x, u) - A(x, v)) \cdot \nabla \phi dx dt - \\ &- \int_0^\tau \int_{\Omega} (G(u) \beta(x, u) - G(v) \beta(x, v)) \cdot \nabla \phi dx dt - \\ &- \int_0^\tau \int_{\Omega} (f(x, u) - f(x, v)) \phi dx dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку  $A(x, u) - A(x, v) \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$  и функция  $A$  возрастает по второму аргументу, то пользуясь (26) и леммой 3, учитывая (9), можно записать соотношения

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^\tau \int_{\Omega} (A(x, u) - A(x, v)) (\beta(x, u) - \beta(x, v) - \bar{s}(t)) dx dt \leq \\ &\leq - \int_0^\tau \int_{\Omega} (a_0(u - v)^2 - A_M |(u - v) \bar{s}(t)|) dx dt \\ &\leq \int_0^\tau \int_{\Omega} (C\tau - a_0)(u - v)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Перепишем интеграл  $I_2$  в виде:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^\tau \int_\Omega (G(u)\beta(x, u) - G(v)\beta(x, v)) \cdot \nabla \phi dx dt = \\ &\quad - \int_0^\tau \int_\Omega (\beta(x, u) - \beta(x, v))G(u) \cdot \nabla \phi dx dt + \\ &\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \beta(x, v)(G(u) - G(v)) \cdot \nabla \phi dx dt = I_4 + I_5 \end{aligned}$$

Используя (26) для первого слагаемого, получим

$$I_4 = \int_0^\tau \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla(G(u) \cdot \nabla \phi) dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega \bar{s}(t)G(u) \cdot \nabla \phi dx dt = I_{41} + I_{42}.$$

По лемме 3 имеем оценку

$$I_{42} \leq C\tau \|u - v\|_{L_2(D_0^\tau)} \|\nabla \phi\|_{L_2(D_0^\tau)},$$

где  $D_0^\tau = \Omega \times (0, \tau)$ . Далее,

$$\begin{aligned} I_{41} &= \int_0^\tau \int_\Omega \partial_i \phi(x) \partial_j \phi(x) \int_\Omega \partial_i g_j(x, y) b(u(y, t)) dy dx dt + \\ &\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \partial_i \phi(x) \partial_i \partial_j \phi(x) \int_\Omega g_j(x, y) b(u(y, t)) dy dx dt = I_6 + I_7. \end{aligned}$$

Применим формулу Гаусса – Остроградского к интегралу  $I_7$  :

$$\begin{aligned} I_7 &= - \int_0^\tau \int_\Omega \partial_j \partial_i \phi(x) \partial_i \phi(x) \int_\Omega g_j(x, y) b(u(y, t)) dy dx dt - \\ &\quad - \int_0^\tau \int_\Omega \partial_i \phi(x) \partial_i \phi(x) \int_\Omega \partial_j g_j(x, y) b(u(y, t)) dy dx dt + \\ &\quad + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \partial_i \phi(x) \partial_i \phi(x) \nu_j \int_\Omega g_j(x, y) b(u(y, t)) dy dS dt. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (11), получаем

$$I_7 \leq -\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \int_\Omega \partial_j g_j(x, y) b(u(y, t)) dy dx dt.$$

Используя условия (10), (13), оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\partial_i g_j(x, y) b(u(y, t))| dy &\leq \int_\Omega C(1 + |x - y|^{-\lambda}) |b(u(y, t))| dy \leq \\ &\leq C \|u_0\|_{L_1(\Omega)} + C \int_\Omega \frac{|b(u(y, t))|}{|x - y|^\lambda} dy \leq C(M_T). \end{aligned}$$

Имеем

$$I_6 \leq C(M_T) \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx dt.$$

Полученные оценки для  $I_6$  и  $I_7$  подставим в  $I_4$  :

$$I_4 \leq \int_0^\tau \int_\Omega (C|\nabla \phi|^2 + \tau^2(u-v)^2) dx dt. \quad (29)$$

Используя условия (10), (13) и лемму 2 устанавливаем неравенства

$$\|G_j(u(t)) - G_j(v(t))\|_{L_2(\Omega)} < C(\Omega)\|u(t) - v(t)\|_{L_2(\Omega)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом

$$I_5 \leq C \int_0^\tau \|u(t) - v(t)\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \phi(t)\|_{L_2(\Omega)} dt.$$

Тогда

$$I_5 \leq C(\tau) \int_0^\tau \|\nabla \phi(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \tau \int_0^\tau \int_\Omega (u-v)^2 dx dt.$$

Полагая  $\eta(t) = (\int_\Omega |\nabla \phi(t)|^2 dx)^{1/2}$ , получаем из (27) с использованием предыдущих оценок

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\eta^2(\tau) + (a_0 - C(\tau + \tau^2)) \int_0^\tau \int_\Omega (u-v)^2 dx dt \\ & \leq C \int_0^\tau \eta^2(t) dt + \int_0^\tau \int_\Omega |(f(x, u) - f(x, v))\phi| dx dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя условие (12) для функции  $f(x, u)$  и неравенство Пуанкаре устанавливаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega |f(x, u) - f(x, v)| |\phi| dx dt \leq \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_\Omega (u-v)^2 dx dt + \frac{L_r^2}{a_0} \int_0^\tau \int_\Omega |\phi|^2 dx dt \leq \\ & \leq \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_\Omega (u-v)^2 dx dt + \frac{C_1 L_r^2}{a_0} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Поэтому из (30), (31) при достаточно малом  $\tau$  следует, что

$$\eta^2(\tau) \leq C_2 \int_0^\tau \eta^2(t) dt.$$

Отсюда, с помощью неравенства Гронуолла выводим, что  $\eta(t) = 0$  для всех  $0 \leq t \leq \tau$ . Поэтому  $u \equiv v$  в цилиндре  $\Omega \times (0, \tau)$ . Аналогично устанавливается тождество  $u \equiv v$  в цилиндре  $\Omega \times (\tau, 2\tau)$  и т.д. Теорема 1 полностью доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carrillo J.A., Hittmeir S., Volzone B., Yao Y. *Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics* // arxiv:1603.07767v1[math.ap], (2016). 47 p.
2. Keller E.F., Segel L.A. *Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability* // J. Theor. Biol., 26(1970). P. 399-415.
3. Chavanis P.H., Rosier C., Sire C. *Thermodynamics of self-gravitating systems* // arxiv:cond-mat/0107345v3[cond-mat.stat-mech], (2002). 36 p.
4. Biler P., Nadzieja T. *Global and exploding solutions in a model of self-gravitating systems* // Reports on mathematical physics, 52:2(2003). P. 205-225.
5. Chavanis P.H., Sommeria J. and Robert R. *Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems*// J. Astrophys. 471 (1996). P. 385-399.
6. Вильданова В.Ф. *Существование и единственность слабого решения нелокального уравнения агрегации с вырождающейся диффузией общего вида*// Матем. сб., 209:2 (2018). С. 66–81.
7. Bertozzi A., Slepcev D. *Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion* // Comm. Pur. Appl. Anal., 9:6 (2010). P. 1617-1637
8. Вильданова В.Ф., Мукминов Ф.Х. *Существование слабого решения интегро-дифференциального уравнения агрегации*// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 63:4 (2017). С. 557–572.
9. Мукминов Ф.Х. *Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева–Орлича*// Матем. сб., 208:8 (2017), С. 106–125.
10. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука. 1988. 333 с.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М.: Мир. 1971. 372 с.

Венера Фидарисовна Вильданова  
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акумуллы,  
ул. Октябрьской революции, За  
450000, г. Уфа, Россия  
E-mail: gilvenera@mail.ru