ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 77-84.

УДК 517.956

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ВЫРОЖДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

А.Б. МУРАВНИК

Аннотация. Мы рассматриваем задачу Коши для квазилинейных параболических уравнений вида $\rho(x)u_t = \Delta u + g(u)|\nabla u|^2$, где положительный коэффициент ρ допускает вырождение на бесконечности, а коэффициент g может быть непрерывной функцией, а может допускать степенные особенности не выше первой степени. Указанные нелинейности, называемые нелинейностями Кардара—Паризи—Жанга (или KPZ-нелинейностями), возникают в различных приложениях (в частности, в задачах о направленном росте полимеров и задачах помехоустойчивости). Кроме того, они представляют и самостоятельный теоретический интерес, поскольку содержат производную неизвестной функции во второй степени, а это — максимальный (предельный) показатель, при котором условия бернштейновского типа для соответствующей эллиптической задачи обеспечивают получение априорных L_∞-оценок первых производных решения через L_∞-оценку самого решения. Асимптотические свойства решений параболических уравнений с подобными нелинейностями исследовались и ранее, но только для случая равномерно параболической линейной части. Вырождение коэффициента ρ (хотя бы и на бесконечности) качественно изменяет природу задачи, что и показывает исследование качественных свойств (классических) решений указанной задачи Коши. Мы находим условия на коэффициент ρ и начальную функцию, гарантирующие следующее поведение указанных решений: существует такая (предельная) липшицева функция $A(t)$, что при любом положительном t обобщенное сферическое среднее решения стремится к указанной липшицевой функции при стремлении радиуса сферы к бесконечности. Обобщенное сферическое среднее строится следующим образом: вначале к решению применяется некоторая монотонная функция, определяемая (как в регулярном, так и в сингулярном случае) только коэффициентом при нелинейности, а затем вычисляется среднее по $(n-1)$-мерной сфере с центром в начале координат (в линейном случае такое среднее закономерно обращается в классическое сферическое среднее). Для построения указанной монотонной функции применяется метод Бицадзе, позволяющий выражать решения исследуемых квазилинейных уравнений через решения некоторых полулинейных уравнений.

Ключевые слова: параболические уравнения, KPZ-нелинейности, асимптотические свойства, вырождение на бесконечности.

Mathematics Subject Classification: 35K59, 35K65

A.B. Muravnik, On qualitative properties of solutions to quasilinear parabolic equations admitting degenerations at infinity.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг. а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 17-01-00401.

Поступила 21 июля 2017 г.

1. Введение

Уравнения вида $\rho(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, где $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ (равно как и параболические уравнения гораздо более общего вида), можно в настоящее время считать вполне классическим объектом: построена и глубоко развита их полная теория, показывающая, что эти уравнения в значительной степени наследуют свойства их модельного объекта — уравнения теплопроводности. Это касается как вопросов корректности краевых задач для указанных уравнений, так и качественных свойств их решений, включая те специфические свойства, которые обусловливают принципиальные отличия параболических уравнений от уравнений любого другого типа.

Ситуация существенно меняется, если ослабить условие, наложенное на коэффициент ρ: даже если всего лишь заменить его положительную определенность на (глобальную) строгую положительность, коэффициент получит возможность вырождаться на бесконечности (оставаясь, тем не менее, строго положительным в каждой точке). В этом случае уравнение может оставаться параболическим в каждой точке (и даже равномерно параболическим в каждой ограниченной области), но, например, задача Коши во всем полупространстве (т. е. важнейший тип задач для параболической теории) уже не будет классической — уравнение будет терять тип на бесконечности. По той же причине не гарантировано и сохранение асимптотических свойств решений, характерных для классической параболической теории.

К настоящему времени исследование параболических уравнений с коэффициентами, вырождающимися на бесконечности, далеко не полно, однако для линейного случая в [1] получены важные результаты. В частности, получены аналоги классических результатов о стабилизации решений, хотя эти результаты имеют принципиальные отличия от случая равномерно параболических уравнений (например, стабилизация доказана для сферических средних от решений, а не для самих решений).

В настоящей работе указанные исследования распространяются на случай некоторых квазилинейных уравнений, а именно, на уравнения, содержащие квадрат градиента неизвестной функции. Такие нелинейности, называемые нелинейностями Кардара—Паризи—Жанга (или KPZ-нелинейностями), возникают в различных приложениях (см., напр., [2]–[14]), а также представляют и самостоятельный теоретический интерес: они содержат производную неизвестной функции во второй степени, а это, как известно (см., напр., [15]-[16]), максимальный (предельный) показатель, при котором условия бернштейновского типа для соответствующей эллиптической задачи обеспечивают получение априорных L_∞-оценок первых производных решения через L_∞-оценку самого решения.

Асимптотические свойства решений параболических и эллиптических уравнений с KPZ-нелинейностями (включая сингулярные уравнения) изучались в [17]–[24], однако случай вырождения на бесконечности ранее не исследовался.

Значительная часть результатов настоящей работы докладывалась на Международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл.-корр. АН СССР А. Ф. Леонтьева (Уфа, май 2017 г.). Автор признателен участникам конференции за полезные обсуждения, способствовавшие лучшему пониманию полученных результатов и улучшению их изложения.

Автор выражает глубокую благодарность А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе и В. Н. Денисову за ценные замечания.

2. Случай регулярных коэффициентов

Пусть $n \geq 3$, ρ и u_0 — функции, определенные в $\mathbb{R}^n$, причем ρ положительна, а функция g непрерывна на вещественной оси. Предположим, что ограниченная функция $u(x,t)$

удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(u)|\nabla u|^2,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0, +\infty), \tag{1}$$

и начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Следуя [25], определим на вещественной оси функцию f следующим образом:

$$f(s) = \int_0^s e^{\int_0^x g(\tau)d\tau} dx. \tag{3}$$

Тогда

$$f'(s) = e^{\int_0^s g(\tau)d\tau} > 0,$$

т. е. введенная функция f строго монотонна, и

$$f''(s) = g(s)e^{\int_0^s g(\tau)d\tau},\ \text{т. е. } g(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}.$$

Теперь обозначим функцию $f[u(x,t)]$ через $v(x,t)$ и вычислим

$$\rho(x)\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \rho(x)f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left[f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] =$$

$$= \rho(x)f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 - \sum_{j=1}^n f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} =$$

$$= f'(u)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - f''(u)|\nabla u|^2 - f'(u)\Delta u =$$

$$= f'(u)\left[\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f''(u)}{f'(u)}|\nabla u|^2 - \Delta u\right] = f'(u)\left[\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - g(u)|\nabla u|^2\right] = 0.$$

Значит, функция $v(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0, +\infty). \tag{4}$$

Кроме того, функция $v(x,t)$ ограничена в силу непрерывности функции g и ограниченности функции u, а ее след на гиперплоскости $\{t = 0\}$ равен ограниченной на вещественной оси функции $f[u_0(x)] \stackrel{\text{def}}{=} v_0(x)$.

Теперь, следуя [1], определим в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ функцию $V(x,t) = \int\limits_0^t v(x,\tau)d\tau$ и наложим на функции ρ и u_0 следующие условия:

- уравнение Пуассона с правой частью $-\rho(x)$ имеет решение, ограниченное в $\mathbb{R}^n$;
- существует такая константа $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$, что $\rho \in C^{\varkappa+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $f(u_0) \in C^{\varkappa}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда, в силу [1, Th 1.1], существует такая липшицевая на $[0, +\infty)$ функция A, что соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{|x|=R} V(x,t)d\sigma_x = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} A(t)$$

выполняется для каждого положительного t, а соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{|x|=R} [V(x,t) - A(t)]d\sigma_x = 0$$

выполняется равномерно относительно t из $[0,T]$ для любого положительного T.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ — классическое ограниченное решение задачи Коши для уравнения (1), где коэффициент g непрерывен, а коэффициент $\rho(x)$ и начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

(i) *уравнение $\Delta w + \rho(x) = 0$ имеет решение, ограниченное в $\mathbb{R}^n$;*
(ii) *существует такая константа $\varkappa$, $0<\varkappa<1$, что $\rho \in C^{\varkappa+1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $f(u_0)\in C^{\varkappa}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Тогда существует такая липшицевая на $[0,+\infty)$ функция A, что соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}\int\limits_0^t f[u(x,\tau)]d\tau d\sigma_x = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}A(t)$$

выполняется для любого положительного t, а соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}\left(\int\limits_0^t f[u(x,\tau)]d\tau - A(t)\right)d\sigma_x = 0$$

выполняется равномерно относительно t из $[0,T]$ для любого положительного T.

3. Случай сингулярных коэффициентов

В уравнении (1) положим

$$g(s)=\alpha s^{\beta}, \tag{5}$$

где $\beta\in(-1,0)$, α — произвольный вещественный параметр. В этом случае условия теоремы 1 не выполнены (коэффициент при нелинейности имеет особенность в начале координат), однако функция (3) по-прежнему определена:

$$f(s)=\int\limits_0^s e^{\int\limits_0^x \alpha\tau^{\beta}d\tau}dx = \int\limits_0^s e^{\frac{\alpha}{\beta+1}x^{\beta+1}}dx.$$

Отсюда следует, что $f'(s)=e^{\frac{\alpha}{\beta+1}s^{\beta+1}}>0$, а значит, f — строго монотонная функция. Далее, $f''(s)=\alpha s^{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta+1}s^{\beta+1}}$, следовательно, $g(s)=\dfrac{f''(s)}{f'(s)}$.

Предположим, что ограниченная положительная функция $u(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) с коэффициентом g, определенным формулой (5). Тогда, точно так же, как и в разделе 2, обозначая функцию $f[u(x,t)]$ через $v(x,t)$, непосредственной подстановкой убеждаемся, что она удовлетворяет уравнению (4). Кроме того, в силу ограниченности функции $u(x,t)$ и строгой положительности показателя $\beta+1$ функция $v(x,t)$ ограничена:

$$|f[u(x,t)]|\le \sup|u|e^{\frac{|\alpha|}{\beta+1}(\sup|u|)^{\beta+1}}.$$

Значит, [1, Th 1.1] применима и в этом случае. Тем самым справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть $u(x,t)$ — классическое ограниченное положительное решение задачи Коши для уравнения (1), где коэффициент g определен формулой (5), $\beta\in(-1,0)$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$, а коэффициент $\rho(x)$ и начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда утверждение теоремы 1 выполняется.*

4. Предельный случай сингулярных коэффициентов

В уравнении (1) положим

$$g(s) = \frac{\alpha}{s}, \tag{6}$$

где $\alpha > -1$.

В этом случае замена (3) неприменима, однако, следуя [25], можно использовать замену $f(s) = s^{\alpha+1}$: предполагая, что ограниченная положительная функция $u(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) с коэффициентом g, заданным формулой (6), обозначим функцию $u^{\alpha+1}(x,t)$ через $v(x,t)$ (эта функция корректно определена и положительна во всем полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ в силу положительности функции u) и вычислим

$$\rho(x)\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = (\alpha+1)\rho(x)u^\alpha\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\alpha+1)u^\alpha\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] =$$

$$= (\alpha+1)\rho(x)u^\alpha\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha(\alpha+1)u^{\alpha-1}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 - (\alpha+1)u^\alpha\Delta u =$$

$$= (\alpha+1)u^\alpha\left[\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\alpha}{u}\left|\nabla u\right|^2 - \Delta u\right] = 0$$

(поскольку u — классическое решение уравнения (1) и положительная функция, все примененные выше операции дифференцирования и деления законны).

Итак, функция $v(x,t)$ ограничена, удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (4), а ее след на гиперплоскости $\{t=0\}$ равен $u_0^{\alpha+1}(x)$.

Теперь, следуя [1], определим в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ функцию $V(x,t) = \int\limits_0^t v(x,\tau)d\tau$ и потребуем, чтобы функция ρ удовлетворяла условиям теоремы 1, а функция $u_0^{\alpha+1}$ принадлежала $C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, в силу [1, Th 1.1], существует такая липшицевая на $[0,+\infty)$ функция A, что соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R} V(x,t)dx = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}A(t)$$

выполняется для каждого положительного t, а соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}[V(x,t)-A(t)]dx = 0$$

выполняется равномерно относительно t из $[0,T]$ для любого положительного T.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть $u(x,t)$ — классическое ограниченное положительное решение задачи Коши для уравнения*

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\alpha}{u}|\nabla u|^2,\ x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,+\infty), \tag{7}$$

где $\alpha > -1$, коэффициент $\rho(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а начальная функция $u_0(x)$ такова, что $u_0^{\alpha+1} \in C^\varkappa_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такая липшицевая на $[0,+\infty)$ функция A, что соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R} U_{\alpha+1}(x,t)dx = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}A(t)$$

выполняется при каждом положительном t, *а соотношение*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}[U_{\alpha+1}(x,t)-A(t)]dx=0$$

выполняется равномерно относительно t *из* $[0,T]$ *для любого положительного* T, *где*

$$U_s(x,t)=\int\limits_0^t u^s(x,\tau)d\tau,\ \ s>0.$$

4.1. Случай положительно определенных решений. Если несколько усилить требования, наложенные на решение, потребовав от него не положительности, а положительной определенности (т. е. положительности его нижней грани), то ограничение на коэффициент α снимается.

При $\alpha<-1$ применяем ту же самую степенную замену, что и при $\alpha>-1$: предполагая, что ограниченная положительно определенная функция $u(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (7), непосредственной подстановкой (точно так же, как и при $\alpha>-1$) убеждаемся, что функция $v(x,t)=u^{\alpha+1}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4), а для доказательства ограниченности этой функции используем положительную определенность функции $u(x,t)$; действительно, вводя положительную постоянную $\gamma\overset{\mathrm{def}}{=}-1-\alpha$, получаем неравенство $v(x,t)\le\dfrac{1}{(\inf u)^\gamma}$.

Тогда, применяя [1, Th 1.1], получаем следующее утверждение:

Предложение 1. *Пусть* $u(x,t)$ *— классическое ограниченное решение задачи Коши для уравнения* (7), *где* $\alpha\ne-1$, $\inf u\ge B>0$, *коэффициент* $\rho(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а начальная функция* $u_0(x)$ *такова, что* $u_0^{\alpha+1}\in C^{\varkappa}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 3.

При $\alpha=-1$ применяем замену $v(x,t)=\ln\dfrac{u(x,t)}{B}$, где $B=\inf u>0$ (в силу условия положительной определенности решения u). Тогда $u(x,t)=Be^{v(x,t)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=Be^v\dfrac{\partial v}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=Be^v\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=Be^v\Big(\dfrac{\partial v}{\partial x_j}\Big)^2+Be^v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$ $(j=\overline{1,n})$. Отсюда вытекает, что $\Delta u=Be^v\big(\Delta v+|\nabla v|^2\big)$, $|\nabla u|^2=B^2e^{2v}|\nabla v|^2$. Теперь учтем, что u удовлетворяет уравнению (7) при $\alpha=-1$; получим, что

$$\begin{gathered}0=\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+\frac{1}{u}|\nabla u|^2=\\=\rho(x)Be^v\frac{\partial v}{\partial t}-Be^v\big(\Delta v+|\nabla v|^2\big)+\frac{1}{Be^v}B^2e^{2v}|\nabla v|^2=\\=\rho(x)Be^v\frac{\partial v}{\partial t}-Be^v\Delta v=Be^v\left(\rho(x)\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v\right),\end{gathered}$$

а значит, функция $v(x,t)$ является (классическим) решением уравнения (4), ограниченным в силу условия ограниченности функции $u(x,t)$.

Тогда, применяя [1, Th 1.1], получим утверждения о поведении среднего вида

$$\begin{gathered}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}\int\limits_0^t\ln\frac{u(x,\tau)}{B}d\tau d\sigma_x=\\=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}\int\limits_0^t\ln u(x,\tau)d\tau d\sigma_x-\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\ln B}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t.\end{gathered}$$

Учитывая, что линейная функция $t\ln B$ является липшицевой на $[0,+\infty)$, функцию $t\ln B - A(t)$, где $A(t)$ — функция, фигурирующая в утверждении [1, Th 1.1], можно переобозначить как новую функцию $A(t)$. Если при этом учесть, что функция $\ln\dfrac{u_0}{B} = \ln u_0 - \ln B$, очевидно, принадлежит любому классу локально гельдеровых функций тогда и только тогда, когда функция $\ln u_0$ принадлежит тому же самому классу, то получим следующее утверждение:

Предложение 2. *Пусть $u(x,t)$ — классическое ограниченное решение задачи Коши для уравнения*

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \frac{1}{u}|\nabla u|^2,$$

где $\inf u \geq B > 0$, *коэффициент* $\rho(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а начальная функция* $u_0(x)$ *такова, что* $\ln u_0 \in C^{\varkappa}_{\mathrm{loc}}\bigl(\mathbb{R}^n\bigr)$. *Тогда существует такая липшицевая на* $[0,+\infty)$ *функция* A, *что соотношение*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}\int\limits_0^t \ln u(x,\tau)d\tau d\sigma_x = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}A(t)$$

выполняется для любого положительного t, *а соотношение*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{|x|=R}\left(\int\limits_0^t \ln u(x,\tau)d\tau - A(t)\right)d\sigma_x = 0$$

выполняется равномерно относительно t *из* $[0,T]$ *для любого положительного* T.

Замечание. Из [26] известно, что условие (i) в теореме 1 (а значит, и во всех пяти утверждениях настоящей работы) можно заменить на следующее эквивалентное условие:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\rho(\xi-x)d\xi}{|\xi|^{n-2}} \in L_\infty\bigl(\mathbb{R}^n\bigr).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Kamin, M.A. Pozio, A. Tesei *Admissible conditions for parabolic equations degenerating at infinity* // Алгебра и анализ. Т. 19, № 2. 2007. P. 105–121.
2. M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang *Dynamic scaling of growing interfaces* // Phys. Rev. Lett. V. 56. 1986. P. 889–892.
3. E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, Y.-C. Zhang *Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth* // Phys. Rev. A. V. 39. 1989. P. 3053–3075.
4. M. Guedda, R. Kersner *Self-similar solutions to the generalized deterministic KPZ equation* // Nonlinear Differential Equations Appl. V. 10, № 1. 2003. P. 1–13.
5. F. Ginelli, H. Hinrichsen *Mean field theory for skewed height profiles in KPZ growth processes* // J. Phys. A. V. 37, № 46. 2004. P. 11085–11100.
6. V. V. Anh, N. N. Leonenko, L. M. Sakhno *Spectral properties of Burgers and KPZ turbulence* // J. Stat. Phys. V. 122, № 5. 2006. P. 949–974.
7. H. Spohn *Exact solutions for KPZ-type growth processes, random matrices, and equilibrium shapes of crystals* // Phys. A. V. 369, № 1. 2006. P. 71–99.
8. A. Gladkov, M. Guedda, R. Kersner *A KPZ growth model with possibly unbounded data: correctness and blow-up* // Nonlinear Anal. V. 68, № 7. 2008. P. 2079–2091.
9. J. Quastel *KPZ universality for KPZ* // XVIth International Congress on Mathematical Physics. Hackensack, NJ: World Sci. Publ. 2010. P. 401–405.
10. I. Corwin, P. L. Ferrari, S. Péché *Universality of slow decorrelation in KPZ growth* // Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. V. 48, № 1. 2012. P. 134–150.

11. G. Schehr *Extremes of N vicious walkers for large N: application to the directed polymer and KPZ interfaces* // J. Stat. Phys. V. 149, № 3. 2012. P. 385–410.
12. H. Spohn *KPZ scaling theory and the semidiscrete directed polymer model* // Math. Sci. Res. Inst. Publ. V. 65. 2014. P. 483–493.
13. C. Bernardin, P. Gonçalves, S. Sethuraman *Occupation times of long-range exclusion and connections to KPZ class exponents* // Probab. Theory Related Fields. V. 166, № 1-2. 2016. P. 365–428.
14. T. Funaki, M. Hoshino *A coupled KPZ equation, its two types of approximations, and existence of global solutions* // J. Funct. Anal. V. 273, № 3. 2017. P. 1165–1204.
15. H. Amann, M. G. Crandall *On some existence theoremes for semi-linear elliptic equations* // Ind. Univ. Math. J. V. 27, № 5. 1978. P. 779–790.
16. Похожаев С.И. *Об уравнениях вида* $\Delta u = f(x, u, Du)$ // Матем. сб. Т. 113(155), № 2(10). 1980. С. 324–338.
17. Денисов В.Н., Муравник А.Б. *О стабилизации решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. Т. 38, № 3. 2002. С. 351–355.
18. A.B. Muravnik *On stabilization of solutions of singular quasi-linear parabolic equations with singular potentials* // Fluid Mech. Appl. V. 71. 2002. P. 335–340.
19. Муравник А.Б. *О стабилизации решений некоторых сингулярных квазилинейных параболических задач* // Мат. заметки. Т. 74, № 6. 2003. С. 858–865.
20. V.N. Denisov, A.B. Muravnik *On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations* // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. V. 9. 2003. P. 88–93.
21. Денисов В.Н., Муравник А.Б. *Об асимптотике решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в полупространстве* // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит. 2003. С. 397–417.
22. A.B. Muravnik *On properties of the stabilization functional of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations* // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. Т. 12, № 2. 2004. С. 133–137.
23. A.B. Muravnik *On stabilization of solutions of elliptic equations containing Bessel operators* // Integral methods in science and engineering. Analytic and numerical techniques. Boston, MA: Birkhäuser. 2004. P. 157–162.
24. Муравник А.Б. *О стабилизации решений сингулярных эллиптических уравнений* // Фундамент. и прикл. матем. Т. 12, № 4. 2006. С. 169—186.
25. Бицадзе А.В. *К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. Т. 13, № 11. 1977. С. 1993–2008.
26. H. Brezis, S. Kamin *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$ // Manuscripta Math. V. 74. 1992. P. 87–106.

Андрей Борисович Муравник,
АО «Концерн «Созвездие»,
ул. Плехановская, 14,
394018, г. Воронеж, Россия
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: amuravnik@yandex.ru