ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 51-63.

УДК 517.537.32

ПОРЯДОК РЯДА ДИРИХЛЕ С ПРАВИЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ПОЛУПОЛОСАХ

А.М. ГАЙСИН, Г.А. ГАЙСИНА

Аннотация. Изучаются ряды Дирихле $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$ с положительными и неограниченно возрастающими показателями λ_n. Предполагается, что последовательность показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную плотность. Пусть эта плотность равна b. При этом требуется, чтобы последовательность Λ имела правильное распределение. Это понимается в следующем смысле: найдется положительная вогнутая функция H из класса сходимости, такая, что

$$|\Lambda(t) - bt| \leq H(t) \quad (t > 0).$$

Здесь $\Lambda(t)$ — считающая функция последовательности Λ. Показано, что если, кроме того, функция H имеет не очень быстрый рост, то порядки функции F по Ритту в любых замкнутых полуполосах, ширина каждой из которых не меньше $2\pi b$, будут равны. При этом на близость и концентрацию точек λ_n никаких требований не предъявляется. Соответствующий результат для открытых полуполос ранее был получен А.М. Гайсиным и Н.Н. Аиткужиной.

Показано, что если ширина одной из двух полуполос меньше $2\pi b$, то порядки по Ритту суммы ряда Дирихле в данных полуполосах не равны.

Ключевые слова: R-плотность последовательности, ряд Дирихле, R-порядок, полуполоса, полуплоскость

Mathematics Subject Classification: 30D10

Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty. \tag{0.1}$$

При изучении целых функций, определённых всюду сходящимися рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{0.2}$$

в своё время Риттом было введено понятие R-порядка. Приведём определение этой величины.

Порядком по Ритту (R-порядком) целой функции F, определённой рядом (0.2), называется величина [1]

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}, \quad M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|.$$

A.M. Gaisin, G.A. Gaisina, The order of a Dirichlet series with a regular distribution of the exponents in the half-strips.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-41-02 0070 р_а).

Поступила 27 июля 2018 г.

Рассмотрим замкнутую полосу $S(a,t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a\}$. Обозначим $M_s(\sigma) = \max\limits_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma+it)|$. Величина

$$\rho_s = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{\sigma} \quad (a^+ = \max(a,0))$$

называется R-порядком функции F в полосе $S(a,t_0)$.

Пусть

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty, \qquad D^* = \varlimsup_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda D(x)\,dx,$$

где $D(x) = \frac{\Lambda(x)}{x}$, $\Lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n\le x} 1$ (D — верхняя плотность, D^* — усреднённая верхняя плотность последовательности Λ). Очевидно, $D^* \le D$.

В [2] доказано, что если $\varliminf\limits_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = h > 0$, то R-порядок ρ_s функции F в полосе $S(a,t_0)$ при $a > \pi D^*$ равен R-порядку ρ_R во всей плоскости. Наиболее общий результат о равенстве R-порядков в разных полосах $S_i = S(a_i,t_i)$ $(i=1,2)$ установлен А.Ф. Леонтьевым в [3].

Приведем этот результат. Пусть F — сумма ряда Дирихле (0.2), а S_1 и S_2 — открытые горизонтальные полосы, содержащие соответственно $\overline{D}(\alpha_1)$ и $\overline{D}(\alpha_2)$, где $\overline{D}(\alpha)$ — смещение сопряженной диаграммы $\overline{D}$ целой функции

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x+iy)$$

на вектор α. Тогда R-порядки функции F в этих полосах равны [3, гл. II, § 5, п.3]. Для замкнутых полос соответствующий результат доказан Г.С. Садыховым в [4].

Отметим, что для целых рядов Дирихле (0.2) (как произвольного, так и заданного роста) в [5] была сделана попытка в общей ситуации получить соотношение

$$\ln M(\sigma) \sim \ln M_S(\sigma) \tag{0.3}$$

при $\sigma\to\infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ — положительный луч $(0,\infty)$). Это соотношение выводится из утверждения [5][1]: *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1} < \infty$ *(когда F имеет произвольный рост) или $n = o(\lambda_n)$ при $n\to\infty$ (если F — целая функция конечного порядка по Ритту), то для всяких горизонтальных полос $S_1 \subset S_2$ при $\sigma\to\infty$ вне некоторого множества E конечной меры или нулевой плотности соответственно*

$$\ln M_{S_2}(\sigma) \geqslant \ln M_{S_1}(\sigma) \geqslant \ln\{M_{S_2}(\sigma) - |o(1)|\mu(\sigma)\} + o(\ln M(\sigma)), \tag{0.4}$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда Дирихле.

Однако, в (0.4) выражение в фигурных скобках, вообще говоря, отрицательно. Но тогда правая оценка в (0.4) не имеет смысла несмотря на то, что показатели ряда подчинены весьма жестким ограничениям — условиям Фейера или Фабри. Тем не менее, если же коэффициенты a_n ряда (0.2) лежат в фиксированном угле $\left\{s = re^{i\theta} : |\theta| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}\right\}$, то $|F(\sigma)| \geqslant M(\sigma)\cos\gamma$, и при подходящем выборе полосы S_2 соотношение (0.3) легко вытекает из (0.4). Отметим, что это условие на a_n вообще не существенно (по этому поводу более подробно см. в [7], [8], где получены более сильные результаты), равно как и условия

[1]В терминах коэффициентов мажоранты Ньютона ряда Дирихле (0.2), сходящегося лишь в полуплоскости, аналогичный результат приведен в [6].

Фейера или Фабри[1]. Так, в [7] вообще не требуется, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}$, если даже F имеет сколь угодно быстрый рост, а предполагается лишь конечность так называемой W– плотности $G(W)$ (W — класс сходимости) и выполнение условия типа

$$-\ln h_n \leqslant w(\lambda_n) \quad (n\geqslant 1), \quad w\in W,$$

где $h_n=\min\limits_{k\neq n}|\lambda_n-\lambda_k|$. Тогда, например, для любой полосы $S(a,t_0)$ при $a>\pi G(W)$ соотношение (0.3) имеет место вне множества E конечной меры [7].

Для целых рядов Дирихле конечного порядка по Ритту в [8] доказан даже критерий выполнения соотношения (0.3) (последовательность Λ должна иметь нулевую α–конденсацию и удовлетворять более слабому условию роста, чем условие Фабри [8]).

В статье [9] приведенный выше результат А.Ф. Леонтьева из [3] о равенстве порядков по Ритту в открытых полосах, содержащих $\overline{D}$, перенесен на случай, когда область сходимости ряда (0.2) — полуплоскость $\Pi_0=\{s=\sigma+it:\sigma<0\}$.

Предполагая в (0.1) $H=0$, класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле (0.2), сходящимися лишь в полуплоскости Π_0, как и в [9] обозначим через $D_0(\Lambda)$. В настоящей работе также рассматривается подкласс функций из $D_0(\Lambda)$, имеющих конечный порядок, аналогичный порядку Ритта в классическом случае. Оказывается, (см. в [9]) методы и идеи работы [7], где шла речь о рядах произвольного роста, применимы и в данном случае.

Пусть $S(a,t_0)=\{s=\sigma+it:|t-t_0|\le a,\ \ \sigma<0\}$ — замкнутая полуполоса. Величины

$$\rho_R=\overline{\lim_{\sigma\to 0-}}\frac{\ln^+\ln M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \qquad \rho_s=\overline{\lim_{\sigma\to 0-}}\frac{\ln^+\ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}$$

называются порядками функции F по Ритту в полуплоскости Π_0 и полуполосе $S(a,t_0)$ [10]. В дальнейшем величины ρ_R и ρ_s будем называть просто порядками в полуплоскости и полуполосе.

В [8] показано, что если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln n=0$$

(эти условия и необходимы [11]), то порядок ρ_R любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln^+|a_n|. \tag{0.5}$$

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность D, $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(z)$. Тогда $\tau=h(\pm\frac{\pi}{2})\le\pi D^*$ [2]. Очевидно, τ — тип функции L.

Если

$$|L(x)|\le e^{g(x)}\,(x\ge 0), \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)\ln x}{x}=0, \tag{0.6}$$

то порядок ρ_s в полуполосе $S(a,t_0)$ при $a>\tau$ и порядок ρ_R любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам [10]

$$\rho_s\le\rho_R\le\rho_s+q, \tag{0.7}$$

где

---

[1] Обычно рассматриваются две отдельные задачи:
1) последовательность коэффициентов $A=\{a_n\}$ произвольная (она подчинена лишь естественному требованию), но исходя из рассматриваемой задачи накладываются условия на $\Lambda=\{\lambda_n\}$;
2) последовательность показателей Λ любая (она подчинена лишь естественному требованию), но накладываются условия на A, опять диктуемые конкретной задачей.

М.Н. Шеремета рассматривает комбинированную задачу, накладывая ограничения одновременно и на A, и на Λ, а они очень жесткие.

$$q = q(L) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty \tag{0.8}$$

(в [10] рассматривается и случай, когда полуполоса $S(a, t_0)$ имеет ширину, равную в точности 2τ). Отсюда следует, что если $q < \infty$, то величины ρ_s и ρ_R конечны и бесконечны одновременно, причем $\rho_s = \rho_R$, если $q = 0$. В общем случае $\rho_s \neq \rho_R$ [12]. Однако в [9] установлено, что если ширина каждой из двух полуполос $S_i = S(a_i,\, t_i)$ $(i = 1,\, 2)$ больше $2\pi G(R)$ ($G(R)$ – R-плотность), то порядки по Ритту в этих полуполосах равны.

Как и в работе [4], напрашивается естественный вопрос: при каких условиях любая функция F из $D_0(\Lambda)$ в разных полуполосах ширины не меньше $2\pi G(R)$ имеет один и тот же порядок?

Цель настоящей статьи (она реализована в теореме 1) — в классе последовательностей Λ, имеющих плотность b, указать условия, при выполнении которых $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$, где ρ_{s_i} — порядки в произвольных полуполосах S_i $(i = 1, 2)$, каждая из которых имеет ширину не меньше, чем $2\pi b$. Как будет видно из доказательства, в теореме 1 величина q может быть произвольной, но теорема вообще неверна при $a_1 < \pi b < a_2$, если даже $q < \infty$ (приводится соответствующий пример).

1. Предварительные сведения

Нам в дальнейшем потребуются некоторые специальные плотности распределения последовательности Λ. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}\,(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций. Через K обозначим подкласс функций h из L, таких, что $h(0) = 0$, $h(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{h(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow \infty$ ($\frac{h(t)}{t}$ монотонно убывает при $t > t_0$). В частности, если $h \in K$, то $h(2t) \le 2h(t)\,(t \geqslant t_0)$.

K-плотностью последовательности Λ называется величина [12]

$$G(K) = \inf_{h\in K} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \tag{1.1}$$

где $\omega(t) = [t,\ t + h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек из Λ, попавших в полуинтервал $\omega(t)$.

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega = [a,\ b)$. Через $|\omega|$ будем обозначать длину ω. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \ \lambda_n \uparrow \infty)$ порождает целочисленную считающую меру μ_Λ:

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_n \in \omega} 1, \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть μ_Γ — считающая мера, порождённая последовательностью $\Gamma \ = \ \{\mu_n\}(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Тогда включение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \le \mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. В этом случае говорят, что мера μ_Γ мажорирует меру μ_Λ.

Через $D(K)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b $\ (0 \le b < \infty)$, для каждого из которых существует мера μ_Γ, мажорирующая μ_Λ, такая, что для некоторой функции $h \in K$

$$|M(t) - bt| \le h(t) \qquad (t \ge 0). \tag{1.2}$$

Здесь $\Lambda = \{\lambda_n\},\ \Gamma = \{\mu_n\},\ M(t) = \sum\limits_{\mu_n \le t} 1.$

Лемма 1. [12] *Величины $D(K)$ и $G(K)$ совпадают: $D(K) = G(K)$.*

Рассмотрим еще следующие классы функций: $L_0 = \{h \in L :\ h(x)\ln x = o(x)$ при $x \to +\infty\}$,

$$R = \{h \in K :\ \ h(x) \ln \frac{x}{h(x)} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right), \quad x \to +\infty\}.$$

Дословное повторение доказательства леммы 1 показывает, что $D(R) = G(R)$ (величины $D(R)$ и $G(R)$ определяются как и выше, но с той лишь разницей, что в (1.1) и (1.2) $h \in R$). В [12] показано, что если последовательность Λ имеет конечную $G(R)$-плотность, то существует чётная целая функция Q, имеющая в некотором смысле правильное поведение на вещественной оси. Все нули этой функции вещественные и простые, причем Λ — подмножество ее нулевого множества. Учитывая по существу это важное обстоятельство, в [9] показано, что $\rho_{S_1} = \rho_{S_2}$ для любых полуполос $S_i = S(a_i,\, t_i)$ $(i = 1,\, 2)$, каждая из которых имеет ширину больше, что $2\pi G(R)$ (Λ расширяется до последовательности M всех положительных нулей функции Q, имеющей плотность $b > G(R)$).

В настоящей работе предполагается, что сама последовательность Λ имеет плотность b и удовлетворяет условию типа (1.2). Ставится цель выяснить, при каких дополнительных условиях на функцию h из соотношения (1.2) будет вытекать равенство $\rho_{S_1} = \rho_{S_2}$ для любых замкнутых полуполос S_1 и S_2 ширины не меньше $2\pi b$.

Нам понадобится следующая

Лемма 2. [13] *Пусть $C(x)$ – неубывающая функция, равная нулю в окрестности 0. Предположим, что*

$$\int_0^\infty \frac{C(x)}{x^2}dx < \infty,$$

и положим для $a > 0$

$$m(a) = \int_0^\infty \frac{C(x)}{x^2}dx.$$

Пусть p и q – две постоянные, такие, что $p > 2,\ 0 \le q < p - 2$. Тогда для любого a существует четная целая функция $F_a(z)$ $(z = x + iy)$, удовлетворяющая условиям:

$$|F_a(z)| \le e^{pem(a)|y| - C(|z|)} L_a(x,\, y),$$

где

$$L_a(x,\, y) = \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\pi}\frac{1}{1 + \beta\gamma(x^2 + y^2)}.$$

Ясно, что $||L_a||_{L(\mathbb{R})} = ||L_a||_{L(i\mathbb{R})} = 1$.

В данной лемме

$$\beta = \frac{(p - q - 2)em(a)}{2}, \quad \gamma = \frac{(p + q)em(a)}{2},$$

а сама функция $F_a(z)$ имеет вид:

$$F_a(z) = \frac{e^{-C(a-0)}}{2\pi e}\sqrt{\beta\gamma}\,\frac{\sin\beta z}{\beta z}\,\frac{\sin\gamma z}{\gamma z}\,\varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n z}{\mu_n z} \quad (\mu_n > 0),$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \le em(a).$$

В нашей ситуации $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ – множество всех положительных нулей функции Q, т.е.

$$Q(z) = L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy). \tag{1.3}$$

Пусть γ_Q — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией Q. Тогда справедлива

Лемма 3. *Для функции Q условие (0.6) выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{\delta\to 0+} \delta \ln^+ \ln |\gamma_Q(t)| \le 0, \quad \delta = |\operatorname{Re} t|.$$

Необходимость леммы доказана в [10], а достаточность — в [12].

Лемма 4. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ удовлетворяет условию*

$$|\Lambda(t) - bt| \le H(t) \quad (t \ge 0), \tag{1.4}$$

где функция H принадлежит классу K и, кроме того,

$$\int_1^\infty \frac{H(t)}{t^2} dt < \infty. \tag{1.5}$$

Тогда для целой функции Q, заданной формулой (1.3), верны оценки:

1) существуют $A > 0$, $B > 0$, такие, что на вещественной оси

$$\ln |Q(x)| \le AH(|x|) \ln^+ \frac{|x|}{\ln(|x|)} + B, \tag{1.6}$$

2) на мнимой оси

$$\ln |Q(iy)| \le \pi b|y| + 2N_H(|y|) + \frac{\pi}{2} H(|y|), \tag{1.7}$$

где

$$N_H(r) = \begin{cases} \int\limits_{\lambda_1}^{r} \frac{H(t)}{t} dt, & \text{если } r \ge \lambda_1; \\ 0, & \text{если } 0 \le r < \lambda_1. \end{cases}$$

Оценка (1.6) доказана в [14], а (1.7) непосредственно вытекает из представления

$$\ln |Q(iy)| = 2y^2 \int_0^\infty \frac{\Lambda(t) dt}{t(t^2 + r^2)}.$$

В лемме 2 вместо z возьмем iz и положим

$$C(y) = \begin{cases} 2N_H(y) + \frac{\pi}{2} H(y) + \sqrt{y}, \text{ если } y \ge \lambda_1; \\ 0, \text{ если } 0 \le y < \lambda_1. \end{cases}$$

За счет слагаемого $\sqrt{y}$, очевидно, имеем: $\ln C(y) \asymp \ln y$ (пишем $\varphi_1(y) \asymp \varphi_2(y)$, если при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ имеют место оценки: $c_1\varphi_1(y) \le \varphi_2(y) \le c_2\varphi_1(y)$). Поскольку функция N_H также удовлетворяет условию (1.5), то функция $C(y)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда, комбинируя леммы 2 и 4, получаем следующее утверждение

Лемма 5. *Пусть Q – функция (1.3), $Q_a(z) = F_a(iz)Q(z)$, где F_a – функция из леммы 2. Тогда для любого $a > 0$ на вещественной и мнимой осях для функции Q_a верны оценки:*

1) $|Q_a(x)| \le \exp\left[AH(|x|) \ln^+ \frac{|x|}{H(|x|)} + pem(a)|x| - C(|x|) + B\right] L_a(x, 0)$;

2) $|Q_a(iy)| \le Q(i\lambda_1) L_a(0, y) e^{\pi b|y|}$;

3) Функция γ_a, ассоциированная по Борелю с функцией Q_a, непрерывна на прямых $l_\pm = \{t\colon |\operatorname{Im} t| = \pm\pi b\}$, причем

$$\sup_{|\operatorname{Im} t| = \pm\pi b} |\gamma_a(t)| \le Q(i\lambda_1).$$

Все параметры в оценках 1) – 3) определены в леммах 2 и 4.

Оценка в утверждении 3) следует из неравенства 2) и из того, что $||L_a||_{L(i\mathbb{R})} = 1$. Непрерывность γ_a на прямых $l_\pm$ представляет собой хорошо известный факт (см., например, в [3, гл. III, п. 7]).

2. Основной результат

Пусть L_0, R — классы функций, введенные выше, а $G(R)$ — R-плотность последовательности Λ. В указанных обозначениях верна

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, для которой выполняется условие (1.4), причем*

$$\lim_{a\to\infty} \ln a \int\limits_a^\infty \frac{N_H(x)}{x^2}dx = 0. \tag{1.8}$$

Если $S_1 = S(a_1,\ t_1)$, $S_2 = S(a_2,\ t_2)$ — полуполосы

$$S(a_i,\ t_i) = \{s = \sigma + it : \ \ |t - t_i| \le a_i, \ \ \sigma < 0\} \quad (i = 1, 2),$$

каждая из которой имеет ширину не меньше $2\pi b$, то $\rho_{S_1} = \rho_{S_2}$, какова бы ни была функция $F \in D_0(\Lambda)$. Здесь ρ_{S_1} и ρ_{S_2} — R-порядки функции F в S_1 и S_2 соответственно.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится еще одно утверждение, а именно оценка для величины $m(\varphi) = -\ln|Q(re^{i\varphi})|$ при $\varphi \to 0$, где Q – произведение Вейерштрасса (1.3), последовательность нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ которого имеет положительную плотность b, причем для некоторой функции $H \in R$

$$|\Lambda(t) - bt| \leqslant H(t), \quad \Lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1. \tag{2.1}$$

Лемма 6. [14] *При условии (2.1) целая функция Q имеет следующую оценку: существует $\rho \geqslant 0$, такое, что при $r \geqslant \rho$ для всех φ, $0 < |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$,*

$$\left|\ln|Q(re^{i\varphi})| - \pi b|\sin\varphi| r\right| \leqslant 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\lambda_1\tau. \tag{2.2}$$

3. Доказательство теоремы 1

Имеем:

$$|\Lambda(t) - bt| \le H(t) \quad (t \ge 0), \quad H \in R, \tag{3.1}$$

причем усредненная функция N_H удовлетворяет условию (1.8). Тогда целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy) \tag{3.2}$$

обладает свойствами [14]:

1^0. $Q(\lambda_n) = 0$, $\ Q'(\lambda_n) \ne 0$ $(n \ge 1)$;

2^0. $\ln|Q(x)| \le g(x)$ $(x \ge 0)$, $\ g \in L_0$.

Кроме того, на некоторой последовательности окружностей

$$K_n = \{\lambda : \ \ |\lambda| = r_n\}, \quad \frac{r_n}{r_{n+1}} \to 1, \quad n \to \infty,$$

имеют место оценки [3, гл. I, § 3, п.1]

$$\ln|Q(z)| \geqslant -V_0(r), \ \ r = |z| = r_n, \tag{3.3}$$

где $0 < V_0(r) = o(r)$ при $r \to \infty$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $n = o(r_n)$ при $n \to \infty$. Для этого, например, из последовательности $\{r_n\}$ исключим, если это необходимо, часть точек, оставляя в каждом полуинтервале вида $[n^2, (n + 1)^2)$ не более одного члена исходной последовательности. При этом r_1 выберем так, чтобы $0 < r_1 < \min(1, \lambda_1)$. Имея это в виду, через Γ_n обозначим замкнутый контур, составленный дугами окружностей $K_n = \{\lambda : \ \ |\lambda| = r_n\}$, $K_{n+1} = \{\lambda : \ \ |\lambda| = r_{n+1}\}$ и отрезками лучей $\{\lambda : \ \ \arg\lambda = \pm\varphi_n, \ 0 < \varphi_n < \pi/4\}$ (φ_n выберем позже).

Справедливо следующее представление

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Gamma_n}\frac{\omega_Q(\mu,\ \alpha,\ F)}{Q(\mu)}\,e^{\mu s}\,d\mu\right),\quad s=\sigma+it\in\Pi_0,\tag{3.4}$$

где F — сумма ряда Дирихле (0.2) из класса $D_0(\Lambda)$, Q — целая функция (3.2), а

$$\omega_Q(\mu,\ \alpha,\ F)=e^{-\mu\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\gamma_Q(t)\left(\int\limits_{\alpha_0}^{t}F(t+\alpha-\eta)e^{\mu\eta}\,d\eta\right)dt\tag{3.5}$$

— интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева (см., например, в [3, гл. I, § 2, п.13]). В определении функции $\omega_Q(\mu,\alpha,F)$ через C обозначим замкнутый жордановый контур, охватывающий сопряженную диаграмму целой функции Q, γ_Q — функция, ассоциированная по Борелю с Q, а $\alpha,\ \alpha_0$ — комплексные параметры. Если, например, C — контур, звездообразный относительно начала координат, то обычно полагают $\alpha_0=0$. В этом случае η во внутреннем интеграле в (3.5) пробегает отрезок $[0,t]$. Тогда $t-\eta$ также пробегает этот отрезок, причем $(t-\eta)\in\overline{G}$, где $\overline{G}$ — замыкание области G, ограниченной контуром C. Тогда $(t+\alpha-\eta)\in\overline{G}_\alpha$, $\overline{G}_\alpha$ — сдвиг $\overline{G}$ на вектор α. По этой причине в (3.5) параметр α выбирается так, чтобы функция F была регулярна в $\overline{G}_\alpha$ [3].

Приступим к доказательству равенства $\rho_{S_1}=\rho_{S_2}$.

Пусть $a_1,\ a_2$ — любые числа, $a_1\geq\pi b$, $a_2\geq\pi b$, а $S_1=S(a_1,\ t_1)$ и $S_2=S(a_2,\ t_2)$ — полуполосы. Положим

$$a=\sup_{n\geqslant1}\frac{r_{n+1}}{r_n},\quad c=|t_1|+|t_2|+a_1+a_2,\quad \varphi_n=\varepsilon_0\frac{H(r_n)}{r_n}\quad(n\geqslant1).$$

Так как $H\in R$, то $\varphi_n\downarrow0$ при $n\to\infty$. Число ε_0 выберем так, чтобы $0<\varphi_n<\frac{\pi}{4}$ $(n\geqslant1)$.

Учитывая равенство [15, гл. IV, §2, п. 2]

$$\frac{\omega_Q(\mu,\alpha,F)}{Q(\mu)}=\frac{\omega_{Q_a}(\mu,\alpha,F)}{Q_a(\mu)}$$

(Q_a – функция из леммы 6) и введя упрощенное обозначение ω_a вместо ω_{Q_a}, для любого $s=\sigma+it\in\Pi_0$ имеем

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Gamma_n}\frac{\omega_a(\mu,\alpha,F)}{Q_a(\mu)}e^{\mu s}\,d\mu\right),\tag{3.6}$$

где

$$\omega_a(\mu,\alpha,F)=e^{-\alpha\mu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\gamma_a(t)\left(\int\limits_{0}^{t}F(t+\alpha-\eta)e^{\mu\eta}\,d\eta\right)\,dt,\tag{3.7}$$

$\gamma_a=\gamma_a(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией Q_a, C — замкнутый (выпуклый) контур, охватывающий сопряженную диаграмму $\overline{D}_a$ функции Q_a; α — произвольный комплексный параметр, выбранный так, чтобы $C_\alpha\subset\Pi_0$ (C_α — смещение C на вектор α).

Уточним выбор параметра α и контура C. Пусть $\gamma_2\in(0,1)$, $\gamma_1=2\gamma_2^2$. Положим $\alpha=-\sigma(1-\gamma_2)+it_1$, $\sigma=\mathrm{Re}\ s<0$. Поскольку $\overline{D}_a$, как видно из оценок леммы 5, содержится в прямоугольнике $\{z=x+iy\colon |x|\leq h_a(0)\leq pem(a),|y|\leq h_a(\pm\frac{\pi}{2})=\pi b\}$ ($h_a(\varphi)$ – индикатриса роста функции Q_a), в качестве C возьмем границу прямоугольника $P=\{z:\ |\mathrm{Re}\ z|\leqslant 2pem(a),\ |\mathrm{Im}\ z|\leqslant a_1\}$, где $a_1=\pi b$. Учитывая, что $m(a)$ – непрерывная функция, $m(a)\downarrow0$ при $a\to\infty$, параметр $a>0$ выберем как корень уравнения

$$2pem(a)=\gamma_1|\sigma|.\tag{3.8}$$

Так что для $z \in P$ будем иметь: $|\operatorname{Re} z| \le \gamma_1|\sigma|$. Пусть, для удобства, $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$.

Наша цель – пользуясь некоторым представлением типа (3.7), оценить $|F(s)|$ в полуполосе S_2 через максимум модуля функции F в полуполосе S_1. Проблема заключается в том, что в оценке (3.3) $V_0 \notin L_0$. Чтобы преодолеть эту трудность, предварительно докажем лемму.

Лемма 7. *Пусть $s = \sigma + it \in S_2$, $\mu \in \Gamma_n$, $\eta \in C$, γ_2— любое, но фиксированное число из $(0,1)$. Тогда*

$$\left|e^{-\mu(\alpha-s-\eta)}\right| \leqslant A(\gamma_2)e^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+acH(r_n)} \quad (n \geqslant 1), \tag{3.9}$$

a, c — числа, введенные выше, $H \in R$.

Доказательство. Полагая $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, имеем $\alpha - s - \eta = -\gamma_2\sigma - \eta_1 - i(-t_1 + t + \eta_2)$. Если $\mu = re^{i\varphi} = \mu_1 + i\mu_2$, $R = \operatorname{Re}\,[-\mu(\alpha - s - \eta)]$, то $R = \mu_1\gamma_2\sigma + \mu_1\eta_1 - \mu_2(-t_1 + t + \eta_2)$. Отсюда получаем, что $R \leqslant -r\gamma_2|\sigma|\cos\varphi + r\gamma_1|\sigma|\cos\varphi + r|\sin\varphi|c$ $(r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1},\ 0 < |\varphi| \leqslant \varphi_n < \frac{\pi}{4})$. Значит, $R \leqslant -r_n\gamma_2|\sigma|(1 + 2\gamma_2)\cos\varphi_n + c\varphi_n r_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$. Так как $r_{n+1} \leqslant ar_n$ $(n \geqslant 1)$, $\varphi_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то при $n \geqslant n_0(\gamma_2)$

$$R \leqslant -\gamma_2(1 + \gamma_2)r_n|\sigma| + acH(r_n),$$

тем самым, оценка (3.9) доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Для $s \in S_2$, $\mu \in \Gamma_n$ оценим выражение

$$\left|\frac{\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}\right|.$$

Так как $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$, то

$$|\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}| \leqslant (1 + a_1^2)|e^{-\mu(\alpha-s)}\ |\max_{\eta\in P}|e^{\mu\eta}|\ \max_{t\in C}|\gamma_a(t)|\ \max_{u\in C_\alpha}|F(u)|.$$

Поскольку $\max\limits_{\eta\in P}|e^{\mu\eta}|$ достигается на контуре C, то применяя лемму 7, имеем

$$|\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}| \leqslant B(\gamma_2)e^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+acH(r_n)}\ \max_{t\in C}|\gamma(t)|\ \max_{u\in C_\alpha}|F(u)|. \tag{3.10}$$

Здесь $B(\gamma_2) = (1 + a_1^2)A(\gamma_2)$, $\mu \in \Gamma_n$ $(n \geqslant 1)$, $\gamma_2 \in (0,1)$.

Далее, учитывая соотношение (3.8), из оценки 1) леммы 5 получаем, что

$$\max_{\substack{t\in C\\ |\operatorname{Re} t| = \gamma_1|\sigma|}} |\gamma_a(t)| \le e^B \exp\left[\max_{x\ge 0}\left(AH(x)\ln^+\frac{x}{H(x)} - \frac{\gamma_1}{2}|\sigma|x\right)\right].$$

Так как $H \in R$, отсюда легко выводится (см., например, в [12]), что на вертикальных участках контура C

$$\varlimsup_{|\operatorname{Re} t|\downarrow 0} |\operatorname{Re} t|\ln^+\ln|\gamma_a(t)| \le 0$$

(отметим, что для функции γ_Q, ассоциированной по Борелю с Q, последнее соотношение сразу следует из леммы 3). Следовательно, для любого $\gamma_3 > 0$ при $|\sigma| < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma_3)$ на вертикальных участках контура C получаем оценку

$$|\gamma_a(t)| \leqslant \exp\ \exp[\gamma_3\gamma_1^{-1}|\sigma|^{-1}],\quad |\operatorname{Re}\ t| = \gamma_1|\sigma|. \tag{3.11}$$

Так как на горизонтальных отрезках контура $|\gamma_a(t)| \leqslant Q(i\lambda_1)$, то, полагая $\gamma_3 = \gamma_2^4$ и учитывая (3.11), равенство $\gamma_1 = 2\gamma_2^2$, получим

$$\max_{t\in C}|\gamma_a(t)| \leqslant \exp\exp[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}],\quad |\sigma| < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\gamma_2). \tag{3.12}$$

Таким образом, из (3.10), (3.12) для $s \in S_2$ и $\mu \in \Gamma_n$ имеем

$$|\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}| \leqslant$$
$$C(\gamma_2)\exp\ \exp\ [\gamma_2^2|\sigma|^{-1}]e^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+acH(r_n)}\ \max_{u\in C_\alpha}|F(u)|, \tag{3.13}$$

где $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$ $(n \geqslant 1)$.

Поскольку для любого $\nu > 0$ при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$

$$\left|\frac{\sin \nu z}{\nu z}\right| \geq 1,$$

то для таких z при каждом фиксированном $a > 0$

$$|F_a(iz)| \geq \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2\pi e} e^{-C(a)}, \quad C(a-0) = C(a).$$

На дугах окружностей K_n и K_{n+1} контура Γ_n выполняется оценка (3.3). Следовательно, если учесть предыдущую оценку, то на тех дугах

$$-\ln|Q_a(z)| \leqslant V(r), \quad V(r) = o(r), \ r \to \infty. \tag{3.14}$$

Пусть γ_n— часть контура Γ_n без дуг C_n, C_{n+1} $(n \geqslant 2)$, где C_n означает общую часть контуров Γ_n и Γ_{n+1} $(n \geqslant 1)$. Считаем, что $\gamma_1 = \Gamma_1 \setminus C_1$, где $C_1 = \{z : |z| = r_1, \ |\arg z| \leqslant \varphi_1\}$. Из (3.13), (3.14) видно, что для любого фиксированного $s \in S_2$

$$\left|\frac{\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}\right| \leqslant e^{-\gamma_2|\sigma|r_n}, \ \ \mu \in \gamma_n, \ \ n \geqslant n_1.$$

Значит, для любого фиксированного $s \in S_2$

$$I_n = \int\limits_{C_n} \frac{\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}\, d\mu \to 0$$

при $n \to \infty$. А поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\Gamma_k} \frac{\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}\, d\mu\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\gamma_k} \frac{\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}\, d\mu\right) + I_n,$$

то на самом деле вместо (3.6) в полуполосе S_2 имеет место представление

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\gamma_n} \frac{\omega_a(\mu, \alpha, F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}\, d\mu\right). \tag{3.15}$$

Сначала оценим $|Q(\mu)|$ на γ_n снизу, причем равномерно по φ, $\varphi_{n+1} \leqslant |\varphi| \leqslant \varphi_n$. Для этого обратимся к лемме 7, согласно которой найдется $\rho > 0$, что при $r \geqslant \rho$

$$-\ln|Q(re^{i\varphi})| \leqslant 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\lambda_1 b,$$

где $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$, $\frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1$ при $n \to \infty$, $r_{n+1} \leqslant ar_n$ $(n \geqslant 1)$, $\varphi_{n+1} \leqslant |\varphi| \leqslant \varphi_n$; b — плотность последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $a_1 = \pi b$. Так как $H(r) \uparrow \infty$, $\frac{H(r)}{r} \downarrow 0$ при $r \uparrow \infty$, $\varphi_n = \varepsilon_0 \frac{H(r_n)}{r_n}$, то для $\mu = re^{i\varphi} \in \gamma_n$ при $n \geqslant n_2$ имеем:

$$1)\ \ 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} \leqslant 12H(r_n)\ln\frac{r_n}{H(r_n)};$$

$$2)\ \ \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} \leqslant \frac{16\pi}{\varepsilon_0}H(r_n).$$

Таким образом, учитывая приведенную выше оценку для $|F_a(iz)|$ снизу в угле $\{z\colon |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}\}$, имеем: на контуре γ_n

$$-\ln|Q_a(\mu)| \leqslant 12H(r_n)\ln\frac{r_n}{H(r_n} + \frac{16\pi}{\varepsilon_0}H(r_n) + C(a) + \ln\frac{2\pi e}{\sqrt{\beta\gamma}} \quad (n \geqslant n_2). \tag{3.16}$$

Так как $H \in R$, то функция $H(r)\ln\frac{r}{H(r)}$ принадлежит L_0. Следовательно, из (3.13), (3.16) окончательно имеем

$$\begin{gathered}\left|\tfrac{\omega_a(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q_a(\mu)}e^{\mu s}\right| \leqslant D(\gamma_2)e^{C(a)}\exp\exp\,[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}]\cdot\\ \cdot\exp\,[-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+w(r_n)]\max_{u\in C_\alpha}|F(u)|,\end{gathered} \tag{3.17}$$

где w — некоторая функция из L_0, $\gamma_1|\sigma|\leqslant 1$, $\mu\in\gamma_n$, $(n\geqslant 1)$.

Теперь можно оценить $M_{s_2}(\sigma)$ через $M_{s_1}(\sigma)$ сверху. Из (3.15), учитывая (3.17), получаем

$$M_{s_2}(\sigma)=\max_{|t-t_2|\leqslant a_2}|F(\sigma+it)|\leqslant$$

$$D(\gamma_2)e^{C(a)}\exp\exp\,[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}]\max_{u\in C_\alpha}|F(u)|\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|\exp\,[w(r_n)-\gamma_2r_n|\sigma|], \tag{3.18}$$

где $w\in L_0$, $|\gamma_n|$ — длина γ_n.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{\nu_ns}, \tag{3.19}$$

где $\nu_n=\gamma_2r_n$ $(n\geqslant 1)$, $b_n=|\gamma_n|\exp\,[w(\frac{\nu_n}{\gamma_2})]$, причем $n=o(\nu_n)$ при $n\to\infty$ согласно выбору r_n. Очевидно, ряд (3.19) сходится абсолютно в Π_0, а так как $w\in L_0$, то порядок функции Φ в полуплоскости Π_0 равен нулю (см. [10], а также (0.5)):

$$\rho(\Phi)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\nu_n}{\nu_n}\ln^+|b_n|=0.$$

Далее, так как, согласно условию (1.8), $m(a)\ln a\to 0$ при $a\to\infty$, а $\ln C(a)\asymp\ln a$, то с учетом равенства (3.8) заключаем, что $|\sigma|\ln C(a(|\sigma|))\to 0$ при $\sigma\uparrow 0$ (при этом, очевидно, $a(|\sigma|)\uparrow\infty$). Учитывая все это, из (3.18) получаем

$$M_{s_2}(\sigma)\leqslant\max_{u\in C_\alpha}|F(u)|\exp\exp\,[2\gamma_2^2|\sigma|^{-1}], \tag{3.20}$$

$0<|\sigma|<\varepsilon_2(\gamma_2)$. Выберем $\gamma_2\in(0,\frac12)$. Так как $\alpha=|\sigma|(1-\gamma_2)+it_1$, то $|\operatorname{Im}u-t_1|\leqslant a_1$, $|\sigma|(1-\gamma_2-\gamma_1)\leqslant\operatorname{Re}u\leqslant|\sigma|(1-\gamma_2+\gamma_1)$ $(\gamma_1=2\gamma_2^2<\gamma_2$ при $0<\gamma_2<\frac12)$, если $u\in C_\alpha$. Следовательно, если функция F имеет в полуполосе S_1 порядок, равный ρ_{s_1}, то из (3.20) окончательно имеем

$$M_{s_2}(\sigma)\leqslant\exp\exp\,[2\gamma_2^2|\sigma|^{-1}]\exp\exp\,[(\rho_{s_1}+\gamma_2)(1-\gamma_2-\gamma_1)^{-1}|\sigma|^{-1}],$$

$0<|\sigma|<\varepsilon_3(\gamma_2)$. Отсюда

$$M_{s_2}(\sigma)\leqslant\exp\exp\,[(\rho_{s_1}+3\gamma_2)(1-\gamma_2-\gamma_1)^{-1}|\sigma|^{-1}],\quad 0<|\sigma|<\varepsilon_4(\gamma_2).$$

Это означает, что порядок ρ_{s_2} в полуполосе S_2 удовлетворяет оценке

$$\rho_{s_2}\leqslant\frac{\rho_{s_1}+3\gamma_2}{1-\gamma_2-\gamma_1},\quad\gamma_1=2\gamma_2^2,\ \ 0<\gamma_2<\frac12.$$

Так как $\gamma_2\in(0,\frac12)$ – любое, то $\rho_{s_2}\leqslant\rho_{s_1}$, если $a_2\geq\pi b$, $a_1=\pi b$, тем более – при $a_1\geq\pi b$. Аналогично показывается и обратное неравенство. Таким образом, $\rho_{s_1}=\rho_{s_2}$ для любых полуполос $S(a_1,t_1)$ и $S(a_2,t_2)$, если $a_1\geq\pi b$, $a_2\geq\pi b$.

Замечание 1. В доказанной теореме $G(R)<\infty$, хотя это утверждение имеет смысл и в том случае, когда $G(R)=\infty$ (следует рассматривать полуполосы вида $S(\infty,t_0)$, совпадающие с полуплоскостью Π_0, а тогда опять $\rho_{s_1}=\rho_{s_2}$). Но теорема 1 не сводится к простому случаю $\rho_s=\rho_R$, где ρ_R – порядок функции F в полуплоскости Π_0 (он вычисляется по формуле (0.5) по коэффициентам), а ρ_s — порядок в полуполосе $S(a,t_0)$, $a\geq\pi b$ (см. в [9], [10]).

Замечание 2. В условиях теоремы 1 при $b = 0$ равенство $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$ верно для любых полуполос $S(a_1, t_1)$, $S(a_2, t_2)$ ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$ — любые). Однако отметим, что аналог теоремы 1 для горизонтальных лучей не верен [16].

Оказывается, как только одна из полуполос имеет ширину меньше $2\pi b$, то теорема тоже не верна, если даже предположить, что $q < \infty$.

Приведем соответствующий пример. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — любая последовательность с конечной плотностью b, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Положим

$$\psi(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda^2}{b_k^2}\right),$$

где числа b_k при $k > N$ определим из равенств

$$\frac{k}{b_k^{\rho(b_k)}} = \Delta, \quad \Delta > 0,$$

при этом числа b_k $(k \leqslant N)$ — любые, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_N$, $\rho(r) = 1 - \frac{\ln\ln r}{\ln r}$ $(r \geqslant e^e)$ (очевидно, это — уточненный порядок). Целая функция ψ имеет минимальный тип при порядке 1, а на вещественной оси [15]

$$(\pi\Delta - \varepsilon)|x|^{\rho(|x|)} \leqslant \ln|\psi(x)| \leqslant (\pi\Delta + \varepsilon)|x|^{\rho(|x|)}$$

при $|x| \geqslant r_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ — любое).

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\Psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k s}}{Q'(\lambda_k)} \quad (s = \sigma + it). \tag{3.21}$$

Для него область сходимости есть полуплоскость Π_0 (так как $q < \infty$, то индекс конденсации последовательности Λ равен 0). Далее, легко убедиться в том, что интеграл

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{e^{\xi s}}{Q(\xi)}\,d\xi \tag{3.22}$$

равномерно сходится внутри полосы

$$S = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi b\}$$

и определяет аналитическую в S функцию $I(s)$, ограниченную в любой полосе $\{s = \sigma + it : |t| \leqslant a < \pi b \quad (a > 0)\}$.

Обычным образом показывается (см., например, в [3], а также в [17, теорема 2.1.4]), что сумма ряда (3.21) аналитически продолжается при помощи интеграла (3.22) в полосу S через интервал $(-\pi bi, \pi bi)$. Но тогда (см. [15, теорема 2.4.1]) ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}e^{\lambda_k s}$$

также сходится в полуплоскости Π_0 и аналитически продолжается по всем кривым, по которым продолжима функция Φ. Следовательно, функция F ограничена в полуполосе $S_1 = S(a_1, 0)$ $(0 < a_1 < \pi b)$, и потому $\rho_{s_1} = 0$. Ее порядок ρ_R по Ритту, очевидно, равен $\pi\Delta + q$. Так как в условиях теоремы 1 функция Q удовлетворяет условиям (0.6), то для любой полуполосы $S_2 = S(a_2, t_0)$ $(a_2 > \pi b)$, как следует из (0.7), $\rho_{s_2} \geqslant \rho_R - q = \pi\Delta > 0$.

С другой стороны, как было показано в теореме 1, $\rho_{S_2} = \rho_b$, где ρ_b – порядок в полуполосе $S(b, t_0)$, а потому $\rho_b > 0$.

Теорема 2. *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условиям теоремы 1.*

Для того, чтобы для всякой функции $F \in D_0(\Lambda)$ ее порядки ρ_{S_1} и ρ_{S_2} в полуполосах $S(a_1, t_1)$ и $S(a_2, t_2)$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них имела ширину не меньше $2\pi b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. F. Ritt *On certain points in the theory of Dirichlet series* // Amer. J. of Math. V. 50, No 1. 1928. P. 73–86.
2. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей.* М.: ИЛ. 1955.
3. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980.
4. Садыхов Г.С. *Вопросы роста функций, определенных рядами Дирихле и другими более общими рядами.* Автореф. канд. дис. Москва. 1968.
5. Шеремета М.Н. *Рост в полосе целых функций, представленных рядами Дирихле* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 45, вып. 2. 1981. С. 674–687.
6. Скасків О.Б. *Асимптотичні властивості аналітичных функцій, представлених степеневими рядами и рядами Діріхле.* Автореф. докт. Львів. 1996.
7. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле, показатели которого — нули целой функции с нерегулярным поведением* // Матем. сб. Т. 185, вып. 2. 1994. С. 33–56.
8. Гайсин А.М. *Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент.* Докт. дис. Уфа. 1994.
9. Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н. *Порядок ряда Дирихле с нерегулярным распределением показателей в полуполосах* // Алгебра и анализ Т. 30, вып. 4. 2018. С. 27-46.
10. Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе* // Матем. сб. Т. 117, вып. 3. 1982. С. 412–424.
11. Аиткужина Н.Н., Гайсин А.М. *Точность оценок для k-порядка ряда Дирихле в полуполосе* // Уфимский матем. журн. Т. 7, вып. 4. 2015. С. 15–24.
12. Гайсин А.М., Сергеева Д.И. *Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей. II* // Сиб. матем. журн. Т. 49, вып. 2. 2008. С. 280–298.
13. Мандельбройт С. *Ряды Дирихле: принципы и методы.* М.: Мир. 1973.
14. Гайсин А.М., Сергеева Д.И. *Целые функции с заданной последовательностью нулей, имеющие правильное поведение на вещественной оси. I* // Сиб. матем. журн. Т. 48, вып. 5. 2007. С. 996–1008.
15. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
16. Гайсин А. М. *Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах* // Матем. заметки. Т. 42, вып. 5. 1987. С. 660–669.
17. Ибрагимов И. И. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* М.: Наука. 1971.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Галия Ахтяровна Гайсина
Башкирский государственный университет,,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinaga@mail.ru