ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 3-11.

УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВНЕШНОСТИ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА, К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Рассматриваются пространства функций, аналитических вне данной ограниченной области D и исчезающих в бесконечности. Для каждого $\alpha > -\frac{1}{2}$ вводится интегрально весовое нормированное пространство $B_2^\alpha(G)$ с весом $d^\alpha(z)$, где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы $G := \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Для $\alpha = -\frac{1}{2}$ пространство B_2^α полагается равным пространству Смирнова. Доказывается, что для выпуклых областей D норму в этих пространствах можно эквивалентно заменить на другие нормы, определяемые через производные. Так норма в пространстве Смирнова, вычисляемая как интеграл по длине дуги границы, эквивалентна некоторой норме, определяемой с помощью интегралов по плоской мере Лебега. Доказываемые результаты в частных случаях были получены при изучении задачи описания классов преобразований Коши функционалов на пространстве Бергмана на области D. Результаты в общем случае могут быть полезны при изучении преобразований Коши функционалов на весовых пространствах Бергмана.

Ключевые слова: аналитические функции, банаховы пространства, выпуклые множества.

Mathematics Subject Classification: 30H05, 46E15

1. Введение

Пусть D — ограниченная односвязная жорданова область на комплексной плоскости, и $G = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Через $d(\zeta),\ \zeta \in G$, обозначим расстояние от точки ζ до границы D :

$$d(\zeta) = \text{dist } (\zeta, \partial D) = \inf_{z \in \partial D} |\zeta - z|, \quad \zeta \in G.$$

Пусть $H_0(G)$ — пространство функций, аналитических в G и исчезающих в бесконечности. Для $\alpha > -\frac{1}{2}$ через $B_2^\alpha(G)$ обозначим пространство, состоящее из функций $\gamma \in H_0(G)$, для которых конечна норма

$$\|\gamma\|_\alpha = \left(\int\limits_G |\gamma(\zeta)|^2 d^{2\alpha}(\zeta)\, dv(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}},$$

N.F. Abuzyarova, K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, Equivalence of norms of analytical functions on exterior of a convex domain.

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002), работа второго и третьего авторов поддержана РФФИ (проект 18-01-00095 А).

Поступила 14 октября 2018 г.

где $dv(\zeta)$ — элемент площади. Для $\alpha = -\frac{1}{2}$ пространство $B_2^\alpha(G)$ будем отождествлять с пространством Смирнова. Считая без потери общности, что $0 \in D$, пространство Смирнова $E_2(G)$ можно определить как пополнение пространства (см. [1]):

$$\left\{ p(\zeta) \text{ – полином}: \ p(0) = 0, \quad \int\limits_{\partial G} \left| p\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right|^2 ds(\zeta) < \infty \right\},$$

где $ds(\zeta)$ — элемент длины дуги границы. Введем натуральное число n и через $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ обозначим пространство функций $\gamma \in H_0(G)$, для которых $\gamma^{(n)} \in B_2^\alpha(G)$. В пространстве $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ рассматривается норма $\|\gamma\|_{n,\alpha} = \|\gamma^{(n)}\|_\alpha$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая точку 0. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, то существуют постоянная $C(\alpha) > 0$, не зависящая от области D и такая, что*

$$\sqrt{\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2}}\|\gamma\|_{n,\alpha} \le \|\gamma\|_{n+1,\alpha+1} \le C(\alpha)\|\gamma\|_{n,\alpha}.$$

Для $\alpha = -\frac{1}{2}$ существуют постоянная $C(n) > 0$, зависящая от области D и такая, что

$$\frac{1}{2}\|\gamma\|_{n,-\frac{1}{2}} \le \|\gamma\|_{n+1,\frac{1}{2}} \le C(n)\|\gamma\|_{n,-\frac{1}{2}}.$$

Тем самым, пространства $B_2^{(n+1,\alpha+1)}(G)$ и $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ совпадают и нормы в них эквивалентны.

В частных случаях теорема доказана в работах [2], [3].

Запись $f(x) \prec g(x),\ x \in X$, для неотрицательных функций f, g будет обозначать, что для некоторой константы C имеет место соотношение $f(x) \le Cg(x)$, $x \in X$. Соответствующий смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$.

2. Доказательство теоремы 1

Предложение 1. *Если функция*

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\gamma_k}{z^{k+1}}$$

принадлежит пространству $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ и $k_\gamma = \min\{k : \gamma_k \ne 0\}$, то $k_\gamma + n > \alpha$.

Доказательство. Поскольку $d(z) \asymp |z|$ и $|\gamma^{(n)}(z)| \asymp |z|^{-(n+1+k_\gamma)}$ при $|z| \longrightarrow \infty$, то

$$\int_R^\infty \frac{r^{2\alpha+1}dr}{r^{2(n+1+k_\gamma)}} \asymp \int_{|z|>R} |\gamma^{(n)}(z)|^2 d^{2\alpha} dv(z) \longrightarrow 0,\ R \longrightarrow \infty,$$

значит, $k_\gamma + n > \alpha$.

□

Докажем правое неравенство теоремы 1 для $\alpha > -\frac{1}{2}$. Воспользуемся теоремой продолжения типа Уитни (см. [4, стр. 203]):

Теорема А. *Пусть F — произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Существует такая функция $\delta(x) = \delta(x, F)$, определенная на $\mathbb{R}^n \setminus F$, что*

1) $c_1\delta(x) \le \operatorname{dist}\,(x, F) \le c_2\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus F$;

2) функция $\delta(x)$ бесконечно дифференцируема и на $\mathbb{R}^n \setminus F$ выполняются оценки

$$\left|\frac{\partial^\beta \delta(x)}{\partial x^\beta}\right| \le B_\beta(\operatorname{dist}\,(x, F))^{1-|\beta|},$$

где B_β, c_1, c_2 не зависят от множества F.

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная односвязная жорданова область. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\gamma \in B_2^{(n,\alpha)}(G)$, то*
$$\|\gamma\|^2_{n+1,\alpha+1} \le C(\alpha)\|\gamma\|^2_{n,\alpha},$$
где $C(\alpha)$ не зависит от области D.

Доказательство. Возьмем ограниченную односвязную жорданову область D' с гладкой границей, содержащую множество $\overline{D}$. Применим теорему A к множеству $\overline{D'}$. Полученную функцию $\delta(z)$, продолженную нулем на $\overline{D'}$, обозначим через $\widetilde{\delta}(z)$. Тогда из теоремы A следует, что при $\alpha > -\frac{1}{2}$ $\widetilde{\delta}^{2\alpha} \in C^1(\mathbb{C})$. Заметим, что для аналитической функции f имеет место формула $|f'|^2 = \frac{1}{4}\Delta|f|^2$, где $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Возьмем число R настолько большое, что $\overline{D'} \subset B(0,R)$ и через G'_R обозначим пересечение $G' \cap B(0,R)$ ($G' = \mathbb{C} \setminus \overline{D'}$). По формуле Грина ([8, стр. 39]), примененной к функциям $|\gamma^{(n+1)}|^2$ и $\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}$ в области G'_R, имеем
$$\int\limits_{G'_R} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) = \frac{1}{4}\int\limits_{G'_R} \Delta|\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{\partial G'_R} \left(\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}|\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\delta^{2(\alpha+1)}(\zeta) - |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\right) ds(\zeta) +$$
$$+ \frac{1}{4}\int\limits_{G'_R} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\Delta\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta). \tag{1}$$
Поскольку $\widetilde{\delta} \in C^1$ и $\widetilde{\delta} \equiv 0$ на $\overline{G'}$, то в первом интеграле в правой части (1) подинтегральная функция обращается в нуль на $\partial G'$:
$$\int\limits_{G'_R} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{|\zeta|=R} \left(\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}|\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\delta^{2(\alpha+1)}(\zeta) - |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\right) ds(\zeta) +$$
$$+ \frac{1}{4}\int\limits_{G'_R} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\Delta\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta). \tag{2}$$

На окружности $|\zeta| = R$ выполняются соотношения
$$|\gamma^{(n)}(\zeta)|^2 \asymp R^{-2(n+k_\gamma+1)}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}|\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\right| \asymp R^{-2(n+k_\gamma)+3},$$
и по теореме A
$$\widetilde{\delta}(\zeta)^{2(\alpha+1)} \asymp R^{2(\alpha+1)}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\right| \asymp R^{2\alpha+1}.$$
Тем самым, при $R \longrightarrow \infty$ первый интеграл в правой части соотношения (2) стремится к нулю. Переходя к пределу, получим
$$\int\limits_{G'} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) = \frac{1}{4}\int\limits_{G'} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\Delta\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta).$$

Применим полученную формулу для последовательности областей D_m со свойствами:

$$\overline{D}_{m+1} \subset D_m, \quad \bigcap_m D_m = \overline{D}.$$

По теореме Лебега можно перейти к пределу при $m \to \infty$:

$$\int\limits_G |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2 \widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\, dv(\zeta) = \frac{1}{4} \int\limits_G |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2 \Delta\widetilde{\delta}^{2(\alpha+1)}(\zeta)\, dv(\zeta).$$

Оценивая $\widetilde{\delta}$ и $\Delta\widetilde{\delta}$, по теореме А получим утверждение леммы 1.

□

Докажем левое неравенство в теореме 1 для выпуклых областей.

Нам потребуются следующие простые свойства функции расстояния до выпуклых множеств.

Предложение 2. *Если D — ограниченная выпуклая область на плоскости, то функция расстояния $d(z) = \inf\{|z-\zeta|,\ \zeta \in D\},\ z \notin D$, обладает свойствами*

1. Функция расстояния $d(\zeta)$ выпукла (в частности, субгармонична) и удовлетворяет условию Липшица

$$|d(\zeta_1) - d(\zeta_2)| < |\zeta_1 - \zeta_2|, \quad \forall \zeta_1, \zeta_2 \in G.$$

2. Нормальная производная функции расстояния тождественно равна -1. Если $d(\zeta)$ дифференцируема в точке ζ_0, то $|\mathrm{grad}\ d(\zeta_0)| = 1$.

3. Если D — выпуклый многоугольник, то $d(\zeta)$ непрерывно дифференцируема в G.

Доказательство.

1. Через $B(z,r),\ r > 0$, будем обозначать круг с центром в точке z и радиуса r. Пусть $\zeta_0 \in G$ и $3d_0 = \mathrm{dist}\ (\zeta_0, \partial D)$. Рассмотрим семейство прямых $\{l_\alpha\}$, отделяющих область D от круга $B(\zeta_0, d_0)$, и пусть $\{P_\alpha\}$ — соответствующее семейство полуплоскостей, содержащих D. Тогда очевидно, что для $\zeta \in B(\zeta_0, d_0)$

$$\mathrm{dist}\ (\zeta, \partial D) = \sup_\alpha \mathrm{dist}\ (\zeta, P_\alpha).$$

Поскольку $\mathrm{dist}\ (\zeta, P_\alpha)$ — линейная функция, то $d(\zeta) = \mathrm{dist}\ (\zeta, \partial D)$ — выпуклая функция. Пусть ζ_1, $\zeta_2 \in G$ и $z_2 \in \partial D$ — точка достижения расстояния $d(\zeta_2)$, то есть $d(\zeta_2) = |z_2 - \zeta_2|$. Тогда

$$d(\zeta_1) - d(\zeta_2) = \inf_{z \in \partial D} |z - \zeta_1| - |z_2 - \zeta_2| \le |z_2 - \zeta_1| - |z_2 - \zeta_2| \le |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Поскольку ζ_1, ζ_2 — равноправные, то

$$|d(\zeta_1) - d(\zeta_2)| \le |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

2. По доказанному в п.1 производные $d(\zeta)$ по направлениям не превосходят по модулю 1:

$$\left| \frac{\partial\, d(\zeta_0)}{\partial l} \right| \le 1.$$

Если $z_0 \in \partial D$ — точка достижения расстояния $d(\zeta_0)$, то производная $d(\zeta)$ по направлению $(\zeta_0 - z_0)/|\zeta_0 - z_0|$ в точке ζ_0 равна единице. Поскольку модуль градиента равен максимальному модулю производных по направлениям, то $|\mathrm{grad}\ d(\zeta_0)| = 1$.

3. Дополнение к выпуклому многоугольнику разбивается на полуполосы, в которых расстояние достигается на одной из сторон многоугольника, и на углы с вершинами в одной из вершин многоугольника. В этих углах расстояние достигается на соответствующей вершине многоугольника. Очевидно, что функция расстояния непрерывно дифференцируема во внутренностях полос и углов. Остается проверить непрерывную дифференцируемость

на граничных лучах. Сдвигом и поворотом один из этих лучей совместим с положительной частью оси ординат так, чтобы одна из сторон многоугольника лежала на положительной части оси абсцисс. Пусть $\zeta_0 = iy_0$, $y_0 > 0$. Слева от ζ_0 расстояние $d(\zeta) = |\zeta|$, справа — $d(\zeta) = \operatorname{Im}\zeta$. Если $\zeta = x + iy$, то слева от ζ_0 имеем

$$\frac{\partial \operatorname{dist}\,(\zeta, D)}{\partial x} = \frac{x}{|\zeta|}, \quad \frac{\partial \operatorname{dist}\,(\zeta, D)}{\partial y} = \frac{y}{|\zeta|},$$

а справа получим

$$\frac{\partial \operatorname{dist}\,(\zeta, D)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial \operatorname{dist}\,(\zeta, D)}{\partial y} \equiv 1.$$

Таким образом, первые частные производные на положительной полуоси ординат "склеиваются".

□

Лемма 2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая точку 0. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, то*

$$\sqrt{\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2}}\|\gamma\|_{n,\alpha} \leq \|\gamma\|_{n+1,\alpha+1}.$$

Доказательство. Возьмем открытый выпуклый многоугольник $D' \supset \overline{D}$. Положим $G' = \mathbb{C} \setminus \overline{D}'$ и функцию dist (ζ, D'), $\zeta \in G'$, продолжим нулем на $\overline{D}'$. Получим выпуклую (в частности субгармоническую) в $\mathbb{C}$ функцию, которую обозначим $\delta(\zeta)$.

Возьмем радиальную гладкую неотрицательную функцию $\alpha(\zeta)$ типа "шапочки" , равную нулю при $|\zeta| \geq 1$ и удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \alpha(\zeta)\, dv(\zeta) = 1.$$

Если функция $u(\zeta)$ — непрерывна в области Ω и для $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon(\zeta) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\mathbb{C}} \alpha\left(\frac{\zeta - z}{\varepsilon}\right) u(z)\, dv(z),$$

то при $\varepsilon \to 0$ функции $u_\varepsilon(\zeta)$ равномерно на компактах из Ω сходятся к $u(\zeta)$ и, кроме того, если $u(\zeta)$ — субгармонична в Ω, то $u_\varepsilon(\zeta)$ также субгармонична в области

$$\Omega_\varepsilon = \{\zeta \in \Omega : \operatorname{dist}\,(\zeta, \Omega) > \varepsilon\}.$$

Свойства гладких регуляризаций описаны в [5, стр. 52].

Возьмем $\varepsilon < \operatorname{dist}\,(\partial D', \overline{D})$ и определим регуляризацию $\delta_\varepsilon(\zeta)$. Функции $\delta_\varepsilon(\zeta)$ субгармоничны, неотрицательны и $\delta_\varepsilon(\zeta) \equiv 0$ в области

$$D'_\varepsilon = \{\zeta \in D' : \operatorname{dist}\,(\zeta, \partial D') > \varepsilon\}.$$

Очевидно, что $D'_\varepsilon \subset D'$ представляет собой выпуклый многоугольник со сторонами, параллельными сторонам D' и отстоящими от соответствующих сторон D' на расстояние ε. При условии $\varepsilon < \operatorname{dist}(\partial D', \overline{D})$ область D'_ε содержит $\overline{D}$, и функция $\gamma \in H_0(G)$, тем самым, голоморфна на $\overline{G}'_\varepsilon = \overline{\mathbb{C}} \setminus D'_\varepsilon$. Так же, как в доказательстве леммы 1, применим формулу Грина к функциям $|\gamma^{(n)}|^2$, $\delta_\varepsilon^{2(\alpha+1)}$ в области $G'_\varepsilon \cap B(0, R)$, затем устремим R к ∞. При этом интеграл по $\partial G'_\varepsilon$ равен нулю из-за функции $\delta_\varepsilon(\zeta)$. Получим

$$\int\limits_{G'_\varepsilon} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2 \delta_\varepsilon^{2(\alpha+1)}(\zeta)\, dv(\zeta) = \frac{1}{4}\int\limits_{G'_\varepsilon} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2 \Delta\delta_\varepsilon^{2(\alpha+1)}(\zeta)\, dv(\zeta).$$

По свойствам регуляризаций δ_ε субгармонична, поэтому

$$\Delta\delta_\varepsilon^{2(\alpha+1)}(z) = 2(\alpha+1)(2\alpha+1)\delta_\varepsilon^{2\alpha}|\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(\mathrm{z})|^2 + 2(\alpha+1)\delta_\varepsilon^{2\alpha+1}\Delta\delta_\varepsilon(\mathrm{z}) \geq$$
$$\geq 2(\alpha+1)(2\alpha+1)\delta_\varepsilon^{2\alpha}|\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(\zeta)|^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{G'_\varepsilon} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2\delta_\varepsilon^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) \geq \frac{2(\alpha+1)(2\alpha+1)}{4}\int\limits_{G'_\varepsilon} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\delta_\varepsilon^{2\alpha}|\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(\mathrm{z})|^2. \tag{3}$$

Поскольку $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\varepsilon$, то $|\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(\mathrm{z})|^2$ равномерно стремится к $|\mathrm{grad}\,\delta(\mathrm{z})|^2$, когда $\varepsilon \longrightarrow 0$. Переходя к пределу в соотношении (3), получим

$$\int\limits_{G'} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2\delta^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) \geq \frac{2(\alpha+1)(2\alpha+1)}{4}\int\limits_{G'} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\delta^{2\alpha}(\zeta)|\mathrm{grad}\,\delta(\zeta)|^2\,\mathrm{dv}(\zeta).$$

По предложению 2 (п.2) $|\mathrm{grad}\,\mathrm{dist}(\zeta, D')| \equiv 1$, поэтому

$$\int\limits_{G'} |\gamma^{(n+1)}(\zeta)|^2\delta^{2(\alpha+1)}(\zeta)\,dv(\zeta) \geq \frac{2(\alpha+1)(2\alpha+1)}{4}\int\limits_{G'} |\gamma^{(n)}(\zeta)|^2\delta^{2\alpha}(\zeta)\,dv(\zeta).$$

Теперь выберем стягивающуюся к D последовательность выпуклых многоугольников $D_n \supset \overline{D}$. Для каждого из них напишем полученное неравенство и перейдем к пределу при $n \to \infty$.

$\square$

Результаты лемм 1 и 2 дают доказательство теоремы 1 для $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Докажем теорему 1 для $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Лемма 3. *Если $\gamma \in E_2(G)$, то*

$$\frac{1}{2}\|\gamma\|^2_{E_2(G)} \leq \|\gamma\|^2_{1,1/2} \leq A(D)\|\gamma\|^2_{E_2(D)},$$

где $A(D)$ — постоянная, зависящая от области D.

Доказательство. По определению, в пространстве $E_2(G)$ подпространство $H_0(\overline{G})$, состоящее из функций, аналитических в $\overline{G}$ и исчезающих в ∞, всюду плотно. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функций γ из $H_0(\overline{G})$. Снова возьмем многоугольник $D' \supset \overline{D}$, через $\delta(\zeta)$ обозначим функцию расстояния $\mathrm{dist}\,(\zeta, D')$ на $G' = \mathbb{C} \setminus \overline{D}'$, продолженную нулем на D'. Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{2}\mathrm{dist}\,(\partial D', \overline{D})$ и как в доказательстве леммы 2 определим регуляризацию $\delta_\varepsilon(\zeta)$. Через G_ε обозначим дополнение к множеству

$$D_\varepsilon = \{\zeta \in D' : \mathrm{dist}\,(\zeta, \partial D') \geq 2\varepsilon\}.$$

Заметим, что в силу условия $\varepsilon < \frac{1}{2}\mathrm{dist}\,(\partial D', \overline{D})$ выполняется включение $D_\varepsilon \supset \overline{D}$. Поэтому $\gamma \in H_0(\overline{G}_\varepsilon)$. Кроме того, $\delta_\varepsilon(\zeta) \equiv 0$ в D_ε. В силу определения D_ε есть многоугольник со сторонами, параллельными сторонам D' и отстоящими от соответствующих сторон на 2ε.

Применим формулу Грина к функции $|\gamma'|^2 = \frac{1}{4}\Delta|\gamma|^2$ и δ_ε в области G_ε. На границе G_ε функции δ_ε и $\frac{\partial \delta_\varepsilon}{\partial n}$ равны нулю. Поэтому получим

$$\int\limits_{G_\varepsilon} |\gamma'(\zeta)|^2\delta_\varepsilon(\zeta)\,dv(\zeta) = \frac{1}{4}\int\limits_{G_\varepsilon} |\gamma(\zeta)|^2\Delta\delta_\varepsilon(\zeta)\,dv(\zeta).$$

Функции $\delta_\varepsilon(\zeta)$ при $\varepsilon \to 0$ стремятся к $\delta(\zeta)$ равномерно на компактах. Функции $\Delta\delta_\varepsilon(\zeta)$ слабо сходятся к обобщенной функции $\Delta\delta(\zeta)$, являющейся неотрицательной борелевской мерой, ассоциированной с субгармонической функцией δ_ε.

Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — вершины многоугольника D' и θ_s, $s = 1, 2, \ldots, k-1$, — направления внешних нормалей к отрезкам $[z_s, z_{s+1}]$, θ_k – направление внешней к D' нормали к отрезку $[z_k, z_1]$. Через l_s, l'_s обозначим лучи

$$l_s = \{z_s + te^{i\theta_s}, \qquad t > 0\}, \qquad s = 1, 2, \ldots, k,$$

$$l'_s = \{z_s + te^{i\theta_{s-1}}, \qquad t > 0\}, \qquad s = 2, 3, \ldots, k,$$

$$l'_1 = \{z_1 + te^{i\theta_k}, \qquad t > 0\}.$$

Замкнутый острый угол между лучами l_s, l'_s с вершиной в точке z_s, $\quad s = 1, 2, \ldots k$, обозначим через V_s. Полуполосы во внешности D', ограниченные лучами l_s, l'_{s+1} и отрезками $[z_s, z_{s+1}]$ ($k+1$ приравниваем 1), обозначим через P_s. Тогда

$$\operatorname{dist}(\zeta, D') = \begin{cases} |\zeta - z_s|, & \text{когда} \quad \zeta \in V_s, \\ Re(\zeta - z_s)e^{-i\theta_s}, & \text{когда} \quad \zeta \in P_s. \end{cases}$$

Нетрудно при этом сосчитать и производные. Если $\zeta = x + iy$, $\quad z_s = x_s + iy_s$, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{dist}(\zeta, D') = \begin{cases} \frac{x-x_s}{|\zeta - z_s|}, & \text{когда} \quad \zeta \in V_s, \\ \cos\theta_s, & \text{когда} \quad \zeta \in P_s. \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{dist}(\zeta, D') = \begin{cases} \frac{y-y_s}{|\zeta - z_s|}, & \text{когда} \quad \zeta \in V_s, \\ \sin\theta_s, & \text{когда} \quad \zeta \in P_s. \end{cases}$$

Из этих формул видно, что первые частные производные непрерывны, частные производные второго порядка существуют на G', причем

$$\Delta\operatorname{dist}(\zeta, D') = \begin{cases} \frac{1}{|\zeta - z_s|}, & \text{если} \quad \zeta \in V_s, \quad \zeta \neq z_s, \\ 0, & \text{если} \qquad \zeta \in P_s. \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда и из формул для первых частных производных следует, что носитель ассоциированной меры $\Delta\delta(\zeta)$ лежит на объединении границы D' и замкнутых углов $\overline{V}_s$. Причем, поскольку производные по внешней нормали к границе D' функции δ имеют единичный скачок, то

$$\Delta\delta(z) = \Delta\operatorname{dist}(z, D') + ds(z),$$

и

$$\int\limits_{G'} |\gamma'(\zeta)|^2 \operatorname{dist}(\zeta, D')\, dv(\zeta) = \frac{1}{4}\int\limits_{G'} |\gamma'(\zeta)|^2 \Delta\operatorname{dist}(\zeta, D')\, dv(\zeta) + \frac{1}{4}\int\limits_{\partial G'} |\gamma(\zeta)|^2\, ds(\zeta), \tag{5}$$

в частности,

$$\int\limits_{G'} |\gamma'(\zeta)|^2 \operatorname{dist}(\zeta, D')\, dv(\zeta) \geq \frac{1}{4}\int\limits_{\partial G'} |\gamma(\zeta)|^2\, ds(\zeta).$$

Тем самым, доказано левое неравенство леммы 3 для многоугольника D'. Для области D требуемое неравенство получим с помощью последовательности многоугольников, стягивающихся к D.

Для доказательства правого неравенства в лемме 3 оценим первый интеграл справа в соотношении (5).

Выберем прямую $L_s = \{z'_s + te^{i\varphi_s}, \quad t \in (-\infty;\infty)\}$, отделяющую область D от угла V_s, и пусть Q_s — полуплоскость, ограниченная этой прямой и содержащая угол V_s. По лемме 2 из работы [6] имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma(z'_s + te^{i\varphi_s})|^2\,dt \le C(D)\int\limits_{\partial D} |\gamma(\zeta)|^2\,ds(\zeta).$$

Тем самым, функция γ принадлежит пространству Харди в полуплоскости Q_s. По теореме Карлесона [7] для $\theta \in [\theta_s;\theta_{s+1}]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} |\gamma(z_s + te^{i\theta})|^2\,dt \le B\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma(z'_s + te^{i\varphi_s})|^2\,dt,$$

где B — абсолютная постоянная. Из последних двух неравенств следует, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} |\gamma(z_s + te^{i\theta})|^2\,dt \le B\cdot C(D)\int\limits_{\partial D} |\gamma(\zeta)|^2\,ds(\zeta).$$

Отсюда и из формулы (4) получим

$$\int\limits_{V_s} |\gamma(\zeta)|^2 \Delta \mathrm{dist}\,(\zeta, D')\,dv(\zeta) = \int\limits_{\theta_s}^{\theta_{s+1}}\int\limits_{0}^{\infty} |\gamma(z_s + te^{i\theta})|^2 \Delta \mathrm{dist}\,(z_s + te^{i\theta}, D')t\,dtd\theta \le$$

$$\le \int\limits_{\theta_s}^{\theta_{s+1}}\int\limits_{0}^{\infty} |\gamma(z_s + te^{i\theta})|^2\,dtd\theta \le B\cdot C(D)(\theta_{s+1}-\theta_s)\int\limits_{\partial D} |\gamma(\zeta)|^2\,ds(\zeta).$$

Снова по формуле (4) с учетом того, что

$$\sum_{s=1}^{k}(\theta_{s+1}-\theta_s) = 2\pi$$

(θ_{k+1} приравнивается к $\theta_1 + 2\pi$), получим

$$\int\limits_{G'} |\gamma(\zeta)|^2 \Delta \mathrm{dist}\,(\zeta, D')\,dv(\zeta) \le 2\pi B\cdot C(D)\int\limits_{\partial D} |\gamma(\zeta)|^2\,ds(\zeta).$$

Подставим эту оценку в (5) и предельным переходом по последовательности выпуклых многоугольников получим правое неравенство в лемме 3 с константой

$$A(D) = \sqrt{\frac{\pi B\cdot C(D)}{2} + \frac{1}{4}}.$$

Лемма 3 и теорема 1 доказаны. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций.* М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Теорема Пэли-Винера в пространствах Смирнова* // Тр. МИАН, 200 (1991). С. 245–254.
3. Напалков В.В.(мл.), Юлмухаметов Р.С. *О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана* // Математический сборник, 185:7 (1994). С. 77–86.
4. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир, 1973.
5. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука, 1971.
6. Кацнельсон В.Э. *О дискретных слабодостаточных множествах в некоторых пространствах целых функций* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1965. №1. С. 99–110.
7. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир, 1984.
8. Хейман У., Кеннеди П. *Субгармонические функции.* М.: Мир, 1980.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: abnatf@gmail.com

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru