ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 4 (2009). С. 119-124.

УДК 512.52

БАЗИСНОСТЬ ПСЕВДОСТЕПЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ

Аннотация. Мы рассматриваем задачу о базисности последовательностей многочленов, похожих в некотором смысле на систему обычных степеней.

Ключевые слова: последовательности многочленов, пространства голоморфных функций.

1. Введение

Обозначим через $\mathbb{N}_0$ множество неотрицательных целых чисел.
Нам понадобятся следующие понятия.

Определение 1. *Последовательность многочленов одной переменной* $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *с комплексными коэффициентами назовем псевдостепенной, если* $p_0 \equiv 1$ *и* $p'_n = np_{n-1}$ *для всех* $n \geqslant 1$.

К таким последовательностям относятся, например, последовательности многочленов Бернулли B_n и Эрмита H_n, определяемые, соответственно, как

$$\frac{\lambda e^{\lambda z}}{e^{\lambda}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{n!}\lambda^n$$

и

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2/2}\left(e^{-z^2/2}\right)^{(n)},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Для многочленов Эрмита имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{z^2/2}\left(e^{-z^2/2}\right)^{(n)}}{n!}\lambda^n = e^{z^2/2}e^{-(z-\lambda)^2/2} = e^{\lambda z - \lambda^2/2},$$

и нужные условия несложно получить, дифференцируя эти равенства по z.

Многочлены Бернулли появились в задачах суммирования функций (см. [1], гл. IV), а многочлены Эрмита — в теории ортогональных многочленов (см. [2], с. 114).

Определение 2. *Последовательность функций* $x_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, *топологического векторного пространства* X *назовем базисом, если произвольная функция* $f \in X$ *единственным образом представима в топологии пространства* X *в виде*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n,\ a_n \in \mathbb{C}.$$

В данной заметке мы найдем все псевдостепенные последовательности многочленов, образующих базис пространства $H(U)$, где U — односвязная плоская область.

S.G. Merzlyakov, The basis property of pseudopower sequences of polynomials.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00 779) и Грантом Президента РФ НШ 3081.2008.1.
Поступила 3 июня 2009 г.

2. Усиленная линейная независимость

Говорят, что система функций $f_n \in H(U)$, $n \in \mathbb{N}_0$ усиленно линейно независима, если для любого числа $m \in \mathbb{N}_0$ функцию f_m нельзя аппроксимировать линейными комбинациями остальных функций этой системы в топологии пространства $H(U)$.

В данном пункте мы найдем критерий усиленной линейно независимости псевдостепенных последовательностей многочленов. Для этого нам понадобится следующее свойство таких последовательностей.

Всюду в дальнейшем будем считать, что система многочленов $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ псевдостепенная.

Лемма 1. *Имеет место представление:*

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p_{n-j}(0) z^j, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. Применим принцип индукции.

Очевидно, для $n = 0$ это верно.

Предположим выполнимость этих равенства для $n \leqslant m$ и покажем, что они будут иметь место и для $n = m + 1$.

Действительно, искомое равенство верно для $z = 0$. Продифференцируем правую часть:

$$\left(\sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} p_{m+1-j}(0) z^j \right)' = \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} p_{m+1-j}(0) j z^{j-1} =$$

$$=(m+1) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p_{m-j}(0) z^j = (m+1) p_m(z) = p'_{m+1}(z),$$

из чего и следует равенство для $n = m + 1$. Лемма доказана.

Многочлен p_n, очевидно, имеет степень n, $n \in \mathbb{N}_0$, поэтому последовательность $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ будет полной в пространстве $H(U)$.

Приведем результат о неполноте системы $\{p_n : n \geqslant m\}$, где $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число.

Предложение 1. *Система*

$$\{p_n : n \geqslant m\} \tag{2. 1}$$

неполна в пространстве $H(U)$ тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(0)}{n!} \lambda^n \tag{2. 2}$$

сходится в некоторой окрестности нуля к функции $\varphi(\lambda)$, которая представляется в виде

$$\varphi(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\psi(\lambda)}, \tag{2. 3}$$

где q — многочлен степени не выше $m - 1$, а $\psi(\lambda) = \left\langle S, e^{\lambda z} \right\rangle$ для некоторого линейного непрерывного функционала $S \in H^*(U)$.

Доказательство. Пусть система (2. 1) не полна в пространстве $H(U)$. В таком случае по теореме Банаха о полноте найдется ненулевой линейный непрерывный функционал $S \in H^*(U)$, что $\langle S, p_n \rangle = 0$ для всех чисел $n \geqslant m$. Положим $\psi(\lambda) = \left\langle S, e^{\lambda z} \right\rangle$. Ясно, что это ненулевая целая функция и $\langle S, z^n \rangle = \psi^{(n)}(0)$.

Применяя лемму 1, получим

$$\langle S, p_n\rangle = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p_{n-j}(0)\psi^{(j)}(0) = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{p_{n-j}(0)}{(n-j)!}\frac{\psi^{(j)}(0)}{j!},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

поэтому в классе формальных степенных рядов имеет место равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(0)}{n!}\lambda^n\right) = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\langle S, p_n\rangle}{n!}\lambda^n.$$

Так как $p_0(0) = 1$, то первый сомножитель и многочлен в правой части имеют в нуле одинаковую кратность, и их отношение будет голоморфной в нуле функцией, что доказывает первую половину утверждения.

Если выполнено обратное, из леммы 1 и равенства (2. 3) получим

$$\langle S, p_n\rangle = \left\langle S, \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p_{n-j}(0)z^j\right\rangle = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p_{n-j}(0)\psi^j(0) = q^{(n)}(0),\ n\in\mathbb{N}_0,$$

из чего и вытекает искомое.

Следствие 1. *Система многочленов $\{p_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ усиленно линейно независима в пространстве $H(U)$ тогда и только тогда, когда ряд (2. 2) сходится в окрестности нуля к функции $\left\langle S, e^{\lambda z}\right\rangle^{-1}$ для некоторого функционала $S\in H^*(U)$.*

Допустим, что указанная система усиленно линейно независима в пространстве $H(U)$, поэтому множество $\{p_n : n\in\mathbb{N}\}$ неполно в этом пространстве, и из предыдущего результата получим необходимое условие на ряд (2. 2).

Предположим теперь, что этот ряд обладает нужными свойствами. В таком случае выполнены равенства $\langle S, p_0\rangle = 1,\ \langle S, p_n\rangle = 0,\ n\in\mathbb{N}$, поэтому для фиксированного числа $m\in\mathbb{N}_0$ и функционала S_m, определенного как $\langle S_m, f\rangle = \left\langle S, f^{(m)}\right\rangle,\ f\in H(U)$, будут, очевидно, выполняться равенства

$$\langle S_m, p_n\rangle = 0,\ n\neq m,\ \langle S_m, p_m\rangle = m!,\ n\in\mathbb{N}_0,$$

что и доказывает искомое.

Приведем примеры, иллюстрирующие вышеизложенное.

Система многочленов Бернулли $\{B_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ усиленно линейно независима в пространстве $H(U)$, если точки $0, 1$ лежат в области U. В данном случае функция, обратная сумме ряда (2. 2), равна

$$\frac{e^{\lambda}-1}{\lambda},$$

и в качестве функционала $S\in H^*(U)$ можно взять

$$\int_C f(t)\,dt,\ f\in H(U),$$

где C — гладкая кривая в области U, соединяющая точки 0 и 1.

Для многочленов Эрмита сумма ряда (2. 2) равна $e^{-\lambda^2/2}$, что, естественно, нельзя представить в виде отношения целых функций экспоненциального типа, поэтому система многочленов $\{H_n : n\geqslant m\}$ полна в пространстве $H(U)$ для любого числа $m\in\mathbb{N}$. То же верно для многочленов Бернулли, если хотя бы одна из точек $0, 1$ не принадлежит области U.

3. Базисы

Для исследования базисности псевдостепенных последовательностей многочленов нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. *Пусть для числа* $\lambda_0 \in \mathbb{C},\ \lambda_0 \neq 0$, *функция* $\exp \lambda_0 z$ *единственным образом представляется в виде*

$$e^{\lambda_0 z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z), \tag{3. 4}$$

сходящегося в топологии пространства $H(U)$.

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{n!} \lambda_0^n \tag{3. 5}$$

сходится в топологии пространства $H(U)$ *и его сумма равна* $\frac{1}{a_0} e^{\lambda_0 z}$.

Доказательство. Продифференцировав равенство (3. 4), получим такое представление

$$\lambda_0 e^{\lambda_0 z} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n p_{n-1}(z),$$

из которого в силу однозначности вытекают равенства $n a_n = \lambda_0 a_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$, так что

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \lambda_0^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Подставляя эти значения в выражение (3. 4), получим

$$e^{\lambda_0 z} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{n!} \lambda_0^n,$$

из чего получим искомое.

Для числа $\sigma > 0$ обозначим через $[1, \sigma)$ пространство целых функций экспоненциального типа меньше σ с обычной топологией.

Нам понадобится следующий результат.

Лемма 3. *Система степеней* $\{z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *образует базис в пространстве* $[1, \sigma)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любой функции $f \in [1, \sigma)$ ее ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в топологии пространства $[1, \sigma)$.

Из формул для порядка и типа целых функций следует существование положительных чисел $a, c, a < \sigma$, с условием $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant c e^{ar},\ r \geqslant 0$, что и влечет искомое (см. [3], с. 469).

Теорема 1. *Псевдостепенная система многочленов* $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *является базисом пространства* $[1, \sigma)$ *тогда и только тогда, когда ряд (2. 2) сходится в круге* $|\lambda| < \sigma$ *и его сумма там отлична от нуля.*

Доказательство. Пусть система $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ является базисом пространства $[1, \sigma)$.

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < \sigma$, функция $\exp \lambda z$ принадлежит пространству $[1, \sigma)$, поэтому выполнены условия леммы 2. Подставляя $z = 0$ в соотношения (3. 5), получим первую половину теоремы.

Обратно, предположим теперь, что ряд (2. 2) сходится в указанном круге к функции φ и $\varphi(\lambda) \neq 0,\ |\lambda| < \sigma$.

Обозначим через H_σ пространство $H(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sigma\})$. Как хорошо известно, пространства $[1, \sigma)$ и H_σ сильно сопряжены друг к другу, и $\langle z^n, f \rangle = f^{(n)}(0),\ n \in \mathbb{N}_0,\ f \in H_\sigma$.

Оператор $A : H_\sigma \to H_\sigma,\ (Af)(\lambda) = \varphi(\lambda)f(\lambda)$, является изоморфизмом пространства H_σ, поэтому сопряженный оператор $A^* : [1,\sigma) \to [1,\sigma)$ также будет изоморфизмом пространства $[1,\sigma)$. Найдем действие этого оператора на степенных функциях.

Поскольку $\varphi^{n-j}(0) = p_{n-j}(0),\ n, j \in \mathbb{N}_0, n \geqslant j$, то по лемме 1 найдем

$$\langle A^* z^n, f\rangle = \langle z^n, \varphi f\rangle = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^{(n-j)}(0) f^{(j)}(0) = \langle p_n, f\rangle,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

из чего заключаем, что $A^* z^n = p_n,\ n \in \mathbb{N}_0$. Но система степеней $\{z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, как показано выше, есть базис пространства $[1,\sigma)$, поэтому и система многочленов $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ будет базисом этого пространства.

Найдем теперь вид разложения по этому базису.

Из леммы 2 следует равенство

$$e^{\lambda z} = a_0(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{n!} \lambda^n,$$

из которого, очевидно, получим

$$e^{\lambda z} = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{n!} \lambda^n,\ z \in \mathbb{C},\ |\lambda| < \sigma,$$

при фиксированном z ряд сходится в топологии пространства H_σ, а при фиксированном λ, из единственности, — в топологии пространства $[1,\sigma)$.

Пусть функция $\alpha \in [1,\sigma)$ и γ — ассоциированная с ней по Борелю функция. Тогда она голоморфна на окружности $C = \{t \in \mathbb{C} : |t| = r\},\ r < \sigma$, и вне C. Используя предыдущее равенство, находим

$$\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(\lambda) e^{\lambda z}\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i n!} \int_C \frac{\gamma(\lambda)\lambda^n}{\varphi(\lambda)}\, d\lambda \right) p_n(z).$$

Терема доказана.

Из этого результата следует, что система многочленов Бернулли будет базисом в пространстве $[1,\sigma),\ \sigma \leqslant 2\pi$, а система многочленов Эрмита — в пространстве $[1,\sigma)$ для любого числа $\sigma > 0$.

Похожим способом можно доказать, что система многочленов Эрмита будет базисом в пространстве целых функций роста не выше второго порядка нулевого типа. Из ортогональности функций Эрмита найдем, что коэффициенты этих разложений равны

$$\frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) B_n(t) e^{-x^2/2}\, dt,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

где функция α принадлежит указанному пространству.

Приведем теперь второй основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Пусть псевдостепенная система многочленов $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ является базисом пространства $H(U)$.*

Тогда найдется такое число $a \in \mathbb{C}$, что $p_n(z) = (z-a)^n,\ n \in \mathbb{N}_0$, а область U совпадает со всей плоскостью или является кругом с центром в точке a.

Доказательство. Вначале предположим, что $0 \in U$.

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $e^{\lambda z}$ принадлежит пространству $H(U)$, поэтому из леммы 2 заключаем, что ряд (2. 2) сходится для всех λ. Но базис пространства $H(U)$ образует усиленно линейно независимую систему (см. [4], с. 622), поэтому из следствия 1 предложения 1 заключаем, что функция $\langle S, e^{\lambda z}\rangle$ для некоторого функционала $S \in H^*(U)$ всюду отлична от нуля. Но она является целой функцией экспоненциального типа и, учитывая равенство $p_(0) = 1$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(0)}{n!}\lambda^n = \exp a\lambda, \ a \in \mathbb{C}.$$

В таком случае, как несложно видеть, $p_n(0) = (-a)^n, \ n \in \mathbb{N}_0$, и искомое очевидным образом вытекает из этих равенств и леммы 1.

Наконец, если $0 \notin U$, то для произвольной точки $z_0 \in U$ система многочленов $\{\tilde{p}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, где $\tilde{p}_n(z) = p_n(z + z_0)$, будет псевдостепенной системой и базисом в пространстве $H(-z_0 + U)$ и теорема следует из предыдущего случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* М.: Физ.-мат. лит. 1959. 400 с.
2. Cеге Г. *Ортогональные многочлены.* М.: Физ.-мат. лит. 1962. 500 с.
3. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез на системах неограниченных выпуклых областей* // Матем. сб., 111(153):3. 1980. С. 384-–401.
4. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1969. 1071 с.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: msg2000@mail.ru