ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 4 (2009). С. 110-118.

УДК 517.518.82

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ЧЕБЫШЕВСКИХ ТЕОРЕМ ОБ АЛЬТЕРНАНСЕ И ФАЗОВОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ НАИЛУЧШИХ С ВЕСОМ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В.И. ЛЕБЕДЕВ

Аннотация. Знаменитые статьи П.Л. Чебышева [1],[3] — о многочленах наилучшего приближения(МНП) — открыли новое направление в математике, получившее затем мощное развитие в работах отечественных математиков. В дальнейшем Ремезом были разработаны [4] методы нахождения параметров этих многочленов, основанные на итерационных методах.

Работа содержит обобщение изложенного в работе [5] фазового метода нахождения наилучших приближений для функций в пространстве $C[-1.1]$ с весом $w(x)$ с помощью чебышевских систем функций, рациональных функций и тригонометрических многочленов. В статье теоремам П.Л. Чебышева об альтернансе придана аналитическая и конструктивная тригонометрическая форма представления взвешенной ошибки $r(x)$ через фазовую функцию $\psi(\theta)$ (ФФ) в виде $E\cos(m\theta+\psi(\theta)), x=\cos\theta$. Сформулированы итерационные методы нахождения параметров приближений. Приведенные примеры численных расчетов показали высокую эффективность предлагаемого метода. Краткое содержание работы изложено в [6].

Ключевые слова: Т-системы, рациональные функции, тригонометрические многочлены, формула чебышевского альтернанса, наилучшие приближения, итерационный фазовый метод.

1. Приближение чебышевскими системами функций

Пусть $f(x), g(x) \in C[-1,1], w(x) = \exp g(x)$ — вес, $f(x)$ — приближаемая функция, $\{u_k(x)\}_0^n$ – чебышевская на $[-1,1]$ система непрерывных функций (Т-система) , а Π_n — класс вещественных (обобщенных) многочленов $Q_n(x)$ не выше n-го порядка вида

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k(x). \tag{1.1}$$

Разнообразные примеры Т-систем содержатся в [7],[8]. Рассмотрим решение следующей экстремальной задачи для $f(x) \notin \Pi_n$.

Найти

$$P_n(x) = \arg \min_{Q_n(x)\in\Pi_n} \max_{x\in[-1,1]} |(f(x)-Q_n(x))w(x)|. \tag{1.2}$$

V.I. Lebedev, On trigonometric form of tchebyshev alternance theorems and on phase iterative method of finding best approximations with weight.

Поступила 28 октября 2009.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00393) и программой РАН "Теоретические проблемы современной математики"(проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики").

Решение этой задачи существует и единственно [7]. Многочлен $P_n(x)$ назовем *многочленом наилучшего приближения на [-1, 1] для $f(x)$ с весом $w(x)$*, или МНП. Пусть $N_A = n+2$, $I_A = N_A - 1$, а ошибка

$$r_n(x) = (f(x) - P_n(x))w(x), \quad e_n = \max_{x\in[-1,1]} |(f(x) - P_n(x))w(x)|. \tag{1.3}$$

Для непериодического случая при $f(x) \notin \Pi_n$ справедлива (см. [7])

Теорема 1 (Чебышева об альтернансе для обобщенных многочленов)**.** *Для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ наименее отклонялся в равномерной норме от функции $f(x) \in C[-1,1]$ с весом $w(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали по крайней мере N_A точек $1 \geq \xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_{I_A} \geq -1$, называемых (e)-точками альтернанса, в которых с последовательной переменой знака достигался $\max\limits_{x\in[-1,1]} |r_n(x)|$.*

Из этой теоремы следует, что существуют по крайней мере I_A точки $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_{I_A})$ таких, что $\xi_0 > y_1 > \xi_1 > \cdots > y_{I_A} > \xi_{N_A}$, в которых $r_n(y_j) = 0, \quad j = \overline{1, I_A}$.

Пусть далее $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{I_A}), x_i \in [-1,1], x_i \neq x_k, L_n(x, \bar{x})$ – интерполяционный многочлен n-го порядка для функции $f(x)$, построенный по ее значениям в точках $\bar{x}$:

$$L_n(x, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{I_A} f(x_k) l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{D_k(x)}{D_k(x_k)}, \tag{1.4}$$

где [7]

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} u_0(x_1) & \cdots & u_0(x_{k-1}) & u_0(x) & u_0(x_{k+1}) & \cdots & u_0(x_{I_A}) \\ u_1(x_1) & \cdots & u_1(x_{k-1}) & u_1(x) & u_1(x_{k+1}) & \cdots & u_1(x_{I_A}) \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ u_n(x_1) & \cdots & u_n(x_{k-1}) & u_n(x) & u_n(x_{k+1}) & \cdots & u_n(x_{I_A}) \end{vmatrix}.$$

Из (1.4) следует, что $P_n(y_j) = L_n(y_j, \bar{y})$. *Следовательно, многочлен $P_n(x)$ можно искать в виде:*

$$P_n(x) = L_n(x, \bar{y}) = \arg\min_{\bar{x}} \max_{x\in[-1,1]} |(f(x) - L_n(x, \bar{x}))w(x)|.$$

Решение этой задачи, определяющее один и тот же интерполяционный многочлен, может быть неединственным относительно $\bar{y}$ в случаях, когда $r_n(x)$ имеет на [-1, 1] более I_A нулей. Реализовывать задачу (1.2) будем по форме по (1.4), определяя расположение корней $\bar{y}$.

Пусть далее $x = \cos\theta, Re\theta \in [0,\pi], T_n(x) = \cos n\theta, U_n(x) = \sin(n+1)\theta/\sin\theta$ – многочлены Чебышева n-ой степени соответственно 1-го и 2-го рода. Тогда для непериодического случая теореме об альтернансе можно придать следующую конструктивную форму представления $r_n(x)$, лежащую *в основе алгоритмов, описывающих движение нулей и e-точек МНП при изменении $w(x)$.*

Теорема 2. *Для того, чтобы $P_n(x)$ был МНП, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа: целое $m \geq I_A$, E_n и функция $\psi_n(\theta) \in C[0,\pi]$, $-\pi < \psi_n(0) \leq 0$, $0 \leq \psi_n(\pi) < \pi$ такие, что*

$$r_n(x) = E_n \cos(m\theta + \psi_n(\theta)) =$$

$$= E_n(\cos\psi_n(\theta) T_m(x) - (1-x^2)^{1/2} \sin\psi_n(\theta) U_{m-1}(x)), \tag{1.5}$$

тогда $e_n = |E_n|$.

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством аналогичной теоремы для случая $u_k(x) = x^k$ [5].

Функцию $\psi_n(\theta)$ назовем *фазовой функцией* (ФФ). Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Если $P_n(x)$ — многочлен n-го порядка, то множество функций $f(x)$, для которых $P_n(x)$ является МНП, представимо формулой $f(x) = P_n(x) + E_n \cos(m\theta + \psi_n(\theta))/w(x)$, где целое $m \geq I_A$, $E_n \neq 0$ и функция $\psi_n(\theta) \in C[0,\pi]$, $-\pi < \psi_n(0) \leq 0$, $0 \leq \psi_n(\pi) < \pi, e_n = |E_n|$.*

Корнями $r_n(x)$ будут

$$y_j = \cos\theta_j, \quad \theta_j = ((j-1/2)\pi - \psi_n(\theta_j))/m, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что для каждого j уравнения в (1.6) имеют единственные решения.

2. Приближение рациональными функциями

Пусть $f(x), g(x) \in C[-1,1], w(x) = \exp g(x)$ — вес, $f(x)$ — приближаемая функция, $P_{n_i}(x), i = 1,2$ — многочлены степени не выше $n_i, \bar{n} = (n_1, n_2)$, а $\Pi_{\bar{n}}$ — класс вещественных дробей $Q_{\bar{n}}(x)$ вида

$$Q_{\bar{n}}(x) = \frac{P_{n_1}(x)}{P_{n_2}(x)}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим решение следующей экстремальной задачи для $f(x) \notin \Pi_{\bar{n}}$.

Найти

$$P_{\bar{n}}(x) = \arg \min_{Q_{\bar{n}}(x) \in \Pi_{\bar{n}}} \max_{x \in [-1,1]} |(f(x) - Q_{\bar{n}}(x))w(x)|. \tag{2.2}$$

Решение этой задачи существует и единственно [9]. Дробь $P_{\bar{n}}(x)$ назовем *дробью наилучшего приближения на [-1, 1] для $f(x)$ с весом $w(x)$* (ДНП).

Пусть $P_{\bar{n}}(x)$ имеет нулевой дефект ($d = 0$) [9] (это означает, что у дроби $P_{\bar{n}}(x)$ нет общих делителей в числителе и знаменателе ее) и $N_A = n_1 + n_2 + 2, I_A = N_A - 1$, а ошибка

$$r_{\bar{n}}(x) = (f(x) - P_{\bar{n}}(x))w(x), \quad e_{\bar{n}} = \max_{x \in [-1,1]} |(f(x) - P_{\bar{n}}(x))w(x)|. \tag{2.3}$$

Тогда для функции $r_{\bar{n}}(x)$ справедлива (см. [9])

Теорема 3 (Чебышева об альтернансе для рациональных приближений)**.** *Для того, чтобы дробь $P_{\bar{n}}(x)$ наименее отклонялась в равномерной норме от функции $f(x) \in C[-1,1]$ с весом $w(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали по крайней мере N_A точек $1 \geq \xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_{I_A} \geq -1$, называемых* ($e$)*-точками альтернанса, в которых с последовательной переменой знака достигается* $\max\limits_{x \in [-1,1]} |r_{\bar{n}}(x)|$.

Из этой теоремы следует, что существуют по крайней мере I_A точки $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_{I_A})$ такие, что $\xi_0 > y_1 > \xi_1 > \cdots > y_{I_A} > \xi_{I_A}$, в которых $r_{\bar{n}}(y_j) = 0, \quad j = \overline{1, I_A}$.

Для определения коэффициентов $P_{n_i}(x), i = 1,2$ решаем линейную систему уравнений

$$f(y_j)P_{n_2}(y_j) - P_{n_1}(y_j) = 0, \quad j = 1, ..., I_A,$$

используя следующий алгоритм. Пусть $P_{n_2}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n_2} d_k x^k, \quad \tilde{y} = (y_1, ..., y_{n_1+1}), \delta_i$ — разделенная разность $n_1 + 1$-го порядка, построенная по $\tilde{y}$ и $y_i, i = n_1 + 2, ..., I_A$:

$$\delta_i f = \frac{f(y_i)}{s_i'(y_i)} + \sum_{k=1}^{n_1+1} \frac{f(y_k)}{s_i'(y_k)}, \quad s_i(x) = (x - y_i) \prod_{k=1}^{n_1+1} (x - y_k).$$

Применяя к системе уравнений оператор δ_i при $i = n_1 + 2, ..., I_A$, получаем n_2 линейных уравнений

$$\delta_i f(x) + \sum_{k=1}^{n_2} d_k \delta_i f(x) x^k = 0, \quad i = n_1 + 2, ..., I_A,$$

решив которые, находим коэффициенты d_k многочлена $P_{n_2}(x)$. Затем $P_{n_1}(x)$ определяем как многочлен Лагранжа по точкам $\tilde{y}$ в виде

$$P_{n_1}(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n_1+1} f(y_k)P_{n_2}(y_k)\frac{l_k}{x-y_k}}{\sum_{k=1}^{n_1+1} \frac{l_k}{x-y_k}}, \quad l_k = \prod_{i\neq k}^{n_1+1} \frac{1}{y_k - y_i}.$$

Окончательно

$$P_{\tilde{n}}(x) = \frac{P_{n_1}(x)}{P_{n_2}(x)}, \quad P_{\tilde{n}}(y_j) = f(y_j), \quad j = 1, ..., I_A. \tag{2.4}$$

Справедлива и теорема о представлении $r_{\tilde{n}}(x)$ в тригонометрическом виде.

Теорема 4. *Для того, чтобы $P_{\tilde{n}}(x)$ была ДНП, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа: целое $m \geq I_A$, $E_{\tilde{n}}$ и функция $\psi_{\tilde{n}}(\theta) \in C[0,\pi], -\pi < \psi_{\tilde{n}}(0) \leq 0$, $0 \leq \psi_{\tilde{n}}(\pi) < \pi$ такие, что*

$$r_{\tilde{n}}(x) = E_{\tilde{n}} \cos(m\theta + \psi_{\tilde{n}}(\theta)) =$$

$$= E_{\tilde{n}}(\cos\psi_{\tilde{n}}(\theta)T_m(x) - (1-x^2)^{1/2}\sin\psi_{\tilde{n}}(\theta)U_{m-1}(x)), \tag{2.5}$$

тогда $e_{\tilde{n}} = |E_{\tilde{n}}|$.

Корни y_j функции $r_{\tilde{n}}(x)$ определены формулами (1.6).

3. Приближение тригонометрическими многочленами

Пусть $f(\theta), g(\theta) \in C[0,2\pi]$ являются 2π-периодическими функциями, $w(\theta) = \exp g(\theta)$ — вес, $f(\theta)$ — приближаемая функция, а $\Pi_{\tilde{n}}$ — класс тригонометрических многочленов $Q_{\tilde{n}}(\theta)$ не выше $\tilde{n}$-го порядка вида

$$Q_{\tilde{n}}(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\tilde{n}}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \tag{3.1}$$

Рассмотрим решение следующей экстремальной задачи для $f(\theta) \notin \Pi_{\tilde{n}}$.

Найти

$$P_{\tilde{n}}(\theta) = \arg \min_{Q_{\tilde{n}}(\theta)\in\Pi_{\tilde{n}}} \max_{\theta\in[0,2\pi)} |(f(\theta) - Q_{\tilde{n}}(\theta))w(\theta)|. \tag{3.2}$$

Решение этой задачи существует и единственно [7]. Многочлен $P_{\tilde{n}}(x)$ назовем *тригонометрическим многочленом наилучшего приближения на* $[0,2\pi)$ *для* $f(\theta)$ *с весом* $w(\theta)$, (ТМНП).

Пусть $N_A = 2n+2, I_A = N_A - 1$, а ошибка

$$r_{\tilde{n}}(\theta) = (f(\theta) - P_{\tilde{n}}(\theta))w(\theta), \quad e_{\tilde{n}} = \max_{\theta\in[0,2\pi)} |(f(\theta) - P_{\tilde{n}}(\theta))w(\theta)|. \tag{3.3}$$

Для периодического случая при $f(\theta) \notin \Pi_{\tilde{n}}$ справедлива (см. [7])

Теорема 5 (Чебышева об альтернансе для тригонометрических многочленов)**.** *Для того, чтобы тригонометрический многочлен $P_{\tilde{n}}(\theta)$ порядка $\tilde{n}$ наименее отклонялся в равномерной норме от функции $f(\theta) \in C[0,2\pi)$ с весом $w(\theta)$, необходимо и достаточно, чтобы на полуотрезке $[0,2\pi)$ существовали по крайней мере N_A e-точек альтернанса $0 \leq \bar{\theta}_0 < \bar{\theta}_1 < \cdots < \bar{\theta}_{I_A} < 2\pi$, в которых с последовательной переменой знака достигался $\max\limits_{\theta\in[0,2\pi)} |r_{\tilde{n}}(\theta)|$.*

Из этой теоремы следует, что существуют по крайней мере I_A точки $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{I_A})$ такие, что $\bar{\theta}_0 < \theta_1 < \bar{\theta}_1 < \cdots < \theta_{I_A} < \bar{\theta}_{N_A}$, в которых $r_{\tilde{n}}(\theta_j) = 0, \quad j = \overline{1, I_A}$.

Интерполяционный тригонометрический многочлен $\tilde{n}$-го порядка для функции $f(\theta)$ строится по значениям $f(\theta_j)$ в I_A точках θ_j:

$$P_{\tilde{n}}(\theta) = \frac{\sum_{k=1}^{I_A} \frac{f(\theta_k)\bar{t}_k}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}}}{\sum_{k=1}^{I_A} \frac{\bar{t}_k}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}}}, \quad \bar{t}_k = \prod_{i\neq k}^{I_A} \frac{1}{\sin\frac{\theta_k-\theta_i}{2}}. \tag{3.4}$$

Справедлива

Теорема 6. *Для того, чтобы $P_{\tilde{n}}(\theta)$ был ТМНП на полуотрезке $[0, 2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа: целое $m \geq \tilde{n}+1$, $E_{\tilde{n}}$ и 2π-периодическая функция $\psi_{\tilde{n}}(\theta) \in C[0, 2\pi], |\psi_{\tilde{n}}(0)| < \pi$ такие, что*

$$r_{\tilde{n}}(\theta) = E_{\tilde{n}} \cos(m\theta + \psi_{\tilde{n}}(\theta)), \tag{3.5}$$

тогда $e_{\tilde{n}} = |E_{\tilde{n}}|$.

Существуют по крайней мере $2m$ точки $\theta_j \in [0, 2\pi)$, в которых $r_{\tilde{n}}(\theta_j) = 0, \quad j = \overline{1, 2m}$. Корнями $r_{\tilde{n}}(\theta)$ будут величины θ_j из формулы (1.6) при $j = 1, ..., 2m$.

4. Сингулярные интегральные операторы с ядром типа Коши и квадратурные формулы

Рассмотрим классы сингулярных интегральных операторов с ядрами типа Коши, определенных на функциях класса H [10], вида

$$\psi(\theta) = BG = \frac{b(\theta)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(G(\varphi) - G(\theta))\, d\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}, \tag{4.1}$$

где $b(\theta) \in H, 0 \leq b(\theta) \leq 1, b(0) = b(\pi) = 0$ и оператор с ядром Гильберта

$$\psi(\theta) = \tilde{H}(G(\varphi) - G(\theta)) = \frac{b(\theta)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot(\frac{\theta-\varphi)}{2}(G(\varphi) - G(\theta))\, d\varphi, \tag{4.2}$$

где $b(\theta) \in H, 0 < b(\theta) \leq 1$. Интегралы понимаются в смысле главного значения. При $b(\theta) = \sin\theta$ формула (4.1) получена Бернштейном и Сегё [12],[13] как асимптотическая формула для ФФ ортогональных и экстремальных многочленов: $\psi_n(\theta) \to \psi(\theta)$ при $n \to \infty$, тогда $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ (канонический случай).

Лемма 1. *Пусть $(c, d) \in [0, \pi], c < d$, $G(\varphi) \in H$ является финитной функцией с носителем (c, d). Тогда существуют $c_1, d_1, c < c_1 \leq d_1 < d$ такие, что для оператора (4.1): 1) при $G(\varphi) \geq 0$ в (c, d) функция $\psi(\theta) \leq 0$, если $0 < \theta < c_1$ и $\psi(\theta) \geq 0$, если $d_1 < \theta < \pi$; 2) при $G(\varphi) \leq 0$ в (c, d) функция $\psi(\theta) \geq 0$, если $0 < \theta < c_1$ и $\psi(\theta) \leq 0$, если $d_1 < \theta < \pi$.*

Для вычисления оператора B получим интерполяционную квадратурную формулу $B_M G$ [5] по узлам

$$\varphi_k = k\pi/M, \quad k = 0, 1, ..., M, \quad M = 2^i m$$

в виде

$$B_M G = C_0(\theta)(G(\varphi_0) - G(\theta)) + C_M(\theta)(G(\varphi_M) - G(\theta)) + \tag{4.3}$$
$$+ \sum_{k=1}^{M-1} C_k(\theta)(G(\varphi_k) - G(\theta)),$$

$$C_k(\theta) = \frac{b(\theta)(1 - (-1)^k \cos M\theta)}{M(\cos\varphi_k - \cos\theta)}, \quad k = 1, ..., M-1, \tag{4.4}$$

$$C_0(\theta)=\frac{b(\theta)(1-\cos M\theta)}{2M(1-\cos\theta)},\ C_M(\theta)=-\frac{b(\theta)(1-(-1)^M\cos M\theta)}{2M(1+\cos\theta)}, \tag{4.5}$$

точную для всех cos-многочленов M-ой степени.

Лемма 2. *Для каждого $k=0,1,...,M$ коэффициент $C_k(\theta)$ как функция от θ таков, что 1) имеет однократный корень: $C_k(\varphi_k)=0$ и двукратные корни: $C_k(\varphi_i)=0$, если $|k-i|$ – четно; 2) $C_k(\theta)\le 0$ при $\theta<\varphi_k$, $C_k(\theta)\ge 0$ при $\theta>\varphi_k$.*

Рассмотрим свойства сингулярный интегральный оператора (4.2). Справедлива

Лемма 3. *Пусть $(c,d)\in[0,2\pi], 0<d-c<\pi$, $G(\varphi)\in H$ является финитной функцией с носителем (c,d). Тогда существуют $c_1,d_1,z,c<c_1\le d_1<d,c+\pi<z<d+\pi$ такие, что 1) при $G(\varphi)\ge 0$ в (c,d) функция $\psi(\theta)\le 0$, если $z-\pi<\theta<c_1$ и $\psi(\theta)\ge 0$, если $d_1<\theta<z$; 2) при $G(\varphi)\le 0$ в (c,d) функция $\psi(\theta)\ge 0$, если $z-\pi<\theta<c_1$ и $\psi(\theta)\le 0$, если $d_1<\theta<z$.*

Формулу (4.2) реализуем с помощью квадратурных формул $\tilde H_M G$. Пусть M — целое,

$$\varphi_k=\beta+\frac{2k\pi}{2M+1},\quad 0\le\beta<\frac{2\pi}{2M+1},\quad k=0,1,...,2M.$$

Тогда квадратурная формула [11]

$$\tilde H_M G=\sum_{k=0}^{2M}C_k(\theta)(G(\varphi_k)-G(\theta)), \tag{4.6}$$

где

$$C_k(\theta)=[\cos\frac{\theta-\varphi_k}{2}-\cos(2M+1)\frac{\theta-\varphi_k}{2}]\frac{b(\theta)}{(2M+1)\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}}$$

будет точна для любого тригонометрического многочлена степени M.

Таким образом, имеем $B1=B_M1=\tilde H1=\tilde H_M1=\sum_k C_k(\theta)=0$.

5. Итерационный метод

Изложим единым текстом итерационный метод решения трех рассмотренных экстремальных задач. Для этого унифицируем обозначения, опустив у функций нижние индексы или обозначения аргумента. В предлагаемом итерационном методе определяются нули для ошибки по формулам (1.6). Важной проблемой является разработка алгоритмов коллективного взаимосвязанного движения нулей $\bar r$–приближения к r, уменьшающих разброс локальных максимумов $|\bar r|$ (в $\bar e$-точках). Формулы (1.6) определяют движение $\theta_j, y_j, \bar\theta_j$ при изменении функции $\psi(\theta)$, из них следует

Лемма 4. *Знаки поправок к θ_j МНП, ДНП, ТМНП противоположны знакам для поправки $\delta\psi(\theta)$ к функции $\psi(\theta)$ в соответствующей точке.*

Изложим сначала *идею* итерационного метода для нахождения ФФ, основанную на применении методов обратного анализа и теории возмущений. Пусть возмущение $w(x)=\exp g(x)$ имеет вид $g+\delta g$, а $\psi(\theta,g)=\psi(\theta)=T(g)$ — неизвестный нам и зависящий и от f,n нелинейный оператор. Тогда приближенно

$$\delta\psi(\theta,g)=\delta\psi(\theta)\approx D\delta g, \tag{5.1}$$

где линейный оператор D является производной по Фреше оператора T по переменной g в точке $(f,g.n)$. Тогда

$$DC=0,\qquad C=const \tag{5.2}$$

и если $\delta\psi_i(\theta)=D\delta g_i, i=1,2$, то

$$\delta\psi(\theta,\delta g_1+\delta g_2)=D(\delta g_1+\delta g_2)=\delta\psi_1+\delta\psi_2. \tag{5.3}$$

Пусть $p=\pi$ для задач (1.2), (2.2) и $p=2\pi$ для задачи (3.2). Естественно предположить, что оператор D обладает при $\theta\in[0,p]$ следующими свойствами:

1) при четной относительно $p/2$ функции $\delta g(\theta)$ функция $\delta\psi(\theta)$ является нечетной относительно $p/2$ функцией

$$\delta\psi(\theta-p/2)=-\delta\psi(p/2-\theta),\text{если}\quad \delta g(\theta-p/2)=\delta g(p/2-\theta); \tag{5.4}$$

2) при нечетной относительно $p/2$ функции $\delta g(\theta)$ функция $\delta\psi(\theta)$ является четной относительно $p/2$ функцией

$$\delta\psi(\theta-p/2)=\delta\psi(p/2-\theta),\text{если}\quad \delta g(\theta-p/2)=-\delta g(p/2-\theta); \tag{5.5}$$

3) если $\delta g(\theta)$ является финитной функцией с носителем $(c,d)\in[0,p], c<d$ и $\delta g(\theta)>0$ в (c,d), то

$$\delta\psi(\theta)>0,\quad \theta\in(0,c),\quad \delta\psi(\theta)<0,\quad \theta\in(d,p) \tag{5.6}$$

и обращается в нуль в некоторой точке (c,d).

Представим ФФ $\psi(\theta)$ в (1.5), (2.5), (3.5) через новую переменную $G=G(\theta)$ по формуле

$$\psi(\theta)=DG \tag{5.7}$$

и пусть известно приближение для ФФ вида $\bar\psi=D\bar G$ через заданную функцию $\bar G$. Предполагая достаточную близость функций G и $\bar G$, найдем приближение для поправки $G-\bar G$ следующим образом.

По $\bar\psi(\theta)$ последовательно находим корни уравнений (1.6) $\theta_j, j=1,..,I_A$, по ним аппроксимации (1.4), (2.4), (3.4), от которых вычисляем ошибку $\bar r$ (1.3), (2.3), (3.3). Затем находим разделенные нулями $\bar r$ локальные максимумы $|\bar r|=m_i$ в N_A точках (назовем их $\bar e$-точками). Пусть Al — непрерывный, монотонный между $\bar e$-точками сплайн, принимающий значения m_i в $\bar e$-точках. Положим $\delta G=-\ln Al$. Тогда функция $\bar r\exp\delta G$ будет иметь в $\bar e$-точках точный чебышевский альтернанс. Следовательно,

$$G\approx\bar G+\delta G,\quad \psi\approx DG. \tag{5.8}$$

За итерируемую переменную возьмем функцию G. Пусть на k-ой итерации получены значения $G^k,\psi^k,\theta_j^k,y_j^k,r^k$. Для простоты изложения предположим, что для любого k имеем канонический случай: число точек приближенного альтернанса равно N_A, т.е. $m=I_A$, а крайние точки его для задач (1.2), (2.2) принадлежат концам отрезка. В этом случае $\psi^k(0)=\psi^k(\pi)=0$. Непосредственно по r^k вычисляем координаты e^k-точек ($\xi_j^k=\cos\bar\theta_j^k$ для задач (1.2), (2.2), $\bar\theta_j^k$ для задачи (3.2)) и m_j^k — значения $|r^k|, j=0,...,I_A$ в этих точках. Пусть для задач (1.2), (2.2) $0=\bar\theta_0^k<\theta_1^k<...<\theta_{I_A}^k<\bar\theta_{I_A}^k=\pi$. Вычислим $s^k=\sum_{k=0}^{I_A}\ln m_j^k/N_A$ и $p_j^k=\ln m_j^k-s^k$. Построим кубический сплайн-интерполянт, основанный на разложении единицы по финитным функциям следующего вида. Пусть $\omega(t)=(t-1)^2(2t+1), t\in[0,1]\,(\omega(0)=1,\omega(1)=\omega'(0)=\omega'(1)=0)$ — шаблонная функция, с помощью которой построим N_A финитных функций $\omega_j^k(\theta)\in C^1[0,\pi],\omega_j^k(\bar\theta_j^k)=1$. В общем случае при $1\le j<I_A$ функция $\omega_j^k(\theta)$ имеет носитель $(\bar\theta_{j-1}^k,\bar\theta_{j+1}^k)$, на котором $\omega_j^k(\theta)=\omega((\bar\theta_j^k-\theta)/(\bar\theta_j^k-\bar\theta_{j-1}^k))$ при $\theta\in(\bar\theta_{j-1}^k,\bar\theta_j^k]$, $\omega_j^k(\theta)=\omega((\theta-\bar\theta_j^k)/(\bar\theta_{j+1}^k-\bar\theta_j^k))$ при $\theta\in(\bar\theta_j^k,\bar\theta_{j+1}^k]$.

При $j=0,I_A$ для задач (3.2) функции $\omega_0^k(\theta),\omega_{I_A}^k(\theta)$ определяются по общим формулам, если в них положить $\bar\theta_{-1}^k=\bar\theta_{I_A}^k,\bar\theta_{N_A}^k=\bar\theta_0^k$, а для задач (1.2), (2.2) функция $\omega_0^k(\theta)$ имеет носитель $[0,\bar\theta_1^k)$, на котором $\omega_0^k(\theta)=\omega(\theta/\bar\theta_1^k)$, функция $\omega_{I_A}^k(\theta)$ имеет носитель $(\bar\theta_{I_A-1}^k,\pi]$, на котором $\omega_{I_A}^k(\theta)=\omega((\pi-\theta)/(\pi-\bar\theta_{IN_A-1}^k))$. Далее полагаем

$$\delta G^k(\theta)=-\sum_{j=0}^{I_A}p_j^k\omega_j^k(\theta),\quad (\delta G^k(\bar\theta_j^k,)=-p_j^k,\quad \sum_{j=0}^{I_A}p_j^k=0). \tag{5.9}$$

Тогда произведение $r^k \exp \delta G^k$ имеет точный чебышевский альтернанс в e^k-точках $\bar\theta_j^k$, $j = 0, ..., I_A$. Поэтому функция $\psi^k(\theta)$ обеспечивает решение возмущенной задачи с весом $w(x) \exp \delta G^k$. Используя методы обратного анализа и теории возмущений, полагаем

$$G^{k+1} = G^k + \beta_k \delta G^k, \quad 0 < \beta_k \leq 1, \quad \psi^{k+1} = DG^{k+1}. \tag{5.10}$$

Затем получаем новые значения θ_j^{k+1} и т. д..

В итерационном методе (5.10) оператор D играет роль идеального переобуславливателя (см. (5.7)). Однако точный вид оператора D неизвестен. Поэтому рассмотрим классы сингулярных интегральных операторов с ядрами типа Коши. Для итерационного решения задач (1.2) и (2.2) возьмем взамен оператора D сингулярный оператор (4.1) B, для вычисления которого применяем квадратурную формулу B_M (4.3)-(4.5). Для итерационного решения задачи (3.2) возьмем взамен оператора D сингулярный оператор (4.2) $\tilde H$, для вычисления которого применяем квадратурную формулу $\tilde H_M$ (4.6). Согласно (5.9), (5.10)

$$\delta\psi^k(\theta) = \sum_{j=0}^{I_A} \delta\psi_j^k(\theta), \quad \delta\psi_j^k(\theta) = -p_j^k D\omega_j^k(\theta), \tag{5.11}$$

где $\omega_j^k(\theta)$ — финитные функции. Поэтому согласно леммам 1 -4 эти операторы, примененные в (5.11) вместо оператора D, разумно определяют алгоритмы движения корней и e^k-точек при возмущении δG^k. При четной относительно $p/2$ функции $b(\theta)$ для них выполнены условия (5.4)-(5.6).

Изменение функций $\psi^k(\theta)$ возможно и с помощью соответствующего выбора функции $b(\theta)$. Так, для задач (1.2), (2.2) при $G, G^k \in H$ и ограниченности на $[0, \pi]$ отношения $\alpha(\theta) = b(\theta)/\sin\theta$ имеем $\psi(0) = \psi_k(0) = \psi(\pi) = \psi_k(\pi) = 0$.

Для неканонического случая в задачах (1.2), (2.2) вместо оператора (5.11) применяем оператор $(p+q)\theta - p\pi + BG, 0 \leq p, q < 1$. Такая замена оператора связана с тем, что факт несовпадения крайних точек альтернанса с концами отрезка $[-1, 1]$ связан, как правило, с достаточно сильным вырождением в соответствующем конце весовой функции $w(x)$. Пусть $\tilde\theta_0^k, \tilde\theta_m^k$ — крайние e^K-точки, то p, q определяем из системы уравнений: $\tilde\theta_m^k(m+p+q) - p\pi + \psi^k(\tilde\theta_m^k) = m\pi, \tilde\theta_0^k(m+p+q) - p\pi + \psi^k(\tilde\theta_0^k) = 0$. Другой метод заключается в регулировании поведения функции $b(\theta)$ в окрестности точек $0, \pi$.

Случай $m > I_A$ требует дополнительных предположений. Разберем одно из них. Пусть известно значение m. Тогда для задач (1.2), (3.2) проводим итерационный метод по выше приведенным формулам, положив в них $I_A = m$, при этом интерполляционный многочлен ((1.4) или ((3.4)) совпадет с искомым многочленом. В задаче (2.2) требуется дополнительно задать n_1 или n_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П.Л. *Теория механизмов, известных под названием параллелограммов.* Избранные труды. Изд. АН СССР. М., 1955. С. 611–648.
2. Чебышев П.Л. *Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций.* Избранные труды. Изд. АН СССР. М., 1955. С. 462–578.
3. Чебышев П.Л. *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля.* Избранные труды. Изд. АН СССР, М., 1955. С. 579–610.
4. Ремез Е.Я. *Основы численных методов чебышевского приближения.* Киев. Наукова думка. 1969. 623 с.
5. Лебедев В.И. *О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения* // Математический сборник. 2008. Т. 199, № 2. С. 49–70.

6. Лебедев В.И. *О представлении и нахождении наилучших приближений с весом* // Кубатурные формулы и их приложения. Материалы X международного семинара-совещания. Улан-Удэ. 2009. С. 49–59.
7. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М.: Наука. 1977.
8. Карлин С., Стадден В. *Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.* М.: Наука. 1976.
9. Попов В.А., Теслер Г.С. *Приближение функций для технических приложений.* Киев. Наукова думка. 1980.
10. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Физматлит. 1962.
11. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* М., ТОО Янус. 1995. 519 с.
12. Бернштейн С.Н. *О многочленах, ортогональных на конечном отрезке.* Собр. соч. Т. 2,. М., Изд. АН СССР. 1954. С. 7–106.
13. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* Гос.изд-во физ.-мат. лит. М., 1962. 500 с.

Вячеслав Иванович Лебедев,
Институт вычислительной математики РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: lebedev@unm.ras.ru