ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 4 (2009). С. 78-109.

УДК 517.5

ОСОБЫЕ ТОЧКИ СУММЫ РЯДА ЭКСПОНЕНТ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В данной работе исследуются особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов. Получен результат, частными случаями которого являются результаты работ Ж. Адамара, Е. Фабри, В. Бернштейна, Ж. Полиа, Карлсона и Ландау. При этом построена специальная функция, которая не имеет особых точек на границе области сходимости своего ряда. Эта функция является обобщением специальной функции из теории рядов Дирихле на случай общих рядов экспоненциальных мономов. Ее существование доказывает необходимость одного из условий основной теоремы, сходного по смыслу с условием равенства нулю индекса конденсации в теореме В. Бернштейна.

Ключевые слова: ряды экспонент, выпуклая область, особая точка.

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность, где λ_k — комплексные числа, которые пронумерованы по неубыванию модулей, $|\lambda_k| \to \infty$, и m_k — натуральные числа. В работе рассматриваются ряды экспоненциальных мономов, построенные по последовательности Λ, т.е. ряды вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \tag{1.1}$$

Изучается задача распределения особых точек суммы этого ряда на границе области его сходимости.

Пусть $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=o}^{\infty,m_k-1}$ — последовательность комплексных чисел. Через $g_d(z)$ и $D(\Lambda, d)$ обозначим соответственно сумму этого ряда и открытое ядро множества всех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых он сходится. В общем случае множество $D(\Lambda, d)$ может быть невыпуклым (см. [1]) и не является даже связным (см. [2]). Если же выполнены условия

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{m_k}{|\lambda_k|} = 0, \quad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{\xi_j} = 0,$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно m_k раз, то по теореме Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов (см. [2]) $D(\Lambda, d)$ будет выпуклой областью (возможно пустой), которая описывается при помощи коэффициентов $\{d_{k,n}\}$. Более того, при этих же условиях по теореме Абеля (см. [2]) для подобных рядов в области $D(\Lambda, d)$ ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. В частности это означает, что его сумма $g_d(z)$ есть аналитическая функция в $D(\Lambda, d)$.

O.A. Krivosheyeva, The singular points of series of exponents on the boundary of convergence domain.

Поступила 18 октября 2009 г.

Символом $\mathfrak{A}(\Lambda)$ будем обозначать множество всех последовательностей коэффициентов $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=o}^{\infty,m_k-1}$ ряда (1.1), для которых множество $D(\Lambda, d)$ не пусто, а функция $g_d(z)$ — аналитическая в $D(\Lambda, d)$. Пусть $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$. Будем говорить, что точка $z \in \partial D(\Lambda, d)$ особая для функции $g_d(z)$, если она аналитически не продолжается ни в какую окрестность этой точки.

Задача описания множества особых точек функции g_d на границе области $D(\Lambda, d)$ имеет долгую историю. Ее истоки лежат в начатых еще в позапрошлом веке исследованиях областей существования функций, представимых в виде степенных рядов. Эти ряды являются частными случаями рядов Дирихле, т.е. рядов вида (1.1), где $m_k \equiv 1$ и λ_k — отрицательные числа. При помощи замены $w = \exp(-z)$ степенной ряд переходит в ряд Дирихле. В 1892 г. Ж. Адамар [3] доказал, что если функция g представляется рядом

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^{k(n)} \tag{1.2}$$

с пропусками $k(n+1) - k(n) \geq \alpha k(n)$, где α — положительное число, не зависящее от n, то граница круга сходимости этого ряда является естественной границей области существования функции g, т.е. каждая точка этой границы является особой для g. Е. Фабри [4] в 1896 г. доказал, что утверждение Адамара сохраняется при более общем условии на последовательность показателей, а именно, последовательность $\{k(n)\}$ должна иметь нулевую плотность:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{k(n)} = 0.$$

Ж. Полиа [5], [6], а также Карлсон и Ландау (см., например, [7], гл II, § 5.2) распространили этот результат на случай рядов Дирихле. Они показали, что если функция g представляется в виде ряда Дирихле

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(-\lambda_k z) \tag{1.3}$$

с последовательностью положительных показателей $\Lambda = \{\lambda_k\}$, имеющей нулевую плотность, и выполнено неравенство $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то либо $g(z)$ — целая функция, либо прямая сходимости (вертикальная прямая, ограничивающая полуплоскость сходимости ряда Дирихле) является естественной границей области существования этой функции. Этот результат является частным случаем более общего утверждения В. Бернштейна [8]. Он доказал, что при условиях

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau, \qquad \gamma(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = 0,$$

где

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right),$$

каждый отрезок длины $2\pi\tau$ прямой сходимости ряда (1.3) (если таковая имеется) содержит по крайней мере одну особую точку функции $g(z)$. Отсюда, в частности, следует обобщение теоремы Фабри: если последовательность степеней $\{k(n)\}$ ряда (1.2) имеет плотность $\tau = \lim n/k(n)$, то каждая замкнутая дуга границы его круга сходимости углового раствора $2\pi\tau$ содержит хотя бы одну особую точку функции $g(w)$. Отметим, что утверждение В. Бернштейна ранее было доказано Ж. Полиа [5] при более сильном ограничении на последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ В книге [9], гл. II, § 3.3 строится специальная функция, которая является суммой ряда Дирихле и при условии $\gamma(\Lambda) \neq 0$ не имеет особых точек на прямой сходимости. Существование такой функции говорит о том, что условие $\gamma(\Lambda) = 0$ в теореме В. Бернштейна необходимо.

А.Ф. Леонтьев [9] обобщил результаты Е. Фабри, Ж. Полиа и В. Бернштейна на случай рядов экспонент (т.е. рядов вида (1.1), где $m_k \equiv 1$) с последовательностью показателей, имеющей нулевую плотность. Он доказал, что при этом условии и дополнительном условии $\gamma(\Lambda) = 0$ область сходимости ряда экспонент совпадает с областью аналитичности суммы ряда. Отсюда, в частности, следует, что последняя является выпуклой.

В связи с рассматриваемой задачей отметим еще стоящие несколько особняком работы А. Островского [10] и Г.Л. Лунца [11], [12]. В первой из этих работ изучаются ряды Дирихле с последовательностью показателей, имеющей конечную максимальную плотность

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{\lambda_k} = \alpha > 0.$$

Известная теорема А. Островского (см. также [20], [7], теорема 2.4.7) утверждает, что при условии

$$\underline{\lim}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = h \tag{1.4}$$

функция (1.3) в каждом замкнутом круге радиуса $r(\alpha, h) = \pi\alpha^* + 3(3 - \ln(h\alpha))\alpha$ с центром в точке на прямой сходимости ряда имеет хотя бы одну особую точку. Здесь α^* — усредненная верхняя плотность последовательности $\{\lambda_k\}$ (см. [7]), для которой имеют место оценки $\alpha^* \leqslant \alpha \leqslant e\alpha^*$. Отметим, что из определения верхней плотности следует неравенство $\alpha \leqslant 1/h$. При условии (1.4) последовательность $\{\lambda_k\}$ всегда можно пополнить (см., например, [1]) до последовательности, имеющей плотность, которая не превосходит числа $1/h$. Тогда по теореме Полиа (или теореме Бернштейна) функция (1.3) имеет хотя бы одну особую точку на каждом отрезке по крайней мере длины $2\pi/h$, лежащем на прямой сходимости ряда. Если верхняя плотность α не сильно отличается от $1/h$, то число $2\pi/h$ существенно меньше, чем $r(\alpha, h)$. В этом случае результат, получаемый при помощи теоремы Полиа, лучше результата теоремы А. Островского. Таким образом, в контексте изучаемой нами задачи результаты работы [10] становятся содержательными лишь для рядов Дирихле специального вида, когда верхняя плотность α последовательности $\{\lambda_k\}$ намного меньше числа $1/h$. В этом случае показатели этих рядов должны быть сосредоточены, в основном, в группах, отстоящих друг от друга на значительном расстоянии на прямой. В этой связи возникает естественный вопрос о применимости результата теоремы А. Островского к задаче распределения особых точек суммы ряда Дирихле на прямой его сходимости.

В работах Г.Л. Лунца изучаются уже общие ряды экспонент. Здесь получены тонкие интересные результаты по распределению множества особых точек на границе области сходимости ряда экспонент. Однако речь идет не о множестве особых точек суммы $g(z)$ этого ряда, а о множестве особых точек всех его "частных сумм"$g(z, \Gamma)$. Функция $g(z, \Gamma)$ является суммой лишь тех членов ряда, показатели которых лежат в угле Γ. Множество особых точек всех функций $g(z, \Gamma)$ (включая и $g(z) = g(z, \mathbb{C})$) существенно шире множества особых точек функции $g(z)$. Для примера рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)}, \tag{1.5}$$

где

$$L(\lambda) = \frac{\sin\lambda \sin(i\lambda)}{\lambda^2}$$

и $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность нулей функции $L(\lambda)$, состоящая из точек вещественной и мнимой оси $\pm\pi n$ и $\pm i\pi n$, $n = 1, 2, \ldots$ Областью сходимости ряда (1.5) является квадрат с вершинами в точках $1 + i, i - 1, 1 - i, -1 - i$, а его сумма тождественно равна нулю, а потому не имеет особых точек (см. [9], гл. II, § 2.3). В то же время каждая из четырех "частных сумм"$g(z, \Gamma)$ ряда (1.5), построенных по точкам λ_k, лежащим на положительной и отрицательной вещественной и мнимой полуоси, имеет хотя бы одну особую точку на соответствующей стороне квадрата. Действительно, пусть $g(z, \Gamma)$ — сумма ряда Дирихле, построенного по отрицательным точкам λ_k. Последовательность показателей этого ряда имеет плотность $\tau = 1/\pi$, и расстояние между соседними показателями равно единице. Тогда по цитируемой выше теореме Полиа функция $g(z, \Gamma)$ имеет хотя бы одну особую точку на каждом отрезке длины 2 на прямой сходимости (вертикальной прямой, содержащей отрезок $[-1 - i, i - 1]$). Сказанное относится и к остальным трем частным суммам ряда (1.5).

В данной работе исследуются особые точки общего ряда (1.1). Получен результат, частными случаями которого являются результаты отмеченных выше работ за исключением трех последних. При этом построена специальная функция, которая не имеет особых точек на границе области сходимости своего ряда. Эта функция является обобщением указанной выше специальной функции из теории рядов Дирихле на случай общих рядов экспоненциальных мономов. Ее существование доказывает необходимость одного из условий основной теоремы, сходного по смыслу с условием $\gamma(\Lambda) = 0$ в теореме В. Бернштейна. В предпоследнем параграфе работы дается исчерпывающий ответ на вопрос о том, когда область существования суммы ряда (1.1) является выпуклой и совпадает с областью сходимости ряда. Следствием этого результата является утверждение, обратное к теореме Фабри. Показывается, что условие $\lim_{n\to\infty} n/k(n) = 0$ не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы область существования суммы любого ряда (1.2) совпадала с кругом сходимости этого ряда. Наконец, в последнем параграфе дается ответ на поставленный выше вопрос относительно результата теоремы А. Островского. Здесь приводится пример, из которого, в частности, вытекает, что в условиях этой теоремы расстояние между особыми точками суммы ряда Дирихле на прямой его сходимости может достигать величины порядка $O(1/h)$ (а не только порядка $O(-\ln h)$, как число $r(\alpha, h)$). Это означает, что результат теоремы А. Островского по существу относится к особым точкам суммы ряда Дирихле, лежащим не на прямой сходимости, а лишь в ее окрестности. Кроме того, указанный пример дает также оценку снизу на величину этой окрестности. Оказывается, что за эту оценку отвечает верхняя плотность α последовательности $\{\lambda_k\}$.

2. Характеристики комплексной последовательности

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые известные характеристики распределения точек комплексной последовательности и изучим некоторые взаимосвязи между ними.

Следуя работам [13, 14] для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ введем величину, характеризующую меру сгущения точек λ_k. Положим

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{m_k},$$

$$q_\Lambda^j(z, \delta) = q_\Lambda(z, \lambda_j, \delta) \left(\frac{z - \lambda_j}{3\delta|\lambda_j|}\right)^{-m_j}.$$

Здесь $B(w, r)$ — открытый круг с центром в точке w и радиуса r. Модуль функции $q_\Lambda(z, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ около точки z. В случае, когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной из точек λ_k, считаем, что $q_\Lambda(z, w, \delta) \equiv 1$. Отметим, что модуль каждого из сомножителей в определении q_Λ в круге $B(w,\delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$ (для $\delta\in(0,1)$), т.е. при $\delta\in(0,1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1\leqslant\delta_2$ и имеет место вложение $B(w_1,\delta_1|w_1|)\subseteq B(w_2,\delta_2|w_2|)$, то число сомножителей в определении $q_\Lambda(z,w_1,\delta_1)$ не превосходит числа сомножителей в определении $q_\Lambda(z,w_2,\delta_2)$, и каждый из сомножителей для $q_\Lambda(z,w_1,\delta_1)$ по модулю не меньше соответствующего сомножителя для $q_\Lambda(z,w_2,\delta_2)$. Таким образом,

$$|q_\Lambda(z,w_1,\delta_1)|\geq|q_\Lambda(z,w_2,\delta_2)|,\quad z\in\mathbb{C},$$

если $0<\delta_1\leqslant\delta_2<1/3$ и $B(w_1,\delta_1|w_1|)\subseteq B(w_2,\delta_2|w_2|)$. Аналогичное неравенство верно и для функции $q_\Lambda^j(z,\delta)$:

$$|q_\Lambda^j(z,\delta_1)|\geq|q_\Lambda^j(z,\delta_2)|,\quad z\in\mathbb{C},\tag{2.1}$$

если $0<\delta_1\leqslant\delta_2<1/3$.

Положим $S_\Lambda=0$, если Λ состоит из конечного числа элементов и

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to0}\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|}$$

в противном случае. Это определение корректно, поскольку согласно (2.1) предел по δ всегда существует. В силу сказанного выше верно неравенство $S_\Lambda\leqslant0$. Величина S_Λ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации последовательности Λ (см. [7],[15]). Следуя работе [14], введем еще величину

$$M_\Lambda=\lim_{\delta\to0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{M_\Lambda(\lambda_k,\delta)}{|\lambda_k|},$$

где $M_\Lambda(w,\delta)=\sum_{\lambda_k\in B(w,\delta|w|)}m_k$. При этом считаем $M_\Lambda=0$, если Λ конечна. Очевидно, что $M_\Lambda\geq0$ и

$$M_\Lambda(w_1,\delta_1)\leqslant M_\Lambda(w_2,\delta_2),\quad\text{если}\quad B(w_1,\delta_1|w_1|)\subseteq B(w_2,\delta_2|w_2|).\tag{2.2}$$

Отсюда следует корректность определения величины M_Λ. Нетрудно заметить также, что верно неравенство $m(\Lambda)\leqslant M_\Lambda$ (число $m(\Lambda)$ определено во введении).

Предположим, что последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, т.е.

$$N(\Lambda)=\overline{\lim_{l\to\infty}}\frac{l}{|\eta_l|}<\infty,$$

где $\{\eta_l\}$ составлена из точек последовательности $\{\lambda_k\}$, причем каждая λ_k встречается в последовательности $\{\eta_l\}$ ровно m_k раз. Это равносильно тому (см., например [15]), что Λ является частью нулей целой функции экспоненциального типа f. Другими словами, функция f обращается в ноль во всех точках λ_k с кратностью не меньшей, чем m_k. Нетрудно заметить, что выполнено неравенство $M_\Lambda\leqslant N(\Lambda)$.

Проиллюстрируем на примерах введенные величины. Пусть $\lambda_{2k}=k$, $\lambda_{2k-1}=k-e^{-\varepsilon k}$, $k=1,2,\ldots$, где $\varepsilon>0$. Легко заметить, что в этом случае $N(\Lambda)=2$ и

$$M_\Lambda\leqslant\lim_{\delta\to0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{2\delta|\lambda_k|}{|\lambda_k|}=0.$$

Подсчитаем S_Λ. Пусть $\delta\in(0,1/3)$. Поскольку при таком δ числа $(z-\lambda_k)/3\delta|\lambda_k|$ по модулю не превосходят единицы, то мы имеем:

$$|q_\Lambda^{2k}(\lambda_{2k},\delta)|\leqslant\left|\left(\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{3\delta|\lambda_{2k-1}|}\right)\right|\leqslant\frac{e^{-\varepsilon k}}{3\delta(k-e^{-\varepsilon k})}.$$

Следовательно,

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{l\to\infty} \frac{\ln|q^l_\Lambda(\lambda_l,\delta)|}{|\lambda_l|} \leqslant \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{k\to\infty} k^{-1} \ln\left(\frac{e^{-\varepsilon k}}{3\delta(k-e^{-\varepsilon k})}\right) = -\varepsilon.$$

Таким образом, в данном примере величина S_Λ отрицательна и характеризует расстояние между соседними точками λ_{2k} и λ_{2k-1}. Оно стремится к нулю со скоростью $e^{-\varepsilon k}$, где $-\varepsilon \geq S_\Lambda$. Простого стремления к нулю расстояния между соседними точками уже недостаточно для отрицательности числа S_Λ, что и показывает следующий пример.

Пусть теперь $\lambda_{2k} = k$ и $\lambda_{2k-1} = k - e^{-\varepsilon(k)k}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\varepsilon(k) \to 0$ и $e^{-\varepsilon(k)k} \to 0$ при $k \to \infty$ (например, $\varepsilon(k) = 1/\sqrt{k}$). Величины $N(\Lambda)$ и M_Λ в данном случае те же, что и в предыдущем примере. Найдем S_Λ. Имеем:

$$\ln|q^{2k}_\Lambda(\lambda_{2k},\delta)| \geq \sum_{\lambda_l\in B(\lambda_{2k},\delta|\lambda_{2k}|),\lambda_l\neq\lambda_{2k}} \ln\left|\frac{\lambda_{2k}-\lambda_l}{3\delta|\lambda_l|}\right|.$$

Пусть $\delta \in (0, 1/3)$. Тогда слагаемые справа в этом неравенстве отрицательны. Увеличение их числа только усилит его. Поэтому, добавляя при необходимости к правой части неравенства слагаемые, построенные по точкам λ_l, лежащим в круге $B(\lambda_{2k}, \delta|\lambda_{2k}| + 2)$, но вне круга $B(\lambda_{2k}, \delta|\lambda_{2k}|)$, получаем

$$\ln|q^{2k}_\Lambda(\lambda_{2k},\delta)| \geq \sum_{-2r(k)-1\leqslant l\leqslant 2r(k)} \ln\left|\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k+l}}{3\delta|\lambda_{2k+l}|}\right|,$$

где $\delta|\lambda_{2k}| - 1 < r(k) < \delta|\lambda_{2k}| + 1$. Пусть $e^{-\varepsilon(k)k} < 1/2$. Тогда согласно определению чисел λ_k выполнены неравенства: $|\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}| = e^{-\varepsilon(k)k}$, $|\lambda_{2k} - \lambda_{2k+l}| = m$, если $l = 2m$, и $|\lambda_{2k} - \lambda_{2k+l}| \geq m - 1/2 \geq m/2$, если $l = 2m - 1$. Следовательно,

$$\ln|q^{2k}_\Lambda(\lambda_{2k},\delta)| \geq -\varepsilon(k)k + \ln\frac{(r(k)!)^4}{4^{r(k)}(3\delta((1+\delta)k+2))^{4r(k)}}.$$

Здесь мы воспользовались также оценкой $|\lambda_{2k+l}| \leqslant (1+\delta)|\lambda_{2k}| + 2 = (1+\delta)k + 2$, которая верна, т.к. все точки λ_{2k+l}, участвующие в сумме, лежат в круге $B(\lambda_{2k}, \delta|\lambda_{2k}|+2)$. Учитывая теперь, что $k! \geq 3^{-k}k^k$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $\delta \in (0, 1/3)$, получаем

$$\ln|q^{2k}_\Lambda(\lambda_{2k},\delta)| \geq -\varepsilon(k) + 4r(k)\ln\frac{r(k)}{3\sqrt{2}(3\delta((1+\delta)k+2))} \geq$$

$$\geq -\varepsilon(k)k + 4r(k)\ln\frac{r(k)}{12(k+1)}.$$

Поскольку $\delta|\lambda_{2k}| - 1 < r(k) < \delta|\lambda_{2k}| + 1$, то выражение, стоящее под знаком логарифма в последнем неравенстве справа отрицательно. Поэтому мы имеем:

$$\frac{\ln|q^{2k}_\Lambda(\lambda_{2k},\delta)|}{|\lambda_{2k}|} = \frac{\ln|q^{2k}_\Lambda(\lambda_{2k},\delta)|}{k} \geq -\varepsilon(k) + \frac{4(\delta|\lambda_{2k}|+1)}{k}\ln\frac{\delta|\lambda_{2k}|-1}{12(k+1)} =$$

$$= -\varepsilon(k) + \frac{4(\delta_k+1)}{k}\ln\frac{\delta_k-1}{12(k+1)}.$$

Аналогично показывается, что верна следующая оценка

$$\frac{\ln|q^{2k-1}_\Lambda(\lambda_{2k-1},\delta)|}{|\lambda_{2k-1}|} \geq -\frac{\varepsilon(k)k}{k-e^{-\varepsilon(k)k}} + \frac{4(\delta k+1)}{k-e^{-\varepsilon(k)k}}\ln\frac{\delta_k-1}{12(k+1)}.$$

Таким образом, в силу выбора чисел $\varepsilon(k)$ получаем

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|} \geq \lim_{\delta\to 0} 4\delta\ln\frac{\delta}{12} = 0.$$

Приведем еще один пример, иллюстрирующий величину S_Λ, который к тому же понадобится нам позже. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, где λ_k — положительные числа такие, что для некоторого $h > 0$ выполнены неравенства $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h$. Подсчитаем S_Λ. Имеем:

$$\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)| = \sum_{1\leqslant l\leqslant s(k)}\ln\left|\frac{\lambda_k - \lambda_{k-l}}{3\delta|\lambda_{k-l}|}\right| + \sum_{1\leqslant l\leqslant p(k)}\ln\left|\frac{\lambda_k - \lambda_{k+l}}{3\delta|\lambda_{k+l}|}\right|,$$

где $s(k)$ — число точек λ_l из круга $B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$, лежащих левее λ_k, и $p(k)$ — число точек λ_l из круга $B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$, лежащих правее λ_k. По построению $|\lambda_k - \lambda_{k+l}| \geq lh$. Следовательно, для всех $\delta \in (0,1/3)$ имеем:

$$\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)| \geq \ln\frac{h^{s(k)}s(k)!}{(3\delta(1+\delta)|\lambda_k|)^{s(k)}} + \ln\frac{h^{p(k)}p(k)!}{(3\delta(1+\delta)|\lambda_k|)^{p(k)}} \geq$$

$$\geq \ln\frac{h^{s(k)}s(k)!}{(6|\lambda_k|)^{s(k)}} + \ln\frac{h^{p(k)}p(k)!}{(6|\lambda_k|)^{p(k)}} \geq \ln\frac{h^{s(k)}(s(k))^{s(k)}}{(18|\lambda_k|)^{s(k)}} + \ln\frac{h^{p(k)}(p(k))^{p(k)}}{(18|\lambda_k|)^{p(k)}} \geq$$

$$\geq s(k)\ln\frac{hs(k)}{18|\lambda_k|} + p(k)\ln\frac{hp(k)}{18|\lambda_k|}.$$

Заметим, что согласно определению чисел $s(k)$, $p(k)$ и λ_l выполнены неравенства

$$\frac{s(k)}{|\lambda_k|} \leqslant \frac{M_\Lambda(\lambda_k,\delta)}{|\lambda_k|} \leqslant \frac{2\delta|\lambda_k|}{h|\lambda_k|} = \frac{2\delta}{h}, \qquad \frac{p(k)}{|\lambda_k|} \leqslant \frac{M_\Lambda(\lambda_k,\delta)}{|\lambda_k|} \leqslant \frac{2\delta}{h}.$$

Кроме того, функция $x\ln(hx/18)$ убывает, когда $hx/18 < 1$. Поэтому, учитывая предыдущие неравенства, получаем

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|} \geq \lim_{\delta\to 0}\underline{\lim}_{k\to\infty}\left(\frac{s(k)}{|\lambda_k|}\ln\frac{hs(k)}{18|\lambda_k|} + \frac{p(k)}{|\lambda_k|}\ln\frac{hp(k)}{18|\lambda_k|}\right) \geq$$

$$\geq \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{2\delta}{h}\ln\frac{2\delta}{18} + \frac{2\delta}{h}\ln\frac{2\delta}{18}\right) = 0.$$

Исследуем теперь некоторые взаимосвязи между введенными характеристиками последовательности Λ. Прежде всего заметим, что во всех рассмотренных примерах $M_\Lambda = 0$. При этом величина S_Λ может быть как отрицательной, так и равной нулю. Ситуация меняется, если $M_\Lambda > 0$.

Лемма 2.1. *Пусть $\delta \in (0,1)$. Имеет место неравенство*

$$\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)| \leqslant \ln\frac{1}{3(1-\delta)}(M_\Lambda(\lambda_k,\delta) - m_k), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Если последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $m(\Lambda) = 0$ и $M_\Lambda \geq \tau > 0$, то $S_\Lambda \leqslant -\tau\ln 3$.

Доказательство. Согласно определению функции $q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)$ имеем:

$$\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)| = \sum_{\lambda_l\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),\lambda_l\neq\lambda_k} m_l\ln\left|\frac{\lambda_k - \lambda_l}{3\delta|\lambda_l|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda_l\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),\lambda_l\neq\lambda_k} m_l\ln\frac{\delta|\lambda_k|}{3\delta(1-\delta)|\lambda_k|} =$$

$$= \ln\frac{1}{3(1-\delta)}\sum_{\lambda_l\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),\lambda_l\neq\lambda_k} m_l = \ln\frac{1}{3(1-\delta)}(M_\Lambda(\lambda_k,\delta)-m_k).$$

Пусть $M_\Lambda \geq \tau > 0$ и $m(\Lambda)=0$. Поскольку коэффициент $-\ln(3(1-\delta))$ для малых $\delta>0$ отрицателен, то из предыдущего получаем

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\ln|q^k_\Lambda(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|} \leqslant \lim_{\delta\to 0}\ln\frac{1}{3(1-\delta)}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{(M_\Lambda(\lambda_k,\delta)-m_k)}{|\lambda_k|} =$$

$$= -\ln 3\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{M_\Lambda(\lambda_k,\delta)}{|\lambda_k|} = -\tau\ln 3.$$

Лемма доказана.

Пусть Γ — угол с вершиной в начале координат. Введем величины

$$N(\Lambda,\Gamma,t) = \sum_{\lambda_k\in\Gamma\cap B(0,t)} m_k, \qquad N(\Lambda,\Gamma) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{N(\Lambda,\Gamma,t)}{t}.$$

Нетрудно заметить, что верно равенство $N(\Lambda,\mathbb{C})=N(\Lambda)$. Для точки $\xi\in\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ — единичная окружность с центром в начале координат) и числа $\delta\in(0,1)$ через $\Gamma(\xi,\delta)$ обозначим угол с вершиной в начале координат, порожденный кругом $B(\xi,\delta)$. Положим еще

$$M_{\Lambda,\xi,\delta} = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{M_\Lambda(t\xi,\delta)}{t}.$$

Лемма 2.2 *Пусть $\xi\in\mathbb{S}$, $\delta\in(0,1)$ и последовательность $\Lambda=\{\lambda_k,m_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta))<\infty$. Тогда выполнены неравенства*

$$\delta N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta)) \leqslant M_{\Lambda,\xi,2\delta} \leqslant (1+2\delta)N(\Lambda,\Gamma(\xi,2\delta)).$$

Доказательство. Заметим вначале, что круг $B(t\xi,2t\delta)$ целиком содержит часть угла $\Gamma(\xi,\delta)$, которая лежит в кольце $B(0,t)\backslash B(0,(1-\delta)t)$. Действительно, с учетом определения $\Gamma(\xi,\delta)$, для всех $w\in\Gamma(\xi,\delta)$ таких, что $(1-\delta)t\leqslant|w|\leqslant t$ имеем:

$$|w-t\xi| \leqslant |w-|w|\xi| + ||w|\xi-t\xi| \leqslant |w|\delta+\delta t \leqslant 2t\delta.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\frac{N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta),t)}{t} \leqslant \frac{N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta),(1-\delta)t)}{t} + \frac{M_\Lambda(t\xi,2\delta)}{t}.$$

Отсюда получаем

$$N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta)) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta),t)}{t} \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta),(1-\delta)t)}{t} + \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{M_\Lambda(t\xi,2\delta)}{t} =$$

$$= (1-\delta)\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta),r)}{r} + M_{\Lambda,\xi,2\delta} = (1-\delta)N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta)) + M_{\Lambda,\xi,2\delta}.$$

Это дает нам первое из требуемых неравенств. Второе необходимое неравенство вытекает из оценки

$$\frac{M_\Lambda(t\xi,2\delta)}{t} \leqslant \frac{N(\Lambda,\Gamma(\xi,\delta),(1+2\delta)t)}{t}.$$

Лемма доказана.

3. Построение специальной функции

Величина S_Λ, как и индекс конденсации, влияет на наличие особых точек суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области его сходимости. Отрицательность S_Λ влечет за собой существование последовательности $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$, для которой функция $g_d(z)$ не имеет особых точек на границе множества $D(\Lambda, d)$. Приведем результат, где строится подобная функция. Она является обобщением соответствующей специальной функции из теории рядов Дирихле (см. [9]). Но прежде введем еще некоторые обозначения. Для выпуклой области D и множества Θ на окружности $\mathbb{S}$ положим

$$D(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\lambda) < H_D(\lambda), \lambda \in \Theta\},$$

где

$$H_M(\lambda) = \sup_{z \in M} Re(z\lambda)$$

— опорная функция множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного к M множества). Множество $D(\Theta)$ выпуклое, как пересечение выпуклых (полуплоскостей). Поскольку опорная функция любого множества полунепрерывна снизу (см. [16]), то $D(\Theta)$ — выпуклая область. Из определений $D(\Theta)$ и $H_D(\lambda)$ легко следует вложение $D \subseteq D(\Theta)$. Через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество предельных точек последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}$ (исключая точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое множество на $\mathbb{S}$.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность* $\lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^\infty$ *такова, что* $m(\Lambda) = 0$ *и для некоторой подпоследовательности* $\tilde{\Lambda} = \{\lambda_{k(p)}\}_{p=1}^\infty$ *выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\ln |q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|}{|\lambda_{k(p)}|} \leqslant -\beta < 0, \tag{3.1}$$

где $\{\delta_p\}$ *— убывающая к нулю последовательность положительных чисел из интервала* $(0, 1/4)$. *Тогда для каждой ограниченной выпуклой области* D *существует последовательность* $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ *такая, что множество* $D(\Lambda, d)$ *совпадает с* $D(\Theta(\tilde{\Lambda}))$ *и функция* $g_d(z)$ *аналитична в области* $D_\beta = D(\Lambda, d) + B(0, \beta)$.

Замечание. Если $S_\Lambda \leqslant -\beta$, то согласно определению величины S_Λ найдется подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$, обладающая свойством (3.1).

Доказательство. Требуемую в теореме функцию будем искать в виде суммы ряда

$$g(z) = \sum_{p=1}^\infty c_p g_p(z). \tag{3.2}$$

Для этого, прежде всего, подходящим образом "проредим"последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^\infty$, т.е. из элементов Λ построим новую последовательность, обладающую специальными свойствами. Чтобы не загромождать текст излишними обозначениями и индексами, для новой последовательности сохраним те же символы, что и для исходной.

Приступим к построению необходимой последовательности. Вначале заметим, что, переходя к меньшей подпоследовательности, можно считать

$$|\lambda_{k(p+1)}| \geq 2|\lambda_{k(p)}|, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

При этом подобный переход можно осуществить, не уменьшая множество $\Theta(\tilde{\Lambda})$. Для этого при построении подпоследовательности нужно использовать какое-нибудь счетное всюду плотное на $\Theta(\tilde{\Lambda})$ подмножество $\Theta(\tilde{\Lambda})$. Теперь мы изымем из последовательности Λ

"лишние"точки. Прежде всего, отбросим все λ_k, которые не попали ни в один из кругов $B_p = B(\lambda_{k(p)}, \delta_p|\lambda_{k(p)}|)$, $p = 1, 2, \ldots$ Далее, если номер p таков, что

$$M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta_p) - m_{k(p)} \geq \beta|\lambda_{k(p)}| + 1, \tag{3.4}$$

то из круга B_p изымем столько точек λ_k, не трогая $\lambda_{k(p)}$, или уменьшим их кратности m_k так, чтобы выполнялись неравенства

$$\beta|\lambda_{k(p)}| \leqslant M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta_p) - m_{k(p)} < \beta|\lambda_{k(p)}| + 1. \tag{3.5}$$

Таким образом, мы получили последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^\infty$, обладающую следующими свойствами:
1) каждая точка λ_k лежит в одном и только одном из кругов B_p, $p = 1, 2, \ldots$;
2) ряд $\sum_{p=1}^\infty \exp(-\alpha|\lambda_{k(p)}|)$ сходится для любого $\alpha > 0$;
3) имеет место неравенство (3.1);
4) $m(\Lambda) = 0$;
5) $N(\Lambda) < \infty$.

Покажем, что свойства 1)–5) действительно имеют место. По построению каждая точка λ_k лежит хотя бы в одном из кругов B_p, $p = 1, 2, \ldots$ Кроме того, верно неравенство (3.3). Так как $\delta_p < 1/4$, то из него следует, что

$$(1 + \delta_p)|\lambda_{k(p)}| \leqslant (1 - \delta_{p+1})|\lambda_{k(p+1)}|, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Поэтому круги B_p, $p = 1, 2, \ldots$ попарно не пересекаются, и мы получаем свойство 1). Свойство 2) немедленно вытекает из неравенства (3.3). Докажем 3). Для тех номеров p, для которых неравенство (3.4) не имело место, все точки λ_k из круга B_p остались на месте. Поэтому величина $\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|$ не изменилась. Пусть номер p такой, что неравенство (3.4) было выполнено. После изъятия из круга B_p некоторых точек λ_k или уменьшения их кратностей m_k величина $\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|$ увеличилась, поскольку каждый из сомножителей, определяющих $q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)$, по модулю не превосходит единицы. Однако это увеличение не нарушило необходимых оценок сверху. Действительно, в силу леммы 2.1 имеем:

$$\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)| \leqslant \ln\frac{1}{3(1-\delta_p)}(M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta_p) - m_{k(p)}).$$

Отсюда при больших p с учетом (3.5) получаем

$$\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)| \leqslant -(M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta_p) - m_{k(p)}) \leqslant -\beta|\lambda_{k(p)}|.$$

Таким образом, неравенство (3.1) сохранилось и для новой последовательности.

Свойство 4) верно, т.к. предел любой подпоследовательности совпадает с пределом самой последовательности, и уменьшение чисел $m_k > 0$ сохраняет равенство $m(\Lambda) = 0$. Проверим последнее свойство. По построению для каждого $p = 1, 2, \ldots$ верно неравенство

$$M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta_p) - m_{k(p)} < \beta|\lambda_{k(p)}| + 1. \tag{3.7}$$

Пусть $t \in [(1 + \delta_p)|\lambda_{k(p)}|, (1 - \delta_{p+1})|\lambda_{k(p+1)}|]$. Тогда с учетом (3.6) и свойства 1) получаем:

$$t^{-1}N(\Lambda, \mathbb{C}, t) = t^{-1}N(\Lambda, \mathbb{C}, (1 + \delta_p)|\lambda_{k(p)}|) = t^{-1}\sum_{j=1}^p M_\Lambda(\lambda_{k(j)}, \delta_j) \leqslant$$

$$\leqslant ((1 + \delta_p)|\lambda_{k(p)}|)^{-1}\sum_{j=1}^p M_\Lambda(\lambda_{k(j)}, \delta_j).$$

Отсюда и из неравенств (3.3) и (3.7) следует, что

$$t^{-1}N(\Lambda,\mathbb{C},t)\leqslant((1+\delta_p)|\lambda_{k(p)}|)^{-1}\sum_{j=1}^{p}(\beta|\lambda_{k(j)}|+1+m_{k(j)})\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda_{k(p)}|^{-1}\sum_{j=1}^{p}(2^{j-p}\beta|\lambda_{k(p)}|+1)+\sum_{j=1}^{p}2^{j-p}|\lambda_{k(j)}|^{-1}m_{k(j)}.$$

В силу (3.3) последовательность $\{p|\lambda_{k(p)}|^{-1}\}$ ограничена. По свойству 4) ограничена также последовательность $\{|\lambda_{k(j)}|^{-1}m_{k(j)}\}$. Поэтому из предыдущего получаем

$$t^{-1}N(\Lambda,\mathbb{C},t)\leqslant\sum_{j=1}^{p}(2^{j-p}\beta+|\lambda_{k(p)}|^{-1})+\sum_{j=1}^{p}2^{j-p}|\lambda_{k(j)}|^{-1}m_{k(j)}\leqslant$$
$$\leqslant p|\lambda_{k(p)}|^{-1}+\beta\sum_{j=1}^{p}2^{j-p}+c_1\sum_{j=1}^{p}2^{j-p}\leqslant c_2+\beta+c_1.$$

Пусть теперь $t\in[(1-\delta_p)|\lambda_{k(p)}|,(1+\delta_p)|\lambda_{k(p)}|]$. Тогда

$$\frac{N(\Lambda,\mathbb{C},t)}{t}\leqslant\frac{N(\Lambda,\mathbb{C},(1+\delta_p)|\lambda_{k(p)}|)}{t}\leqslant\frac{N(\Lambda,\mathbb{C},(1+\delta_p)|\lambda_{k(p)}|)}{(1-\delta_p)|\lambda_{k(p)}|}\leqslant$$
$$\leqslant 2|\lambda_{k(p)}|^{-1}N(\Lambda,\mathbb{C},(1+\delta_p)|\lambda_{k(p)}|)\leqslant 2(c_2+\beta+c_1).$$

Таким образом, $N(\Lambda)=N(\Lambda,\mathbb{C})<\infty$.

Определим теперь функции $g_p(z)$, $p=1,2,\dots$, по формуле

$$g_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(\lambda_{k(p)},4\delta_p|\lambda_{k(p)}|)}\frac{\exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda-\lambda_{k(p)})q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)},$$

где $S(b,r)$ — окружность с центром в точке b и радиуса r, а числа $a_p\geq 1$ мы определим ниже. Получим оценки сверху на эти функции. Поскольку $a_p\geq 1$, то мы имеем:

$$|a_pq_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)|\geq|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)|=\left|\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_{k(p)},\delta_p|\lambda_{k(p)}|),\lambda_k\neq\lambda_{k(p)}}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{3\delta_p|\lambda_k|}\right)^{m_k}\right|\geq$$
$$\geq\left|\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_{k(p)},\delta_p|\lambda_{k(p)}|),\lambda_k\neq\lambda_{k(p)}}\left(\frac{3\delta_p|\lambda_k|}{3\delta_p|\lambda_k|}\right)^{m_k}\right|=1,\quad \lambda\in S(\lambda_{k(p)},4\delta_p|\lambda_{k(p)}|).$$

Следовательно, верны неравенства

$$|g_p(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(\lambda_{k(p)},4\delta_p|\lambda_{k(p)}|)}\frac{\exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda-\lambda_{k(p)})q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{8\pi|\lambda_{k(p)}|\delta_p}{2\pi}\sup_{\lambda\in S(\lambda_{k(p)},4\delta_p|\lambda_{k(p)}|)}\left|\frac{\exp(\lambda z)}{a_p(\lambda-\lambda_{k(p)})q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant 4\pi|\lambda_{k(p)}|\delta_p\sup_{\lambda\in S(\lambda_{k(p)},4\delta_p|\lambda_{k(p)}|)}\left|\frac{\exp(\lambda z)}{(\lambda-\lambda_{k(p)})}\right|\leqslant\sup_{\lambda\in S(\lambda_{k(p)},4\delta_p|\lambda_{k(p)}|)}|\exp(\lambda z)|\leqslant$$
$$\leqslant\exp(Re(\lambda_{k(p)}z)+4\delta_p|\lambda_{k(p)}||z|),\quad z\in\mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Определим теперь коэффициенты c_p. Пусть D — ограниченная выпуклая область и $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов из области D, строго исчерпывающая ее (т.е. для каждого $l = 1, 2, \dots$ внутренность компакта K_{l+1} содержит K_l, и объединение всех компактов K_l совпадает с областью D). Положим

$$c_p = \exp(-H_{K_p}(\lambda_{k(p)}) - \beta|\lambda_{k(p)}|), \quad p = 1, 2, \dots$$

Найдем область сходимости ряда (3.2). Положим

$$\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\lambda) < H_D(\lambda) + \beta, \lambda \in \Theta(\tilde{\Lambda})\}.$$

Покажем, что ряд (3.2) сходится равномерно на компактах в области $\tilde{D}$. Фиксируем компакт $K \subset \tilde{D}$ и пусть $z \in K$ и $\lambda \in \Theta(\tilde{\Lambda})$. Согласно определению области $\tilde{D}$ имеем: $Re(z\lambda) < H_D(\lambda) + \beta$. Поскольку $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ — исчерпывающая последовательность для D, то в силу определения опорной функции имеем: $H_{K_l}(\lambda) \to H_D(\lambda)$ при $l \to \infty$. Поэтому найдется номер $l(z, \lambda)$ такой, что выполнено неравенство $Re(z\lambda) < H_{K_{l(z,\lambda)}}(\lambda) + \beta$. Из непрерывности опорной функции компакта (см [16]) следует, что последнее неравенство продолжается в окрестности $U(z)$ и $V(\lambda)$ точек z и λ соответственно:

$$Re(w\xi) < H_{K_{l(z,\lambda)}}(\xi) + \beta, \quad w \in U(z), \quad \xi \in V(\lambda). \tag{3.9}$$

Из покрытия компакта $K \times \Theta$ множествами $U(z) \times V(\lambda)$, $z \in K$, $\lambda \in \Theta$, выделим конечное подпокрытие $U(z(j)) \times V(\lambda(j))$, $j = 1, \dots, s$. Пусть r — максимальный из номеров $l(z(j), \lambda(j))$, $j = 1, \dots, s$. Объединение всех множеств $U(z(j)) \times V(\lambda(j))$, $z \in K$, $\lambda \in \Theta$, $j = 1, \dots, s$ содержит в себе произведение $K \times V$, где V — некоторая окрестность компакта Θ. Пусть $z \in K$ и $\lambda \in V$. Тогда согласно (3.8) для некоторого номера $j = 1, \dots, s$ верно неравенство: $Re(z\lambda) < H_{K_{l(z(j),\lambda(j))}}(\lambda)$. В силу возрастания последовательности $\{K_l\}$ имеем:

$$H_{K_{l(z(j),\lambda(j))}}(\lambda) \leqslant H_{K_r}(\lambda).$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$Re(z\lambda) < H_{K_r} + \beta, \quad z \in K, \lambda \in V. \tag{3.10}$$

Согласно определению множества $\Theta(\tilde{\Lambda})$ выберем номер p_0 такой, что для всех $p \geq p_0$ точка $\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|$ принадлежит окрестности V. Тогда в силу (3.8) и (3.10) с учетом положительной однородности порядка один опорной функции получаем:

$$|g_p(z)| \leqslant \exp\left(|\lambda_{k(p)}| Re\left(\frac{\lambda_{k(p)} z}{|\lambda_{k(p)}|}\right) + 4\delta_p |\lambda_{k(p)}||z|\right) <$$
$$< \exp\left(|\lambda_{k(p)}|\left(H_{K_r}\left(\frac{\lambda_{k(p)}}{|\lambda_{k(p)}|}\right) + \beta\right) + 4\delta_p|\lambda_{k(p)}||z|\right) =$$
$$= \exp(H_{K_r}(\lambda_{k(p)}) + \beta|\lambda_{k(p)}| + 4\delta_p|\lambda_{k(p)}||z|). \tag{3.11}$$

Поскольку K_r лежит во внутренности компакта K_{r+1}, а последовательность $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ возрастающая, то найдется $\alpha_r > 0$, для которого выполнены неравенства

$$H_{K_r}(\lambda) + 2\alpha_r|\lambda| \leqslant H_{K_{r+1}}(\lambda) \leqslant H_{K_l}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, l \geq r + 1. \tag{3.12}$$

Выберем номер $p_1 \geq \max\{p_0, r + 1\}$ такой, что $4\delta_p|z| \leqslant \alpha_r$, когда $z \in K$ и $p \geq p_1$. Тогда из (3.11), (3.12) и определения коэффициентов c_p получаем:

$$|c_p g_p(z)| \leqslant \exp(-H_{K_p}(\lambda_{k(p)}) - \beta|\lambda_{k(p)}|) \exp(H_{K_r}(\lambda_{k(p)}) + \beta|\lambda_{k(p)}| + 4\delta_p|\lambda_{k(p)}||z|) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-2\alpha_r|\lambda_{k(p)}| + 4\delta_p|\lambda_{k(p)}||z|) \leqslant \exp(-2\alpha_r|\lambda_{k(p)}| + \alpha_r|\lambda_{k(p)}|) = \exp(-\alpha_r|\lambda_{k(p)}|)$$

для всех $z \in K$ и $p \geq_1$. Таким образом,

$$\sum_{p=p_1}^{\infty} |c_p g_p(z)| \leqslant \sum_{p=p_1}^{\infty} \exp(-\alpha_r|\lambda_{k(p)}|), \quad z \in K.$$

По свойству 2) последовательности Λ последний ряд сходится, а вместе с ним сходится и ряд (3.2), причем равномерно на компактах в области $\tilde{D}$. Члены ряда (3.2) — целые функции. Следовательно, $g(z)$ — функция, аналитическая в области $\tilde{D}$. Отметим, что все проведенные рассуждения верны при любом выборе чисел $a_p \geq 1$, $p = 1, 2, \ldots$

Покажем теперь, что при подходящем выборе чисел $a_p \geq 1$, $p = 1, 2, \ldots$, в некоторой подобласти области $\tilde{D}$ функция $g(z)$ раскладывается в ряд вида (1.1). Используя теорию вычетов, для каждого $p = 1, 2, \ldots$ получаем:

$$g_p(z) = a_p^{-1}\left(b_{k(p),0}\exp(\lambda_{k(p)}z) + \sum_{\lambda_k \in B(\lambda_{k(p)}, \delta_p|\lambda_{k(p)}|), \lambda_k \neq \lambda_{k(p)}} \sum_{n=0}^{m_k-1} b_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z)\right),$$

где $b_{k(p),0} = (q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p))^{-1}$. Положим еще $b_{k(p),n} = 0$, $n = 1, \ldots, m_{k(p)} - 1$. Определим коэффициенты $d_{k,n}$ следующим образом. Пусть $\lambda_k \in B_p$ для некоторого $p = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$d_{k,n} = c_p b_{k,n}(a_p)^{-1}, \quad n = 0, 1, \ldots, m_k - 1.$$

В силу свойства 1) последовательности Λ такое определение корректно.

Подберем теперь числа a_p, $p = 1, 2, \ldots$ В силу свойства 3)

$$\underline{\lim}_{p\to\infty} Y_p \geq \beta,$$

где $Y_p = \max\{|\lambda_{k(p)}|^{-1}\ln|b_{k,n}|\}$, а максимум берется по все номерам k, для которых $\lambda_k \in B_p$ и всем $n = 0, 1, \ldots, m_k - 1$. Если $Y_p \leqslant \beta$, то полагаем $a_p = 1$, в противном случае выберем $a_p \geq 1$ такое, что $Y_p - |\lambda_{k(p)}|^{-1}\ln a_p = \beta$. Таким образом, мы имеем:

$$\lim_{p\to\infty} \max_{k:\lambda_k \in B_p, 0 \leqslant n \leqslant m_k - 1} \{|\lambda_{k(p)}|^{-1}\ln|d_{k,n}/c_p|\} = \beta. \tag{3.13}$$

Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \tag{3.14}$$

Из свойства 5) вытекает равенство $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда с учетом свойства 4) по теореме Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов ряд (3.14) сходится в выпуклой области

$$D(\Lambda, d) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\lambda) < h(d, \lambda), \lambda \in \Theta(\Lambda)\}$$

и расходится в каждой точке ее внешности за исключением возможно начала координат. Функция $h(d, \lambda)$ определяется по формуле (см. [2])

$$h(d, \lambda) = \inf \underline{\lim}_{l\to\infty} \min_{0 \leqslant n \leqslant m_{s(l)}-1} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{|\lambda_{l_s}|}, \quad \lambda \in \Theta(\Lambda),$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{s(l)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ, когда $l \to \infty$.

Подсчитаем величину $h(d,\lambda)$, $\lambda \in \Theta(\Lambda)$. Но прежде покажем, что $\Theta(\Lambda) = \Theta(\tilde{\Lambda})$. Из определения этих множеств сразу следует вложение $\Theta(\tilde{\Lambda}) \subset \Theta(\Lambda)$. Пусть $\lambda \in \Theta(\Lambda)$. Тогда найдется подпоследовательность $\{\lambda_{s(l)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ такая, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ. Согласно свойству 1) каждая точка $\lambda_{s(l)}$ лежит в некотором круге $B_{p(l)}$. Следовательно, $|\lambda_{s(l)} - \lambda_{k(p(l))}| < \delta_{p(l)}|\lambda_{k(p(l))}|$. Отсюда получаем

$$\left|\frac{\lambda_{s(l)}}{|\lambda_{s(l)}|} - \frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right| \leqslant \left|\frac{\lambda_{s(l)}}{|\lambda_{s(l)}|} - \frac{\lambda_{s(l)}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right| + \left|\frac{\lambda_{s(l)}}{|\lambda_{k(p(l))}|} - \frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right| =$$

$$= \frac{\big||\lambda_{k(p(l))}| - |\lambda_{s(l)}|\big|}{|\lambda_{k(p(l))}|} + \frac{|\lambda_{k(p(l))} - \lambda_{s(l)}|}{|\lambda_{k(p(l))}|} \leqslant \delta_{p(l)} + \delta_{p(l)} = 2\delta_{p(l)} \to 0, \quad l \to \infty.$$

Это означает, что точка λ, а вместе с ней и все множество $\Theta(\Lambda)$ лежат в $\Theta(\tilde{\Lambda})$.

Пусть $\lambda \in \Theta(\Lambda)$, подпоследовательность $\{\lambda_{s(l)}\}$ такова, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ и $\lambda_{s(l)} \in B_{p(l)}$, $l = 1, 2, \ldots$ Имеем:

$$\min_{0\leqslant n\leqslant m_{s(l)}-1} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{|\lambda_{s(l)}|} \geq \min_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln(1/|d_{k,n}|)}{|\lambda_k|} = -\max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}|}{|\lambda_k|} =$$

$$= -\max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}|}{|\lambda_{k(p(l))}|}\frac{|\lambda_{k(p(l))}|}{|\lambda_k|} \geq -\frac{1}{1\pm\delta_{p(l)}} \max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}|}{|\lambda_{k(p(l))}|}.$$

Знак в знаменателе здесь противоположен знаку максимума. Отсюда с учетом определения коэффициентов c_p получаем:

$$\min_{0\leqslant n\leqslant m_{s(l)}-1} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{|\lambda_{s(l)}|} \geq -\frac{1}{1\pm\delta_{p(l)}} \max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}/c_{p(l)}| + \ln|c_{p(l)}|}{|\lambda_{k(p(l))}|} =$$

$$= -\frac{1}{1\pm\delta_{p(l)}}\left(\max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}/c_{p(l)}|}{|\lambda_{k(p(l))}|} - H_{K_{p(l)}}\left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right) - \beta\right). \tag{3.15}$$

Подпоследовательность $\lambda_{k(p(l))}/|\lambda_{k(p(l))}|$ как и $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ, последовательность $\{K_r\}$ — возрастающая, а опорная функция компакта непрерывна. Поэтому

$$\underline{\lim}_{l\to\infty} H_{K_{p(l)}}\left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right) \geq \underline{\lim}_{l\to\infty} H_{K_r}\left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right) = H_{K_r}(\lambda), \quad r = 1, 2, \ldots$$

Кроме того, последовательность $\{K_r\}$ исчерпывает область D. Следовательно,

$$\underline{\lim}_{l\to\infty} H_{K_{p(l)}}\left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right) \geq \lim_{r\to\infty} H_{K_r}(\lambda) = H_D(\lambda).$$

Отсюда с учетом (3.13) и (3.15) получаем:

$$\underline{\lim}_{l\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant m_{s(l)}-1} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{|\lambda_{s(l)}|} \geq -\lim_{p\to\infty} \frac{1}{1\pm\delta_{p(l)}} \max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}/c_{p(l)}|}{|\lambda_{k(p(l))}|} +$$

$$+ \underline{\lim}_{l\to\infty} H_{K_{p(l)}}\left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right) + \beta \geq -\beta + H_D(\lambda) + \beta = H_D(\lambda).$$

Поскольку подпоследовательность $\{\lambda_{s(l)}\}$ выбиралась произвольно из условия, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ, то согласно определению функции $h(d,\lambda)$ имеем:

$$h(d,\lambda) \geq H_D(\lambda), \quad \lambda \in \Theta(\Lambda) = \Theta(\tilde{\Lambda}).$$

Покажем, что на самом деле здесь имеет место равенство. Пусть $\lambda \in \Theta(\tilde{\Lambda})$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k(p(l))}\}$ такова, что $\lambda_{k(p(l))}/|\lambda_{k(p(l))}|$ сходится к λ. Для каждого $p(l)$, $l = 1, 2, \ldots$

через $s(l)$ и $n(l)$ обозначим соответственно номера k и n коэффициента $d_{k,n}$, при которых реализуется максимум в соотношении (3.13). Тогда

$$\lim_{l\to\infty} |\lambda_{k(p(l))}|^{-1} \ln |d_{s(l),n(l)}/c_{p(l)}| = \beta.$$

Отсюда получаем

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n(l)}|)}{|\lambda_{s(l)}|} = \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{-(\ln |d_{s(l),n(l)}/c_{p(l)}| + \ln |c_{p(l)}|)|\lambda_{k(p(l))}|}{|\lambda_{s(l)}||\lambda_{k(p(l))}|} =$$

$$= \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{-(\ln |d_{s(l),n(l)}/c_{p(l)}| + \ln |c_{p(l)}|)}{|\lambda_{k(p(l))}|} = -\beta + \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{-\ln |c_{p(l)}|)}{|\lambda_{k(p(l))}|} = \overline{\lim_{l\to\infty}} H_{K_{p(l)}} \left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right).$$

Учитывая вложение $K_{p(l)} \subset D$ и непрерывность функции H_D, имеем:

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n(l)}|)}{|\lambda_{s(l)}|} \leqslant \overline{\lim_{l\to\infty}} H_D \left(\frac{\lambda_{k(p(l))}}{|\lambda_{k(p(l))}|}\right) = H_D(\lambda).$$

Поскольку $\lambda_{s(l)} \in B_{p(l)}$, то, как и выше, $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ. Тогда согласно определению величины $h(d,\lambda)$ получаем неравенство

$$h(d,\lambda) \leqslant H_D(\lambda), \quad \lambda \in \Theta(\Lambda) = \Theta(\tilde{\Lambda}).$$

Таким образом, имеет место равенство

$$h(d,\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \Theta(\Lambda) = \Theta(\tilde{\Lambda}). \tag{3.16}$$

Отсюда с учетом определения областей $D(\Lambda, d)$ и $D(\Lambda(\tilde{\Lambda}))$ получаем их совпадение. Пусть $z \in D_\beta$ и $\lambda \in \Theta(\Lambda)$. Тогда $z = w + y$, где $y \in B(0,\beta)$ и $w \in D(\Lambda, d)$. В силу (3.16), определений области $D(\Lambda, d)$ и опорной функции круга имеем:

$$Re(z\lambda) = Re(w\lambda) + Re(y\lambda) < H_D(\lambda) + \beta|\lambda| = H_D(\lambda) + \beta.$$

Следовательно, $D_\beta \subseteq \tilde{D}$. Остается показать, что функция $g_d(z)$ совпадает с $g(z)$ в области $D(\Lambda, d)$. Поскольку $m(\Lambda) = \sigma(\Lambda) = 0$, то по теореме Абеля для рядов экспоненциальных мономов ряд (3.14) абсолютно сходится в области $D(\Lambda, d)$. Поэтому ряд (3.2), который можно получить из ряда (3.14) при помощи группировки членов последнего, имеет ту же сумму в общей области сходимости $D(\Lambda, d)$, что и ряд (3.14). Теорема доказана.

4. Особые точки

Согласно теореме 3.1 при условии $m(\Lambda) = 0$ отрицательность величины S_Λ обеспечивает существование аналитических функций, представимых рядом (3.14) со сколь угодно большой областью сходимости, которые не имеют особых точек на границе этой области. Оказывается, что при дополнительном условии на последовательность Λ отрицательность S_Λ является необходимым условием существования подобных функций. Далее мы приведем соответствующий результат. Но прежде введем еще некоторые необходимые определения и обозначения, а также докажем два вспомогательных результата.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^\infty$ будем называть правильной, если она является частью правильно распределенной последовательности при порядке один. Это равносильно тому, что (см. [15], [7]) Λ является частью нулевого множества (с учетом кратностей m_k) целой функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста. Пусть Λ — правильная последовательность. Через $F(\Lambda)$ обозначим множество всех целых функций экспоненциального типа и вполне регулярного роста, для каждой из которых Λ является частью ее нулевого множества.

Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа. Ее индикатором (верхним индикатором) называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Если K — выпуклый компакт, который является сопряженной диаграммой функции f, то по теореме Полиа (см, например, [7], [9]) имеет место равенство

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Символом $\underline{h}_f$ обозначим нижний индикатор функции f (см. [17]):

$$\underline{h}_f = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(t\lambda, t|\lambda|)} \frac{\ln|f(z)|}{t} dxdy, \quad z = x + iy.$$

Из определений индикаторов следует, что нижний индикатор не больше верхнего. Функция f имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда [17], когда верно равенство

$$h_f(\lambda) = \underline{h}_f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4.1. *Пусть* Λ *— правильная последовательность. Тогда* $\sigma(\Lambda) = 0$ *и* $M_\Lambda = 0$.
Доказательство. По условию последовательность Λ является частью нулей целой функции экспоненциального типа. Поэтому $N(\Lambda) < \infty$ (см., напр. [7]). Отсюда сразу следует равенство $\sigma(\Lambda) = 0$. Покажем, что $M_\Lambda = 0$. Доказательство проведем от противного.

Предположим, что $M_\Lambda \geq \tau > 0$. Согласно определению величины M_Λ выберем подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ такую, что

$$\underline{\lim}_{p\to\infty} \frac{M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, 1/p)}{|\lambda_{k(p)}|} \geq \tau. \tag{4.1}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности и учитывая при этом неравенство (2.2), можно считать, что $\{\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|\}$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathbb{S}$. Пусть $f \in F(\Lambda)$ и $\varepsilon > 0$. По свойству индикаторов (см., например, [18]) найдутся положительные числа $\delta < 1$ и T, для которых выполнено неравенство

$$\frac{\ln|f(t\eta)|}{t} \leqslant h_f(\xi) + \varepsilon, \quad \eta \in B(\xi, 3\delta), t \geq T. \tag{4.2}$$

Поскольку функция f имеет вполне регулярный рост, то (см. [7], [15])

$$\lim_{t\to\infty, \notin E} \frac{\ln|f(t\xi)|}{t} = h_f(\xi), \tag{4.3}$$

где E — множество нулевой относительной меры, т.е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{mes(E \cap [0, r])}{r} = 0. \tag{4.4}$$

Выберем неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{t_l\}$, вне множества E и удовлетворяющую условию

$$\lim_{l\to\infty} \frac{t_{l+1}}{t_l} = 1. \tag{4.5}$$

Это можно сделать, т.к. в силу (4.19) для любого $\alpha > 1$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{mes(E \cap [r, \alpha r])}{r} = 0.$$

т.е. на любом отрезке $[r, \alpha_r]$ при достаточно большом r есть точки, не лежащие в E. Согласно (4.3) найдем номер l_0 такой, что для всех $l \geq l_0$ выполнены неравенства

$$\ln |f(t_l\xi)| \geq (h_f(\xi) - \varepsilon)t_l \tag{4.6}$$

и $t_l \geq T$. Рассмотрим функции

$$f_l(\varsigma) = \frac{f(t_l\xi + \varsigma)}{f(t_l\xi)}, \quad l \geq l_0.$$

В силу (4.2) и (4.6) имеем:

$$\ln |f_l(\varsigma)| \leqslant 2\varepsilon t_l, \quad \varsigma \in B(0, 3\delta t_l), l \geq l_0.$$

Пусть $n(l)$ — число нулей (с учетом кратности) функции $f_l(\varsigma)$ в круге $B(0, 3\delta t_l/e)$. Тогда по теореме о нулях аналитической функции в круге (см. [9]) верно неравенство

$$\frac{(\delta t_l)^{n(l)}}{|\varsigma_1\varsigma_2 \ldots \varsigma_{n(l)}|} \leqslant \exp(2\varepsilon t_l), \quad l \geq l_0,$$

где $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_{n(l)}$ — нули f_l в круге $B(0, 3\delta t_l/e)$. Так как $|\varsigma_j| \leqslant 3\delta t_l/e$, то отсюда получаем

$$e^{n(l)} \leqslant \frac{(3\delta t_l)^{n(l)}}{|\varsigma_1\varsigma_2 \ldots \varsigma_{n(l)}|} \leqslant \exp(2\varepsilon t_l), \quad l \geq l_0.$$

Таким образом, с учетом (2.2) и определения функций $f_l(\varsigma)$ имеем:

$$M_\Lambda(t_l\xi, \delta) \leqslant 2\varepsilon t_l, \quad l \geq l_0. \tag{4.7}$$

В силу (4.5), увеличивая при необходимости номер l_0, можно считать, что

$$t_{l+1} \leqslant (1 + \delta/4)t_l.$$

Выберем номер p_0 такой, что

$$|\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| - \xi| \leqslant \delta/4, \quad |\lambda_{k(p)}| \geq t_{l_0}$$

для всех $p \geq p_0$. Фиксируем $p \geq p_0$ и найдем номер $l(p) \geq l_0$, для которого

$$t_{l(p)} \leqslant |\lambda_{k(p)}| \leqslant t_{l(p)+1}.$$

Пусть λ — произвольная точка круга $B(\lambda_{k(p)}, \delta|\lambda_{k(p)}|/4)$. Тогда мы имеем:

$$|\lambda - t_{l(p)}\xi| \leqslant |\lambda - \lambda_{k(p)}| + |\lambda_{k(p)} - t_{l(p)}\xi| \leqslant \delta|\lambda_{k(p)}|/4 + |\lambda_{k(p)} - |\lambda_{k(p)}|\xi| +$$

$$+ ||\lambda_{k(p)}|\xi + t_{l(p)}\xi| \leqslant \delta|\lambda_{k(p)}|/2 + |\lambda_{k(p)}| - t_{l(p)} \leqslant \delta t_{l(p)}/2 + t_{l(p)} - t_{l(p)} \leqslant$$

$$\leqslant \delta(1 + \delta/4)t_{l(p)}/2 + \delta t_{l(p)}/4 < \delta t_{l(p)}.$$

Следовательно, круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta|\lambda_{k(p)}|/4)$ лежит в круге $B(t_{l(p)}\xi, \delta t_{l(p)})$. Поэтому с учетом (2.2) и (4.7) верны неравенства

$$M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta|\lambda_{k(p)}|/4) \leqslant M_\Lambda(t_{l(p)}\xi, \delta) \leqslant 2\varepsilon t_{l(p)} \leqslant 2\varepsilon|\lambda_{k(p)}|.$$

Отсюда и (2.2) для достаточно больших p получаем

$$M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, 1/p) \leqslant 2\varepsilon|\lambda_{k(p)}|.$$

Это противоречит неравенству (4.1), т.к. число $\varepsilon > 0$ можно брать сколь угодно малым. Лемма доказана.

Следующий результат является прямым следствием теоремы 5.2 из работы [14].

Лемма 4.2. *Пусть Λ — правильная последовательность и $S_\Lambda = 0$. Пусть далее $f \in F(\Lambda)$, K — сопряженная диаграмма функции f, $w \in \mathbb{C}$ и $r > 0$. Предположим, что функция g аппроксимируется равномерно на компактах в области $D = K + B(w,r)$ линейными комбинациями элементов системы $\mathcal{E} = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=o}^{\infty,m_k-1}$. Тогда в этой области g единственным образом представляется рядом (1.1).*

Доказательство. Покажем, что выполнены все условия теоремы 5.2 из работы [14]. Пусть W обозначает замыкание в пространстве $H(D)$ (функций, аналитических в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах) линейной оболочки системы $\mathcal{E}$. Тогда W — замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, со спектром $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Положим $f_1(\lambda) = f(\lambda)\exp(\lambda w)$. Поскольку K — сопряженная диаграмма функции f, то с учетом определения области D получаем:

$$h_{f_1}(\lambda) = Re(\lambda w) + h_f(\lambda) = Re(\lambda w) + H_K(\lambda) < H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0.$$

По теореме Полиа (см., например, [18]) этого неравенства достаточно для существования линейного непрерывного функционала μ на пространстве $H(D)$, преобразование Лапласа $\hat{\mu}(\lambda) = (\mu, \exp(\lambda z))$ которого совпадает с функцией $f_1(\lambda)$. Нетрудно заметить, что значение этого функционала на функции $z^n \exp(\lambda_k z)$ равно $f_1^{(n)}(\lambda_k)$. Согласно определению множества $F(\Lambda)$ это означает, что ненулевой функционал μ обращается в ноль на всех функциях системы $\mathcal{E}$, а следовательно, и на подпространстве W. Поэтому W — нетривиальное подпространство в $H(D)$.

Пусть $f_2(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа и вполне регулярного роста с индикатором $h_{f_2}(\lambda)$, равным опорной функции круга $B(w,r)$, т.е.

$$h_{f_2}(\lambda) = H_{B(w,r)}(\lambda) = Re(\lambda w) + r|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Существование подобной функции устанавливается, например, в теореме из книги [7]. Положим $\varphi(\lambda) = f_2(\lambda) f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Функция φ как произведение двух функций вполне регулярного роста сама имеет вполне регулярный рост (это следует непосредственно из определения регулярности роста), т.е.

$$h_\varphi(\lambda) = \underline{h}_\varphi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, по теореме о сложении индикаторов (см., например, [7], теорема 1.4.3)

$$h_\varphi(\lambda) = h_{f_2}(\lambda) + h_f(\lambda) = H_{B(w,r)}(\lambda) + H_K(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Остается заметить, что по условию $S_\Lambda = 0$, а по лемме 4.1 $m(\Lambda) \leqslant M_\Lambda = 0$. Таким образом, все условия теоремы 5.2 из работы [14] выполнены. Тогда согласно этой теореме каждая функция из подпространства W и, в частности g, представляется рядом (1.1). В этой же работе показывается, что такое представление возможно лишь единственным образом. Лемма доказана.

Для открытого множества D и выпуклого компакта K символом $\Omega(D,K)$ обозначим совокупность всех точек $z \in \mathbb{C}$ таких, что $K + z$ (сдвиг компакта K) лежит в D. Если D — выпуклая область, то нетрудно видеть, что множество $\Omega(D,K)$ также является выпуклой областью (возможно пустой). Ее можно определить еще и следующим образом

$$\Omega(D,K) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\lambda) < H_K(\lambda), \lambda \in \mathbb{S}\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть Λ — правильная последовательность, $f \in F(\Lambda)$ и K — сопряженная диаграмма функции f. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. Для каждой последовательности $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ такой, что множество $\Omega(D(\Lambda, d), K)$ не пусто и отлично от плоскости, и любой точки $w \in \partial\Omega(D(\Lambda, d), K)$ функция $g_d(z)$ имеет хотя бы одну особую точку на множестве $(w + K) \cap \partial D(\Lambda, d)$.

2. Имеет место равенство $S_\Lambda = 0$.

Доказательство. 1)$\to$ 2). Предположим, что $S_\Lambda < 0$. Пусть D — ограниченная выпуклая область, которая содержит компакт K. По лемме 4.1 $m(\Lambda) \leqslant M_\Lambda = 0$. Тогда по теореме 3.1 с учетом замечания к ее формулировке существует последовательность $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ такая, что множество $D(\Lambda, d)$ отлично от плоскости и содержит область D, а функция $g_d(z)$ не имеет особых точек на границе $\partial D(\Lambda, d)$. Поскольку множество $\Omega(D(\Lambda, d), K)$ в этом случае не пусто (оно содержит K), то это противоречит утверждению 1). При определении величины S_Λ было отмечено, что всегда выполнено неравенство $S_\Lambda \leqslant 0$. Таким образом, мы имеем $S_\Lambda = 0$.

2)$\to$ 1). Пусть последовательность $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ такова, что множество $\Omega(D(\Lambda, d), K)$ не пусто. Заметим, что по лемме 4.1 выполнены равенства $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Следовательно, по теореме Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов множество $D(\Lambda, d)$, а вместе с ним и множество $\Omega(D(\Lambda, d), K)$, являются выпуклыми областями. Фиксируем точку $w_0 \in \partial\Omega(D(\Lambda, d), K)$ и предположим, что на компакте $(w_0 + K) \cap \partial D(\Lambda, d)$ функция $g_d(z)$ не имеет особых точек. Другими словами, для каждой точки $w \in (w_0 + K) \cap \partial D(\Lambda, d)$ функция g_d аналитически продолжается в некоторый круг $B(w, r(w))$. Если круги $B(w_1, r(w_1))$ и $B(w_2, r(w_2))$ пересекаются, то в силу выпуклости области $D(\Lambda, d)$ непустым будет также пересечение $B(w_1, r(w_1)) \cap B(w_2, r(w_2)) \cap D(\Lambda, d)$. Следовательно, по теореме единственности продолжения функции $g_d(z)$ в круги $B(w_1, r(w_1))$ и $B(w_2, r(w_2))$ совпадают во всех точках их пересечения. Таким образом, функция $g_d(z)$ аналитически продолжается в область $D(\Lambda, d) \cup U$, где U — некоторая окрестность компакта $(w_0 + K) \cap \partial D(\Lambda, d)$.

Выберем положительное число r так, что верно вложение $K + B(w_0, r) \subseteq D(\Lambda, d) \cup U$. Функция $g_d(z)$ аппроксимируется равномерно на компактах линейными комбинациями элементов системы $\mathfrak{E}$ в некоторой окрестности сдвига компакта K (например, в области $D(\Lambda, d)$). Тогда согласно результату из работы [19] эта аппроксимация продолжается в область $K + B(w_0, r)$. По лемме 4.2 отсюда следует, что $g_d(z)$ представляется рядом (1.1) в этой области возможно с отличными от $d = \{d_{k,n}\}$ коэффициентами. Покажем, что на самом деле эти коэффициенты совпадают с $d = \{d_{k,n}\}$. Пусть $\tilde{w}$ — произвольная общая точка круга $B(w_0, r)$ и области $\Omega(D(\Lambda, d), K)$. Выберем $\tilde{r} > 0$ такое, что круг $B(\tilde{w}, \tilde{r})$ лежит в пересечении $B(w_0, r) \cap \Omega(D(\Lambda, d), K)$. Тогда область $K + B(\tilde{w}, \tilde{r})$ лежит одновременно в областях $K + B(w_0, r)$ и $D(\Lambda, d)$. Следовательно, в области $K + B(\tilde{w}, \tilde{r})$ имеются два представления функции $g_d(z)$ посредством ряда (1.1). Однако, по лемме 4.2 возможно лишь единственное представление $g_d(z)$ рядом вида (1.1). Это означает, что коэффициенты обоих представлений совпадают. Таким образом, мы показали, что в области $D(\Lambda, d) \cup (K + B(w_0, r))$ функция $g_d(z)$ разлагается в ряд (1.1) с коэффициентами $d = \{d_{k,n}\}$. Это противоречит определению множества $D(\Lambda,)$, т.к. область $D(\Lambda, d) \cup (K + B(w_0, r))$ шире, чем $D(\Lambda, d)$. Следовательно, наше предположение неверно, т.е. функция $g_d(z)$ имеет хотя бы одну особую точку на компакте $(w_0 + K) \cap \partial D(\Lambda, d)$. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 3.1 следует, что при условии $S_\Lambda \neq 0$ существует ряд вида (1.1) со сколь угодно большой областью сходимости, сумма которого не имеет особых точек на границе этой области. Если же $S_\Lambda = 0$ и последовательность Λ — правильная, то согласно теореме 4.1 сумма любого ряда (1.1) с достаточно большой областью сходимости имеет некоторое количество особых точек на границе области сходимости. Однако, если эта область недостаточно большая, то сумма ряда может вовсе не иметь особых точек даже при условиях, что Λ — правильная последовательность и $S_\Lambda = 0$. Рассмотрим соответствующий пример (см. [9]). Пусть

$$L(\lambda) = \frac{\sin\lambda \sin(i\lambda)}{\lambda^2}.$$

Функция $L(\lambda)$ является целой, имеет экспоненциальный тип и вполне регулярный рост, т.к. представляет из себя произведение двух функций $\sin(\pi\lambda)/\lambda$ и $\sin(i\pi\lambda)/\lambda$ вполне регулярного роста. По теореме о сложении индикаторов ее сопряженная диаграмма K есть сумма сопряженных диаграмм этих функций. Последние являются отрезками соответственно мнимой оси $[-i, i]$ и вещественной оси $[-1, 1]$. Поэтому K — квадрат с вершинами в точках $1+i, i-1, 1-i, -1-i$. Функция $L(\lambda)$ имеет простые нули в точках πn и $i\pi$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ее нулей и $d = \{1/L'(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда Λ — правильная последовательность. Как и в примерах после определения S_Λ показывается, что эта величина равна нулю. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)}.$$

В книге [9] доказывается, что его сумма тождественно равна нулю (а потому не имеет особых точек), а областью его сходимости $D(\Lambda, d)$ является внутренность квадрата K (последнюю можно также легко вычислить при помощи теоремы Коши-Адамара). Этот случай в некотором смысле является предельным. Здесь компакт K не помещается в область $D(\Lambda, d)$, но совпадает с ее замыканием.

Покажем теперь, что все отмеченные во введении результаты по особым точкам сумм рядов экспонент и их частных случаев (рядов Дирихле и Тейлора) являются следствиями теоремы 4.1. При этом мы не затрагиваем результаты Г.Л. Лунца [11], [12] и А. Островского [10] по тем причинам, которые указаны во введении.

Рассмотрим вначале результаты, относящиеся к рядам Дирихле

$$g(z)\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(-\lambda_k z), \tag{4.8}$$

где $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел. Напомним (см. [7], [9]), что этот ряд сходится в полуплоскости $Re z > c$, а число c называется абсциссой сходимости и вычисляется по формуле Коши-Адамара. При этом прямая $Re z = c$ называется прямой сходимости. Далее мы считаем, что область сходимости ряда (4.8) не пуста, т.е. $c > -\infty$.

Следствие 4.1. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ имеет плотность, т.е*

$$\tau = N(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k}.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Каждая функция $g(z)$ вида (4.8) либо целая либо на любом отрезке длины $2\pi i$, лежащем на прямой сходимости имеет по крайней мере одну особую точку.

2. Имеет место равенство $S_\Lambda = 0$.

Доказательство. Положим

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right). \tag{4.9}$$

По теореме 1.2.9 в книге [7] функция $L(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа и имеет вполне регулярный рост, а ее сопряженная диаграмма K совпадает с отрезком мнимой оси $[-i\pi\tau, i\pi\tau]$. Следовательно, Λ — правильная последовательность. Область $\Omega(D(\Lambda, d), K)$ в этом случае совпадает с полуплоскостью сходимости ряда (4.8). Поэтому для каждой точки $w \in \partial\Omega(D(\Lambda, d), K)$ множество $(w+K) \cap \partial D(\Lambda, d)$ есть отрезок прямой сходимости длины $2\pi i$. Кроме того, любой подобный отрезок можно получить таким образом. Для завершения доказательства нужно лишь применить теорему 4.1. Следствие доказано.

Пусть

$$\gamma(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right|,$$

где $L(\Lambda)$ — функция, определенная формулой (4.9). Величина $\gamma(\Lambda)$ называется индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева.

Следствие 4.2. (теорема Бернштейна) *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *имеет плотность* τ *и* $\gamma(\Lambda) = 0$. *Тогда каждая функция* $g(z)$ *вида (4.8) либо целая либо на любом отрезке длины* $2\pi i$*, лежащем на прямой сходимости, имеет по крайней мере одну особую точку.*

Доказательство. Согласно следствию 4.1 достаточно показать, что равенство $\gamma(\Lambda) = 0$ влечет за собой равенство нулю величины S_Λ. Итак, пусть $\gamma(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что

$$|L'(\lambda_k)| \geq \exp(-\varepsilon\lambda_k), \quad k \geq k_0. \tag{4.10}$$

По свойству индикаторов (см., например, [18]) существуют $\alpha, T > 0$, для которых выполнено неравенство

$$|L(\lambda)| \leqslant \exp((h_L(1)+\varepsilon)|\lambda|) = \exp((H_K(1)+\varepsilon)|\lambda|), \quad \lambda/|\lambda| \in B(1,\alpha), |\lambda| \geq T,$$

где K — сопряженная диаграмма функции $L(\lambda)$, совпадающая с отрезком мнимой оси $[-i\pi\tau, i\pi\tau]$. Поскольку $H_K(1) = 0$, то мы получаем:

$$|L(\lambda)| \leqslant \exp(\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda/|\lambda| \in B(1, 4\alpha), |\lambda| \geq T.$$

Пусть $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)L_k(\lambda)$. Тогда $L'(\lambda_k) = L_k(\lambda_k)$. В силу последней оценки

$$|L_k(\lambda_k)| = \left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| \leqslant 4\alpha\lambda_k \exp(\varepsilon(1+4\alpha)\lambda_k), \quad \lambda \in S(\lambda_k, 4\alpha\lambda_k), \lambda_k \geq T.$$

Так как на окружности $S(\lambda_k, 4\alpha\lambda_k)$

$$|q_\Lambda^k(\lambda, \alpha)| \geq 1,$$

то по предыдущему имеем:

$$\left| \frac{L_k(\lambda)}{q_\Lambda^k(\lambda,\alpha)} \right| \leqslant 4\alpha\lambda_k \exp(\varepsilon(1+4\alpha)\lambda_k), \quad \lambda \in S(\lambda_k, 4\alpha\lambda_k), \lambda_k \geq T.$$

По принципу максимума это неравенство продолжается внутрь круга. В частности,

$$\left| \frac{L_k(\lambda)}{q_\Lambda^k(\lambda,\alpha)} \right| \leqslant 4\alpha\lambda_k \exp(\varepsilon(1+4\alpha)\lambda_k), \quad \lambda_k \geq T.$$

Отсюда с учетом (4.10) получаем

$$|q_\Lambda^k(\lambda,\alpha)| \geq |L_k(\lambda_k)| \exp(-\varepsilon(1+4\alpha)\lambda_k - \ln(4\alpha\lambda_k)) =$$

$$= |L'(\lambda_k)| \exp(-\varepsilon(1+4\alpha)\lambda_k - \ln(4\alpha\lambda_k)) \geq \exp(-\varepsilon(2+4\alpha)\lambda_k - \ln(4\alpha\lambda_k))$$

для всех номеров k, удовлетворяющих условиям $\lambda_k \geq T$ и $k \geq k_0$. Тогда по определению величины S_Λ верно неравенство $S_\Lambda \geq -\varepsilon$. В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ имеем

$S_\Lambda \geq 0$. Обратное неравенство $S_\Lambda \leqslant 0$ всегда имеет место. Поэтому $S_\Lambda = 0$. Следствие доказано.

Следствие 4.3. (теорема Полиа) *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ имеет плотность τ и $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда каждая функция $g(z)$ вида (4.8) либо целая либо на любом отрезке длины $2\pi\tau$, лежащем на прямой сходимости, имеет по крайней мере одну особую точку.*

Доказательство. Как и выше, достаточно установить равенство $S_\Lambda = 0$. Это уже сделано в примере после определения величины S_Λ. Следствие доказано.

Во введении было отмечено, что из доказанных утверждений вытекают другие результаты, цитируемые там. В частности, это относится к теоремам Адамара, Фабри, Карлсона и Ландау. Все они имеют дело со случаем положительных последовательностей нулевой плотности. Рассмотрим теперь случай общей последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ с нулевой плотностью.

Следствие 4.4. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет нулевую плотность. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. Для каждой последовательности $d \in \mathfrak{A}$ функция $g_d(z)$ либо целая либо все граничные точки области $D(\Lambda, d)$ являются для нее особыми. В частности область существования функции $g_d(z)$ выпуклая.

2. Имеет место равенство $S_\Lambda = 0$.

Доказательство. Положим

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)^{m_k}.$$

Последовательность Λ имеет нулевую плотность. Поэтому функция $L(\lambda)$ (см., например, [7]) является целой функцией минимального типа, а значит, имеет вполне регулярный рост. Ее сопряженная диаграмма K состоит из одной точки (начала координат). Таким образом, Λ — правильная последовательность. Как и в теореме 4.1, для каждой последовательности $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ множество $D(\Lambda, d)$ является выпуклой областью. Так как K — одно-точечное множество, то область $\Omega(D(\Lambda, d)K)$ не пуста и совпадает с $D(\Lambda, d)$. Кроме того, каждая точка $z \in \partial D(\Lambda, d)$, являясь одновременно и граничной точкой области $\Omega(D(\Lambda, d)K)$, совпадает с пересечением $(z + k) \cap \partial(D(\Lambda, d)$. Остается применить теорему 4.1. Следствие доказано.

Частным случаем доказанного утверждения является

Следствие 4.5 (теорема Леонтьева). *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет нулевую плотность и $\gamma(\Lambda) = 0$. Тогда для каждой последовательности $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ функция $g_d(z)$ либо целая либо все граничные точки области $D(\Lambda, d)$ являются для нее особыми. В частности область существования функции $g_d(z)$ выпуклая.*

Доказательство. Нужно лишь проверить равенство $S_\Lambda = 0$. Оно устанавливается также, как и в следствии 4.2. Следствие доказано.

Из теоремы 4.1 следует, что случай нулевой плотности не единственный, когда все точки $z \in D(\Lambda, d)$ являются особыми для функции g_d. Действительно, такая ситуация будет иметь место, если каждая граничная точка области $D(\Lambda, d)$ совпадает с одним из множеств $(w + K) \cap \partial D(\Lambda, d)$, где $w \in \partial\Omega(D(\Lambda, d), K)$. Приведем условия, когда это выполнено. В связи с этим напомним, что выпуклая область имеет гладкую границу тогда и только тогда, когда (см. [16]) через каждую ее граничную точку проходит только одна опорная прямая. Кроме того, выпуклый компакт является строго выпуклым тогда и только тогда, когда каждая опорная прямая пересекает его в единственной точке. К примеру, компакт, состоящий из одной точки, является строго выпуклым. Отрезок же таковым не является, поскольку две из его опорных прямых содержат целиком весь отрезок.

Лемма 4.3. *Пусть Ω — выпуклая область с гладкой границей и K — строго выпуклый компакт. Тогда каждая граничная точка области $D = \Omega + K$ совпадает с пересечением $(w + K) \cap \partial D$, где w — некоторая граничная точка области Ω.*

Доказательство. Пусть $z \in \partial D$. Поскольку D является суммой области Ω и компакта K, то найдутся точки $w \in \partial\Omega$ и $v \in K$ такие, что $z = w+v$. Следовательно, z принадлежит пересечению $(w + K) \cap \partial D$. Если других точек у этого пересечения нет, то все доказано. Предположим, что z_1 отлична от z и также принадлежит множеству $(w + K) \cap \partial D$. Тогда $z_1 = w + v_1$, где v_1 — некоторая точка компакта K. Через каждую из граничных точек z и z_1 области D проходит хотя бы по одной опорной прямой. Пусть это будут прямые $l = \{u \in \mathbb{C} : Re(u\xi) = H_D(\xi)\}$ и $l_1 = \{u \in \mathbb{C} : Re(u\xi_1) = H_D(\xi_1)\}$, $\xi, \xi_1 \in \mathbb{S}$, соответственно. Выполнены равенства

$$Re(w\xi) = H_\Omega(\xi), Re(w\xi_1) = H_\Omega(\xi_1), Re(v\xi) = H_K(\xi), Re(v_1\xi_1) = H_K(\xi_1).$$

Действительно, предположим, например, что $Re(w\xi) \neq H_\Omega(\xi)$. Поскольку точка w лежит в замыкании области Ω, то из определения опорной функции этой области вытекает неравенство $Re(w\xi) \leqslant H_\Omega(\xi)$. Следовательно, $Re(w\xi) < H_\Omega(\xi)$. Тогда согласно тому же определению найдется $\tilde{w} \in \Omega$ такое, что $Re(w\xi) < Re(\tilde{w}\xi)$. Отсюда с учетом включения $z \in l$ получаем

$$Re((\tilde{w} + v)\xi) = Re(\tilde{w}\xi) + Re(v\xi) > Re(w\xi) + Re(v\xi) = Re((w + v)\xi) = Re(z\xi) = H_D(\xi).$$

С другой стороны, $\tilde{w}+v \in \Omega+K = D$. Поэтому в силу определения опорной функции области D имеем: $Re((\tilde{w} + v)\xi) \leqslant H_D(\xi)$. Полученное противоречие подтверждает истинность заявленных выше равенств. Первые два из этих равенств означают, что точка $w \in \partial\Omega$ лежит одновременно на двух опорных прямых к области Ω. По условию Ω является гладкой. Поэтому $\xi = \xi_1$. Тогда два других равенства означают, что различные точки $v, v_1 \in K$ лежат на одной и той же опорной прямой к компакту K. Этого не может быть, т.к. по условию K — строго выпуклый компакт.

Таким образом, наше предположение о том, что множество $(w + K) \cap \partial D$ содержит точку, отличную от z, неверно. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 4.3 и теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.6. *Пусть Λ — правильная последовательность, $f \in F(\Lambda)$, K — сопряженная диаграмма функции f и $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$. Предположим, что $S_\Lambda = 0$, K — строго выпуклый компакт, множество $\Omega(D(\Lambda, d), K)$ не пусто и отлично от плоскости, а область $D(\Lambda, d)$ имеет гладкую границу и выполнено равенство $D(\Lambda, d)\Omega(D(\Lambda, d), K) + K$. Тогда все граничные точки области $D(\Lambda, d)$ являются особыми для функции $g_d(z)$. В частности область ее существования выпуклая.*

Замечание. Приведем пример на применение следствия 4.6. Пусть K — произвольный строго выпуклый компакт, отличный от точки. Существует (см. [9],[7] теорема 1.3.2) целая функция f экспоненциального типа и вполне регулярного роста с простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}$, для которой K является сопряженной диаграммой. При этом последовательность Λ удовлетворяет условию $\lim \ln |f'(\lambda_k)|/|\lambda_k| = 0$ (из него, как и в следствии 4.2, следует равенство $S_\Lambda = 0$). Эта функция является канонической функцией правильно распределенного (и даже регулярного) множества $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Последнее строится таким образом, что множество $\Theta(\Lambda)$ совпадает с окружностью $\mathbb{S}$. Пусть Ω — произвольная выпуклая область с гладкой границей. Положим $D = \Omega + K$. Определим коэффициенты $d = \{d_k\}$ следующим образом:

$$d_k = c_k \exp(-H_{K_{p(k)}}(\lambda_k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{K_p\}$ — семейство выпуклых компактов из области D, исчерпывающее ее, $p(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, и $\{c_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию $\ln|c_k|/|\lambda_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z).$$

Поскольку $\Theta(\Lambda) = \mathbb{S}$, то, как и в теореме 3.1, используя теорему Коши-Адамара для рядов экспонент, нетрудно показать, что область сходимости этого ряда $D(\Lambda, d)$ совпадает с D. Тогда $\Omega(D(\Lambda, d), K) = \Omega$. Таким образом, все условия следствия 6 выполнены. Следовательно, область существования функции $g(z)$ совпадает с выпуклой областью $D(\Lambda, d)$.

5. Случай нулевой плотности

В этом параграфе мы покажем, что условие $N(\Lambda) = 0$ необходимо для пункта 1) в следствии 4.4. Другими словами, будет получен критерий того, что область существования каждой суммы ряда (1.1) совпадает с областью его сходимости. Для этого нам нужно доказать два вспомогательных утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть последовательность Λ такова, что $m(\Lambda) \neq 0$. Тогда существует последовательность коэффициентов $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ такая, что не все граничные точки множества $D(\Lambda, d)$ являются особыми для функции $g_d(z)$.*

Доказательство. Пусть $m(\Lambda) \geq 2\rho > 0$. Можно считать, что $\rho < 1/2e^2$. Согласно определению величины $m(\Lambda)$ найдем подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$, для которой выполнены неравенства

$$m(k(p)) \geq \rho|\lambda_{k(p)}|, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|\}$ сходится к некоторой точке ς окружности $\mathbb{S}$ и выполнено неравенство $|\lambda_{k(p)}| \geq p$, $p = 1, 2, \ldots$ Пусть $n(p)$ — целая часть числа $\rho|\lambda_{k(p)}|$, $p = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p (z - \overline{\varsigma})^{n(p)} \exp(\lambda_{k(p)} z), \tag{5.1}$$

где $c_p = \exp(-(1 - 1/p)|\lambda_{k(p)}|)$. Покажем, что ряд сходится в некоторой окрестности точки $\overline{\varsigma}$. Имеем:

$$|c_p(z - \overline{\varsigma})^{n(p)} \exp(\lambda_{k(p)} z)| \leqslant \exp(-(1 - 1/p)|\lambda_{k(p)}| + n(p) \ln r + Re(\lambda_{k(p)}\overline{\varsigma}) + |\lambda_{k(p)}| r) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-(1 - 1/p)|\lambda_{k(p)}| + (\rho|\lambda_{k(p)}| - 1) \ln r + Re(\lambda_{k(p)}\overline{\varsigma}) + |\lambda_{k(p)}| r)$$

для всех $z \in B(\overline{\varsigma}, r)$, $r \in (0, 1)$. В силу выбора $\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| = \varsigma + \xi_p$, причем $\xi_p \to$ при $p \to \infty$. Тогда по предыдущему

$$|c_p(z - \overline{\varsigma})^{n(p)} \exp(\lambda_{k(p)} z)| \leqslant \exp(-(1 - 1/p)|\lambda_{k(p)}| + (\rho|\lambda_{k(p)}| - 1) \ln r +$$

$$+ |\lambda_{k(p)}| Re(\overline{\varsigma}\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|) + |\lambda_{k(p)}| r) \leqslant \exp(-(1 - 1/p)|\lambda_{k(p)}| + (\rho|\lambda_{k(p)}| - 1) \ln r +$$

$$+ |\lambda_{k(p)}|(1 + |\xi_p|) + |\lambda_{k(p)}| r) = \exp((1/p + \rho \ln r + |\xi_p| + r)|\lambda_{k(p)}| - \ln r) \leqslant$$

$$\leqslant r_0^{-1} \exp(-\alpha|\lambda_{k(p)}|),$$

где $\alpha > 0$, если $\rho \ln r_0 < 0$ и $p \geq p_0$. Поскольку $\rho < 1/2e^2$, то можно считать, что $r_0 = 2\rho$. Согласно выбору выполнено неравенство $|\lambda_{k(p)}| \geq p$. Следовательно,

$$|c_p(z-\overline{\varsigma})^{n(p)} \exp(\lambda_{k(p)}z)| \leqslant r_0^{-1} \exp(-\alpha p), \quad p \geq p_0.$$

Это означает, что ряд (5.1) равномерно сходится в круге $B(\overline{\varsigma}, r_0)$. Поэтому его сумма $g(z)$ — аналитическая в этом круге функция. Рассмотрим ряд

$$\sum_{p=1,n=0}^{\infty,n(p)} c_p \tilde{d}_{p,n} z^n \exp(\lambda_{k(p)}z), \tag{5.2}$$

полученный из ряда (5.1) при помощи раскрытия скобок последнего. Оценим коэффициенты $\tilde{d}_{p,n}$. Имеем

$$(z-\overline{\varsigma})^{n(p)} = \sum_{n=0}^{n(p)} \tilde{d}_{p,n} z^n.$$

Из неравенств Коши получаем:

$$|\tilde{d}_{p,n}| \leqslant \max_{|z|=1} |(z-\overline{\varsigma})^{n(p)}| \leqslant \max_{z\in B(\overline{\varsigma},2)} |(z-\overline{\varsigma})^{n(p)}| \leqslant 2^{n(p)} \leqslant \exp(\rho|\lambda_{k(p)}|).$$

Пусть z — произвольная точка пересечения круга $B(0,1)$ и полуплоскости $Re(z\varsigma) < 1-\rho-\beta$, $\beta > 0$. Тогда верны неравенства

$$\sum_{p=1,n=0}^{\infty,n(p)} |c_p \tilde{d}_{p,n} z^n \exp(\lambda_{k(p)}z)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} (n(p)+1) \exp((-(1-1/p)+\rho)|\lambda_{k(p)}| + Re(\lambda_{k(p)}z)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} (n(p)+1) \exp((-(1-1/p)+\rho)|\lambda_{k(p)}| + |\lambda_{k(p)}| Re(z\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} (n(p)+1) \exp((-(1-1/p)+\rho)|\lambda_{k(p)}| + |\lambda_{k(p)}| Re(z(\varsigma+\xi_p)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} (n(p)+1) \exp((-(1-1/p)+\rho)|\lambda_{k(p)}| + (1-\rho-\beta)|\lambda_{k(p)}| + |\xi_p||\lambda_{k(p)}|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} (\rho|\lambda_{k(p)}|+1) \exp(|\lambda_{k(p)}|/p - \beta|\lambda_{k(p)}| + |\xi_p||\lambda_{k(p)}|) < \infty.$$

Последняя оценка вытекает из соотношений $|\xi_p| \to 0$ и $|\lambda_{k(p)}| \geq p$. Следовательно, ряд (5.2) сходится на множестве $B(0,1) \cap \{z : Re(z\varsigma) < 1-\rho-\beta\}$. Последнее при $\beta < \rho$ содержит непустое пересечение $B(0, 1-\rho-\beta) \cap B(\overline{\varsigma}, 2\rho)$. Сумма ряда (5.2) на этом пересечении совпадает с функцией $g(z)$, поскольку частичные суммы ряда (5.1) являются одновременно и частичными суммами ряда (5.2).

Пусть $d_{k,n} = c_p \tilde{d}_{p,n}$, если $k = k(p)$, $n = 0, 1, \ldots, n(p)$, и $d_{k,n} = 0$ в противном случае. Мы получили последовательность коэффициентов $d = \{d_{k,n}\}$ такую, что $d \in \mathfrak{A}(\Lambda)$, а множество $D(\Lambda, d)$ пересекает круг $B(\overline{\varsigma}, 2\rho)$, куда аналитически продолжается функция $g_d = g$. Для завершения доказательства остается лишь показать, что множество $D(\Lambda, d)$ не содержит круг $B(\overline{\varsigma}, 2\rho)$. Рассмотрим точки $z = r\overline{\varsigma}$, $r > 1$. Поскольку

$$|\tilde{d}_{p,n}| = |C_{n(p)}^n \overline{\varsigma}^{n(p)-n}| \geq 1,$$

где $C^n_{n(p)}$ — число сочетаний из $n(p)$ элементов по n, то мы получаем

$$|c_p\tilde{d}_{p,n}z^n\exp(\lambda_{k(p)}z)| = r^n|\tilde{d}_{p,n}||c_pz^n\exp(\lambda_{k(p)}z)| \geq |c_pz^n\exp(\lambda_{k(p)}z)| =$$

$$= \exp(-(1-1/p)|\lambda_{k(p)}|)\exp Re(\lambda_{k(p)}z) = \exp(-(1-1/p)|\lambda_{k(p)}|)\exp Re(\lambda_{k(p)}\overline{\varsigma}) =$$

$$= \exp(-(1-1/p)|\lambda_{k(p)}|)\exp r|\lambda_{k(p)}|Re(\overline{\varsigma}\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|) =$$

$$= \exp(-(1-1/p)|\lambda_{k(p)}|)\exp r|\lambda_{k(p)}|Re(\overline{\varsigma}(\varsigma+\xi_p)) =$$

$$= \exp(-(1-1/p)|\lambda_{k(p)}|)\exp(|\lambda_{k(p)}|(r+Re(\overline{\varsigma}\xi_p))) \geq \exp(|\lambda_{k(p)}|((r-1)-|\xi_p|)).$$

Так как $|\xi_p| \to 0$, то это означает, что ряд (5.2) расходится во всех точках $z = r\overline{\varsigma}$, $r > 1$ т.е. круг $B(\overline{\varsigma}, 2\rho)$ не лежит целиком на множестве $D(\Lambda, d)$. Лемма доказана.

Следующее утверждение является вариацией теоремы 3.1.

Лемма 5.2. *Пусть последовательность Λ такова, что $m(\Lambda) = 0$ и $N(\Lambda) \neq 0$. Тогда существует последовательность коэффициентов $d \in (\Lambda)$ такая, что не все граничные точки множества $D(\Lambda, d)$ являются особыми для функции $g_d(z)$.*

Доказательство. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $N(\Lambda) < \infty$, и при этом сохраняется условие $N(\Lambda, \mathbb{C}) = N(\Lambda) \neq 0$. Тогда из определения величины $N(\Lambda, \mathbb{C})$ следует, что для каждого $\delta \in (0, 1)$ найдется точка $\xi \in \mathbb{S}$ такая, что $N(\Lambda, \Gamma(\xi, \delta))$ отлично от нуля. Фиксируем какие-нибудь $\delta \in (0, 1/8)$ и $\xi \in \mathbb{S}$, для которых число $N(\Lambda, \Gamma(\xi, \delta/6))$ строго больше нуля. Тогда по лемме 2.2 верно неравенство $M_{\Lambda,\xi,\delta/3} > 0$. Согласно определению величины $M_{\Lambda,\xi,\delta/3}$ найдем неограниченно возрастающую последовательность положительных чисел $\{t_p\}$ такую, что

$$\lim_{p\to\infty}\frac{M_\Lambda(t_p\xi, \delta/3)}{t_p} > 0.$$

Отсюда следует, что для всех достаточно больших номеров p круг $B(t_p\xi, t_p\delta/3)$ содержит хотя бы одну точку $\lambda_{k(p)}$ последовательности $\{\lambda_k\}$. Нетрудно заметить, что имеет место вложение $B(t_p\xi, t_p\delta/3) \subset B(\lambda_{k(p)}, \delta|\lambda_{k(p)}|)$. Поэтому мы получаем:

$$\varlimsup_{p\to\infty}\frac{M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta)}{|\lambda_{k(p)}|} \geq \lim_{p\to\infty}\frac{M_\Lambda(t_p\xi, \delta/3)}{(1-\delta/3)t_p} > 0.$$

По условию $m(\Lambda) = 0$. Следовательно, сокращая при необходимости подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$, можно считать, что для некоторого $\tilde{\beta} > 0$ выполнены неравенства

$$M_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta) - m_{k(p)} \geq \tilde{\beta}|\lambda_{k(p)}|, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Отсюда с учетом леммы 2.1 получаем

$$\ln|q^{k(p)}_\Lambda(\lambda_{k(p)}, \delta)| \leqslant \ln\frac{1}{3(1-\delta)}(M_\Lambda(\lambda_k, \delta) - m_k) \leqslant \ln\frac{8}{21}\tilde{\beta}|\lambda_{k(p)}| = \beta|\lambda_{k(p)}|. \tag{5.3}$$

Как и в теореме 3.1 можно также считать, что каждая точка λ_k попадает в один и только один из кругов $B_p = B(\lambda_{k(p)}, \delta|\lambda_{k(p)}|)$, $p = 1, 2, \ldots$ Положим

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(\lambda_{k(p)}, 4\delta|\lambda_{k(p)}|)}\frac{\exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda-\lambda_{k(p)})q^{k(p)}_\Lambda(\lambda, \delta)}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

где $a_p \geq 1$. Как в теореме 3.1, получаем неравенства

$$|g_p(z)| \leqslant \exp(Re(\lambda_{k(p)}z) + 4\delta|\lambda_{k(p)}||z|), \quad p = 1, 2, \dots, z \in \mathbb{C}. \tag{5.4}$$

Рассмотрим ряд

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \tag{5.5}$$

где $c_p = \exp(-2\beta|\lambda_{k(p)}|)$, $p = 1, 2, \dots$ В силу (5.4) для всех точек z из круга $B(0, \alpha)$, $\alpha = 2\beta(1 + 4\delta)^{-1}$, имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_p g_p(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \exp(-2\beta|\lambda_{k(p)}| + Re(\lambda_{k(p)}z) + 4\delta|\lambda_{k(p)}||z|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \exp(-2\beta|\lambda_{k(p)}| + (1 + 4\delta)|\lambda_{k(p)}||z|) < \infty.$$

Последняя оценка верна, т.к. $N(\Lambda) < \infty$ (т.е. $|\lambda_{k(p)}| \geq ck(p)$, $c > 0$). Это означает, что ряд (5.5) сходится в каждой точке круга $B(0, \alpha)$, причем равномерно в любом меньшем круге. Следовательно, функция $g(z)$ аналитична в круге $B(0, \alpha)$.

Определим последовательность коэффициентов $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ точно также, как в теореме 3.1. Подберем теперь числа a_p, $p = 1, 2, \dots$ Выберем a_p такое, что

$$\max\left\{|\lambda_{k(p)}|^{-1}(\ln|b_{k,n}| - \ln a_p)\right\} = \beta, \tag{5.6}$$

где максимум берется по все номерам k, для которых $\lambda_k \in B_p$, и всем $n = 0, 1, \dots, m_k - 1$. В силу (5.3) верно неравенство $a_p \geq 1$.

Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \tag{5.7}$$

Как и в теореме 3.1, находим, что ряд (5.7) сходится в выпуклой области

$$D(\Lambda, d) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\lambda) < h(d, \lambda), \lambda \in \Theta(\Lambda)\}$$

и расходится в каждой точке ее внешности, за исключением, возможно, начала координат, а функция $h(d, \lambda)$ определяется по формуле

$$h(d, \lambda) = \inf \underline{\lim}_{l\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant m_{s(l)}-1} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{\lambda_{s(l)}}, \quad \lambda \in \Theta(\Lambda),$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{s(l)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ, когда $l \to \infty$.

Оценим величину $h(d, \lambda)$, $\lambda \in \Theta(\Lambda)$. Пусть $\lambda \in \Theta(\Lambda)$, подпоследовательность $\{\lambda_{s(l)}\}$ такова, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к λ и $\lambda_{s(l)} \in B_{p(l)}$, $l = 1, 2, \dots$ Имеем:

$$\min_{0\leqslant n\leqslant m_{s(l)}-1} \frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{|\lambda_{s(l)}|} \geq \min_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln(1/|d_{k,n}|)}{\lambda_k} =$$

$$= -\max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{|\lambda_{k(p(l))}|\ln|d_{k,n}|}{|\lambda_{k(p(l))}||\lambda_k|} \geq -\frac{1}{1\pm\delta} \max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1} \frac{\ln|d_{k,n}|}{|\lambda_{k(p(l))}|}.$$

Знак в знаменателе здесь противоположен знаку максимума. Отсюда с учетом определения коэффициентов c_p и равенства (5.6) получаем:

$$\min_{0\leqslant n\leqslant m_{s(l)}-1}\frac{\ln(1/|d_{s(l),n}|)}{|\lambda_{s(l)}|}\geq -\frac{1}{1\pm\delta}\max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1}\frac{\ln|d_{k,n}/c_{p(l)}|+\ln|c_{p(l)}|}{|\lambda_{k(p(l))}|}=$$

$$=-\frac{1}{1\pm\delta}\max_{k:\lambda_k\in B_{p(l)},0\leqslant n\leqslant m_k-1}\left(\frac{\ln|d_{k,n}/c_{p(l)}|}{|\lambda_{k(p(l))}|}-2\beta\right)=\frac{\beta}{1+\delta}\geq\frac{8\beta}{9}.$$

Таким образом, согласно определению функции $h(d,\lambda)$ имеем:

$$h(d,\lambda)\geq 4\beta/5,\qquad \lambda\in\Theta(\Lambda).$$

Пусть $D=B(0,8\beta/9)$. Тогда $H_D(\lambda)=8\beta/9$ для всех $\lambda\in\mathbb{S}$. Из последнего неравенства вытекает, что множество $D(\Lambda,d)$ содержит область $D(\Theta(\Lambda))$. Как и в теореме 3.1, функция g_d, являющаяся суммой ряда (5.7), совпадает с g на пересечении областей $D(\Lambda,d)$ и $B(0,\alpha)$, которое не пусто, т.к. $D(\Theta(\Lambda))\cap B(0,\alpha)\neq\oslash$.

В результате наших построений мы получили последовательность коэффициентов $d=\{d_{k,n}\}$ такую, что $d\in\mathfrak{A}(\Lambda)$, а множество $D(\Lambda,d)$ пересекает круг $B(0,\alpha)$, куда аналитически продолжается функция g_d. Для завершения доказательства остается лишь показать, что множество $D(\Lambda,d)$ не содержит круг $B(0,\alpha)$.

Фиксируем какую-нибудь подпоследовательность $\{\lambda_{s(l)}\}$, $\lambda_{s(l)}\in B_{p(l)}$, $l=1,2,\ldots$, последовательности $\{\lambda_k\}$ такую, что $\lambda_{s(l)}/|\lambda_{s(l)}|$ сходится к некоторой точке $\xi\in\Theta(\Lambda)$, и для $k=s(l)$ и некоторого $n=n(l)$, $l=1,2,\ldots$, в соотношении (5.6) реализуется максимум при $p=p(l)$, т.е.

$$|\lambda_{k(p(l))}|\ln|d_{s(l),n(l)}/c_{p(l)}|=\beta.$$

Отсюда с учетом определения чисел c_p получаем

$$\frac{\ln(1/|d_{s(l),n(l)}|)}{|\lambda_{s(l)}|}=\frac{-(\ln|d_{s(l),n(l)}/c_{p(l)}|+\ln|c_{p(l)}|)|\lambda_{k(p(l))}|}{|\lambda_{k(p(l))}||\lambda_{s(l)}|}=\beta\frac{|\lambda_{k(p(l))}|}{|\lambda_{s(l)}|}\leqslant\frac{\beta}{1-\delta}\leqslant\frac{8\beta}{7}.$$

Следовательно, $h(d,\xi)\leqslant 8\beta/7$. Пусть $z=r\overline{\xi}$, $8\beta/7<r<4\beta/3$. Тогда $z\in B(0,\alpha)$, т.к. $\alpha=2\beta(1+4\delta)^{-1}\geq 4\beta/3$. В то же время

$$Re(z\xi)=Re(r\overline{\xi}\xi)=r>8\beta/7>h(d,\xi),$$

т.е. $z\notin D(\Lambda,d)$. Лемма доказана.

Теперь мы можем сформулировать и доказать заявленный в начале параграфа результат.

Теорема 5.1. *Для того чтобы область существования суммы каждого ряда вида (1.1), для которого $D(\Lambda,d)\neq\oslash$, совпадала с множеством $D(\Lambda,d)$ (открытым ядром множества сходимости этого ряда), необходимо и достаточно выполнение равенств $N(\Lambda)=0$ и $S_\Lambda=0$.*

Доказательство. Если $N(\Lambda)=0$ и $S_\Lambda=0$, то в силу следствия 4.4 область существования суммы каждого ряда вида (1.1), для которого $D(\Lambda,d)\neq\oslash$, совпадает с множеством $D(\Lambda,d)$. Обратно, пусть последнее утверждение имеет место. Тогда из леммы 5.1 вытекает равенство $m(\Lambda)=0$. Отсюда согласно лемме 5.2 получаем равенство $N(\Lambda)=0$, а согласно теореме 3.1 и равенство $S_\Lambda=0$. Теорема доказана.

Как показано выше, величина $S_\Lambda=0$ равна нулю, если $\lambda_k=k$ и $m_k=1$. Поэтому из теоремы 5.1 вытекает утверждение, обратное к теореме Фабри.

Следствие 5.1. *Для того чтобы область существования суммы каждого ряда вида (1.2) совпадала с кругом сходимости этого ряда, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{k(n)}=0.$$

6. О теореме А. Островского

В этом заключительном параграфе мы приведем указанный во введении пример, очерчивающий рамки применимости результата теоремы А. Островского. Этот пример представляет из себя еще одну вариацию теоремы 3.1. Прежде всего, построим подходящую последовательность $\{\lambda_k\}$. Фиксируем числа $h,\alpha>0$ с условием $h\alpha<1$. Выберем возрастающую последовательность положительных чисел $\{\mu_p\}$ такую, что $\mu_p/\mu_{p+1}\to 0$ при $p\to\infty$. В силу последнего соотношения можно считать, что отрезки $[(1-h\alpha)\mu_p,\mu_p]$, $p=1,2,\ldots$, попарно не пересекаются. Пусть $s(p)$ — целая часть числа $\alpha\mu_p$. Положим $k(0)=0$ и $k(p)=k(p-1)+s(p)+1$, $p=1,2,\ldots$ Определим теперь последовательность $\{\lambda_k\}$ следующим образом:

$$\lambda_{k(p)}=\mu_p,\quad \lambda_k=\lambda_{k(p)}-(k(p)-k)h,\quad k(p-1)<k<k(p),p=1,2,\ldots$$

Таким образом, последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}$ разбита на группы $\Lambda_p=\{\lambda_{k(p-1)+1},\ldots,\lambda_{k(p)}\}$, каждая из которых лежит на соответствующем отрезке $[(1-h\alpha)\mu_p,\mu_p]$, $p=1,2,\ldots$ Поскольку

$$\lambda_{k(p-1)+1}-\lambda_{k(p)}\geq(1-h\alpha)\mu_{p+1}-\mu_p=\mu_{p+1}\left(1-h\alpha-\frac{\mu_p}{\mu_{p+1}}\right)\to\infty,\quad p\to\infty,$$

то $\underline{\lim}_{k\to\infty}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=h$. Кроме того,

$$N(\Lambda)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k}{\lambda_k}=\alpha.$$

Действительно,

$$\lim_{p\to\infty}\frac{k(p)}{\lambda_{k(p)}}=\lim_{p\to\infty}\frac{k(p-1)+s(p)+1}{\lambda_{k(p)}}=\lim_{p\to\infty}\frac{k(p-1)+\alpha\mu_p}{\lambda_{k(p)}}=\lim_{p\to\infty}\frac{k(p-1)+\alpha\lambda_{k(p)}}{\lambda_{k(p)}}=$$
$$=\lim_{p\to\infty}\frac{k(p-1)}{\lambda_{k(p)}}+\alpha.$$

По построению величина $k(p)$ совпадает с числом точек λ_k на отрезке $[0,\mu_p]=[0,\lambda_{k(p)}]$. Последнее же не превосходит $\lambda_{k(p)}/h$. Поэтому

$$0\leqslant\lim_{p\to\infty}\frac{k(p-1)}{\lambda_{k(p)}}\leqslant\lim_{p\to\infty}\frac{\lambda_{k(p-1)}/h}{\lambda_{k(p)}}=0.$$

Следовательно, мы имеем:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{k(p)}{\lambda_{k(p)}}=\alpha. \tag{6.1}$$

Пусть $k(p-1)<k<k(p)$. Тогда

$$\frac{k}{\lambda_k}=\frac{k(p)-s}{\lambda_{k(p)}-hs}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_p(x)=\frac{k(p)-x}{\lambda_{k(p)}-hx}.$$

Знак ее производной совпадает со знаком числа $hk(p)-\lambda_{k(p)}$, а значит, и со знаком числа $k(p)/\lambda_{k(p)}-1/h$. Так как $h\alpha<1$, то в силу (6.1) последний становится отрицательным для достаточно больших номеров p. Следовательно, для таких p верна оценка

$$\varphi_p(s)=\frac{k}{\lambda_k}\leqslant\varphi_p(0)=\frac{k(p)}{\lambda_{k(p)}}.$$

Отсюда из (6.1) получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k}{\lambda_k}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k(p)}{\lambda_{k(p)}}=\alpha.$$

Таким образом, последовательность Λ удовлетворяет всем условиям теоремы А. Островского. Фиксируем положительное $\delta<h\alpha$ и для каждого $p=1,2,\ldots$ рассмотрим функцию

$$g_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(\lambda_{k(p)},4\delta\lambda_{k(p)})}\frac{\exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda-\lambda_{k(p)})q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta)},$$

где $a_p\geq 1$. Также, как в теореме 3.1, получаем неравенства

$$|g_p(z)|\leqslant\exp(Re(\lambda_{k(p)}z)+4\delta\lambda_{k(p)}|z|),\quad p=1,2,\ldots,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Пусть

$$g(z)=\sum_{p=1}^{\infty}c_pg_p(z),\tag{6.2}$$

где $c_p=\exp(-\beta\lambda_{k(p)})$, $p=1,2,\ldots$, а $\beta>0$ мы определим чуть позже. Как и в лемме 5.2,

$$\sum_{p=1}^{\infty}|c_pg_p(z)|\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\exp((\gamma-\beta)\lambda_{k(p)}+4\delta\lambda_{k(p)}|z|)<\infty,$$

если z лежит в пересечении круга $|z|<(\beta-\gamma)/4\delta$ и полуплоскости $Rez<\gamma$. При этом ряд (6.2) на компактах из этого пересечения сходится равномерно, а потому его сумма там аналитична. Кроме того, как и в лемме 5.2, функция $g(z)$ аналитична в круге $B(0,\tilde{\alpha})$, $\tilde{\alpha}=\beta/(1+4\delta)$. По построению величина $M_\Lambda(\lambda_{k(p)},\delta)-m_{k(p)}$, которую мы обозначим $s(p,\delta)$, совпадает с целой частью числа $\delta\lambda_{k(p)}/h$, если последнее само не является целым, и равно $\delta\lambda_{k(p)}/h-1$ в противном случае. Тогда по лемме 2.1 получаем

$$\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)},\delta)|\leqslant s(p,\delta)\ln\frac{1}{3(1-\delta)}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)},\delta_p)|}{\lambda_{k(p)}}\leqslant\frac{\delta}{h}\ln\frac{1}{3(1-\delta)}=-\beta<0.$$

Как и в теореме 3.1, определим числа $a_p\geq 1$ и коэффициенты d_k так, что

$$\lim_{p\to\infty}\max_{k(p)-s(p,\delta)\leqslant k\leqslant k(p)}\left\{(\lambda_{k(p)})^{-1}\ln|d_k/c_p|\right\}=\beta.\tag{6.3}$$

И рассмотрим ряд Дирихле

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\exp(\lambda_kz).\tag{6.4}$$

Как и в лемме 5.2, с учетом (6.3) показывается, что

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\ln(1/|d_k|)}{\lambda_k}=-\frac{1}{1\pm\delta}\lim_{p\to\infty}\max_{k(p)-s(p,\delta)\leqslant k\leqslant k(p)}\frac{\ln|d_k/c_p|+\ln|c_{p(l)}|}{\lambda_{k(p)}}=$$
$$=-\frac{1}{1\pm\delta}\lim_{p\to\infty}\max_{k(p)-s(p,\delta)\leqslant k\leqslant k(p)}\left(\frac{\ln|d_k/c_p|}{\lambda_{k(p)}}-\beta\right)=0.$$

Следовательно, мнимая ось является прямой сходимости ряда (6.4).

Выше мы показали, что для каждого $\gamma>0$ сумма $g(z)$ ряда (6.4) в окрестности отрезка $[-i(\beta-\gamma)/4\delta, i(\beta-\gamma)/4\delta]$, где $\beta=(\delta/h)\ln(3(1-\delta))$, является аналитической функцией. Таким образом, расстояние между особыми точками суммы ряда (6.4) на прямой его сходимости достигает величины порядка $O(1/h)$, что при малых h и фиксированном α значительно больше чем радиус $r(\alpha,h)$ из теоремы А. Островского, который имеет порядок $O(-\ln h)$. Кроме того, функция $g(z)$ аналитична также в круге $B(0,\tilde\alpha)$, где $\tilde\alpha=\beta/(1+4\delta)$. Поскольку число δ выбиралось произвольно из интервала $(0,h\alpha)$, то это означает, что в теореме А. Островского речь идет об особых точках суммы ряда (6.4), лежащих на расстоянии, сравнимом с верхней плотностью α последовательности Λ, от прямой его сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Братищев А.В. *Базисы Кете, целые функции и их приложения* Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук// Ростов-на-Дону. 1995.
2. Кривошеева О.А. *Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях.* // Уфа. Изд-во УГАТУ. Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3(21). С.96–103.
3. J. Hadamard *Essai sur l'etude des fonctions donnes par leur developpement de Taylor* // J. Math. Pures Appl. Ser. (4). 1892. V. 4(8). P. 101–106.
4. E. Fabry *Sur les points singuliers d'une function donnee par son developpement de Taylor* // Ann. Ecole Norm. Sup. (3). 1896. V. 2. P. 367–399.
5. G. Polya *Uber die Exiistenz unendlich vieler singularer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichlet'sher Riehen* // Sitzungber. Preub. Akad. Wiss. 1923. P. 45–50.
6. G. Polya *Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Luckensatzes* // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. 1927. V. 2. P. 187–195.
7. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
8. V. Bernstein *Lecons sur les progress recents de la theorie des series de Dirichlet.* Paris: Gauthier-Villars. 1933.
9. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
10. A. Ostrowski *Uber die analytishe Fortsetzung von Taylorshen und Dirichletchen Reihen* // Math. Ann. 1955. V. 129. P. 1–43.
11. Лунц Г.Л. *О рядах Дирихле с комплексными показателями* // Матем. сб. 1965. Т. 67 (109), № 1. С. 89–134.
12. Лунц Г.Л. *Ряд Дирихле с неизмеримой последовательностью комплексных показателей.* // Матем. сб. 1965. Т. 68 (110), № 1. С. 58–62.
13. Кривошеев А.С. *Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств.* // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 4. С. 457–460.
14. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях.* // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
15. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
16. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.
17. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных.* Мир. М. 1989.
18. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982.
19. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. III: О распространении спектрального синтеза* // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130), № 3. С. 331–352.
20. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения.* ИЛ. 1955.

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru