ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 4 (2009). С. 133-143.

УДК 517.946

О КОНЕЧНО ПЛОТНОМ РЕШЕНИИ ВЫСШЕГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

А.Б. ХАСАНОВ, А.А. РЕЙИМБЕРГАНОВ

Аннотация. В данной работе найдено конечно плотное решение высшего нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора типа Дирака.

Ключевые слова: линейный оператор, обратная задача рассеяния, данные рассеяния, собственное значение, собственная функция.

1. Введение

Открытие замечательных свойств уравнения Кортевега-де Фриза [1] вызвало интенсивный поиск других нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. В настоящее время существует несколько путей, приводящих к такого рода уравнениям. Так или иначе все они связаны с нахождением пары линейных операторов, удовлетворяющих некоторому операторному соотношению, часто понимаемому как условие совместности двух линейных уравнений [2]. При этом возникает следующая задача: дан линейный оператор L и требуется найти линейный оператор S такой, что условие совместности линейных уравнений $Lv = \xi v$ и $v_t = Sv$ порождает операторное уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x} + [L, S] = 0. \qquad (1)$$

Пусть $L(t) = i\begin{pmatrix} D_x & -u^*(x,t) \\ u(x,t) & -D_x \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2^* \\ S_2 & -S_1 \end{pmatrix}$,
где

$$S_1(x,t,\xi) = 2i\xi^n - 2\sum_{j=1}^{m} D_x^{-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left\{\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} u^* D_x^k(u\Omega_{j-k-1})\right\}\xi^{m-j} -$$

$$-2\sum_{j=1}^{m} D_x^{-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left\{\left(-\frac{1}{2i}\right)^{k+1} u D_x^k(u^*\Omega_{j-k-1})\right\}\xi^{m-j},$$

$$S_2(x,t,\xi) = -2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} D_x^k(u\Omega_{j-k-1})\xi^{m-j},$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_x D_x^{-1} = D_x^{-1} D_x = 1.$$

Здесь $\Omega_j(x,t)$ определяется из следующих реккурентных соотношений:

A.B. Khasanov, A.A. Reyimberganov, About the finite density solution of the higher nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source.

Поступила 17 октября 2009 г.

$$\Omega_0(x,t) = 2i,$$

$$\Omega_j(x,t) = -2D_x^{-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left\{\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} u^* D_x^k(u\Omega_{j-k-1}) + \left(-\frac{1}{2i}\right)^{k+1} uD_x^k(u^*\Omega_{j-k-1})\right\},$$

$$j = 1,\ 2,\ ...,\ m.$$

Тогда условие (1) примет вид

$$iu_t - 4\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} D_x^k(u\Omega_{m-k}) = 0.$$

Это уравнение называется высшим нелинейным уравнением Шредингера (ВНУШ). В частности, при $m = 2$ получаем классическое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), а в случае $m = 3, 4, 5,\ ...$ имеем, соотвественно,

$$u_t + 3|u|^2 u - \frac{1}{2}u_{xxx} = 0,$$

$$iu_t + \frac{3}{2}|u|_x^2 u_x + 2|u|u_{xx} - \frac{3}{2}|u|^4 u - \frac{1}{2}u_x^* u_x u + \frac{1}{2}u_{xx}^* u^2 - \frac{1}{4}u_{xxxx} = 0,$$

$$u_t + \frac{3}{4}|u|_{xx}^2 u_x + \frac{7}{4}|u|_x^2 u_{xx} + \frac{1}{2}|u| - \frac{9}{4}|u|^4 u_x - \frac{3}{4}|u|_x^4 u - \frac{1}{4}u_x^* u_x^2 + \frac{3}{2}|u|u^2 u_x^* - \frac{1}{8}u_{xxxxx} = 0$$

и т.д.

В работе [3] В. Захаров и А. Шабат показали, что НУШ

$$iu_t \pm 2|u|^2 u + u_{xx} = 0,$$

встречающееся при изучении оптической самофокусировки и расщеплении оптических пучков, также включается в формализм метода обратной задачи. Используя приём, предложенный П. Лаксом, они смогли решить НУШ для заданных начальных функций $u(x,0)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \to \infty$. Оказывается, в случае знака плюс перед вторым членом НУШ имеет солитонообразные решения. В работе [4] В.К. Мельников получил эволюции данных рассеяния по t самосопряженного оператора Дирака с потенциалом, являющимся решением НУШ с самосогласованным источником интегрального типа, и в работе [5] интегрировал НУШ с источником, состоящим из комбинации собственных функций оператора Дирака. В работе [6] В.Е. Захарова и А.Б. Шабата НУШ было проинтегрировано в классе "конечно плотных" функций, т.е., функций, для которых $u(x,t) \to e^{i\alpha_\pm - 2it}$, $u_x(x,t) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, а N-солитонное решение НУШ в случае конечной плотности было найдено в работе Yan-Chow Ma [7].

Следует заметить, что ВНУШ ранее изучено в работе [8]. В [9, 10] интегрировано высшее уравнение Кортевега-де Фриза с источником, а в [11] — высшее модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с источником интегрального типа.

В настоящей работе с помощью метода обратной задачи рассеяния найдено конечно плотное решение ВНУШ с самосогласованным источником.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ВНУШ с самосогласованным источником

$$\begin{cases} iu_t - 4\sum\limits_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} D_x^k(u\Omega_{m-k}) = 2\sum\limits_{n=1}^{N}(\Phi_{1n}^{*2} - \Phi_{2n}^2), \\ L\Phi_n = \xi_n\Phi_n, \quad n = 1, 2, ..., N \end{cases} \tag{2}$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{3}$$

где $\Phi_n = (\Phi_{1n}, \Phi_{2n})^T$ — собственная вектор-функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению ξ_n, $n = 1, 2, ..., N$.

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1. $\int\limits_{-\infty}^{0}(1-x)|u_0(x) - \rho e^{i\alpha}|dx + \int\limits_{0}^{\infty}(1+x)\big|u_0(x) - \rho e^{i\beta}\big|dx < \infty$, $\rho > 0$.

2. Оператор $L(0)$ имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), ..., \xi_N(0)$ лежащих на интервале $(-\rho, \rho)$.

Пусть функция $u(x, t)$ достаточно гладкая и достаточно быстро стремится к своим переделам при $x \to \pm\infty$, так что

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(1-x)\big|u(x,t) - \rho e^{i\alpha - 2\Omega_m^\infty t}\big|dx + \int\limits_{0}^{\infty}(1+x)\big|u(x,t) - \rho e^{i\beta - 2\Omega_m^\infty t}\big|dx +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u^k(x,t)}{\partial x^k}\right|dx < \infty, \quad \rho > 0. \tag{4}$$

Здесь $\Omega_m^\infty = \lim\limits_{|x|\to\infty}\Omega_m$.

В частности, $\Omega_0^\infty = 2i$, $\Omega_1^\infty = 0$, $\Omega_2^\infty = i\rho^2$, $\Omega_3^\infty = 0$, $\Omega_4^\infty = \dfrac{3i\rho^4}{4}$ и т.д.

Предполагается, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{1n}\Phi_{2n}dx = A_n(t)e^{2\Omega_n^\infty t}, \quad n = 1, 2, ..., N, \tag{5}$$

где $A_n(t)$ — изначально заданные непрерывные функции от t.

Основная цель данной работы — получить представления для решений $u(x, t)$,

$\Phi_n(x, t)$,$n = 1, 2, ..., N$ задачи (2)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

3. Необходимые сведения из теории рассеяния

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi v_1 = u^*(x,t)v_2 \\ v_{2x} - i\xi v_2 = u(x,t)v_1 \end{cases} \tag{6}$$

с потенциалом $u(x, t)$, удовлетворяющим условию (4). В этом разделе будут приведены хорошо известные, необходимые для дальнейшего сведения касающиеся теории прямой и обратной задачи рассеяния для системы уравнений (6) на всей оси (см. [12]).

При выполнении условия (4) существуют решения Йоста системы уравнений (6) со следующими асимптотиками

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i(\xi-p)}{\rho} e^{i\alpha - 2\Omega_m^\infty t} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \\ \tilde{\varphi} \sim \begin{pmatrix} -\dfrac{i(\xi-p)}{\rho} e^{-i\alpha + 2\Omega_m^\infty t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi \sim \begin{pmatrix} -\dfrac{i(\xi-p)}{\rho} e^{-i\beta + 2\Omega_m^\infty t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \\ \tilde{\psi} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i(\xi-p)}{\rho} e^{i\beta - 2\Omega_m^\infty t} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

где

$$p(\xi) = \sqrt{\xi^2 - \rho^2}. \tag{8}$$

При действительных ξ ($\xi^2 \geq \rho^2$) ветвь квадратного корня фиксируется условием $sign\, p(\xi) = sign\, \xi$. Риманова поверхность Γ функции $p(\xi)$ состоит из двух экземпляров Γ_+ и Γ_- комплексной плоскости C^1 с разрезами по вещественной оси от $-\infty$ до $-\rho$ и от ρ до ∞ с отождествленными надлежащим образом берегами разрезов. Функция $p(\xi)$ вводится на Γ формулой (8), где $\pm Imp \geq 0$ на листах $\Gamma_\pm$. В дальнейшем для удобства мы часто будем опускать зависимость функции $p(\xi)$ от ξ. Таким образом, в формулах, где участвует $p(\xi)$ и ξ, всегда подразумевается, что p является функцией от ξ.

При действительных p и ξ пары вектор-функций $\{\varphi, \tilde{\varphi}\}$ и $\{\psi, \tilde{\psi}\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (6), поэтому

$$\varphi(x,t,\xi) = a(t,\xi)\tilde{\psi}(x,t,\xi) + b(t,\xi)\psi(x,t,\xi). \tag{9}$$

Заметим, что

$$a(t,\xi) = \frac{\rho^2}{2p(\xi-p)} W\{\varphi, \psi\}, \tag{10}$$

$$b(t,\xi) = -\frac{\rho^2}{2p(\xi-p)} W\{\varphi, \tilde{\psi}\} \quad \text{и} \quad |a(t,\xi)|^2 - |b(t,\xi)|^2 = 1.$$

Обозначим вронскиан двух функций u и v через $W\{u,v\} = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Из формул (10) следует, что $a(t,\xi)$ аналитична на листе Γ_+, исключая точки ветвления $\xi = \pm\rho$. Нули ξ_n функции $a(t,\xi)$ на Γ_+ лежат в интервале $(-\rho,\rho)$, являются простыми и их число N конечное. Они составляют дискретный спектр оператора $L(t)$.

Из (10) при $\xi = \xi_n$ следует, что

$$\varphi(x,t,\xi_n) = C_n(t)\psi(x,t,\xi_n), \qquad n = 1,2,...,N.$$

Для функции $\psi(x,t,\xi)$ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi(x,t,\xi) = \begin{pmatrix} -\frac{i(\xi-p)}{\rho} e^{-i\beta + 2\Omega_m^\infty t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} + \int\limits_x^\infty K(x,s,t) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{i(\xi-p)}{\rho} e^{-i\beta + 2\Omega_m^\infty t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ips} ds, \tag{11}$$

где $K(x,s,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,s,t) & K_{12}(x,s,t) \\ K_{21}(x,s,t) & K_{22}(x,s,t) \end{pmatrix}$.
В представлении (11) компоненты матрицы $K(x,y,t)$ не зависят от ξ и имеет место равенство

$$2K_{21}(x,x,t) = \rho^{i\beta - 2\Omega_m^\infty t} - u(x,t).$$

Компоненты ядра $K(x,y,t)$ при $y \geq x$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$K(x,y,t) + F(x+y,t) + \int\limits_x^\infty K(x,s,t)F(s+y,t)ds = 0,$$

где

$$F(x,t) = \begin{pmatrix} F_1(x,t) & F_2^*(x,t) \\ F_2(x,t) & F_1(x,t) \end{pmatrix},$$

$$F_1(x,t) = \frac{\rho e^{-i\beta+2\Omega_m^\infty t}}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b(t,z)}{a(t,z)}e^{i\frac{x}{2}\left(z-\frac{\rho^2}{z}\right)}dz - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j(t)}{\dot a(t,z_j)}\frac{\rho e^{-i\beta+2\Omega_m^\infty t}}{z_j}e^{i\frac{x}{2}\left(z_j-\frac{\rho^2}{z_j}\right)},$$

$$F_2(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b(t,z)}{a(t,z)}e^{i\frac{x}{2}\left(z-\frac{\rho^2}{z}\right)}dz + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j(t)}{\dot a(t,z_j)}e^{i\frac{x}{2}\left(z_j-\frac{\rho^2}{z_j}\right)},$$

$$z_j = \xi_j + i\sqrt{\rho^2 - \xi_j^2}$$

и $\dot a(t,z_n) = \left.\dfrac{\partial a(t,z)}{\partial z}\right|_{z=z_n}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть вектор-функции* φ, ψ_n, $n = 1,2,...,N$ *являются решениями уравнений*

$$L\varphi = \xi\varphi,\ L\psi_n = \xi_n\psi_n, \quad n = 1,2,...,N,$$

соответственно, тогда справедливы равенства

$$\frac{d}{dx}(\varphi_1\psi_{2n} - \varphi_2\psi_{1n}) + i(\xi - \xi_n)(\varphi_1\psi_{2n} + \varphi_2\psi_{1n}) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(\varphi_1^*\psi_{1n} - \varphi_2^*\psi_{2n}) - i(\xi^* - \xi_n)(\varphi_1^*\psi_{1n} + \varphi_2^*\psi_{2n}) = 0.$$

Отметим, что вектор-функции

$$h_n(x,t) = \frac{\frac{d}{d\xi}\left(\varphi - C_n\psi\right)\big|_{\xi=\xi_n}}{\dot a(t,\xi_n)}, \qquad n = 1,2,...,N \tag{12}$$

являются решениями уравнений $Lh_n = \xi_n h_n$. Согласно равенству (10) получим следующие асимптотики

$$\psi \sim a(t,\xi)\begin{pmatrix} -\frac{i(\xi-p)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t} \\ 1 \end{pmatrix}e^{ipx} \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

$$\varphi \sim a(t,\xi)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi-p)}{\rho}e^{i\beta-2\Omega_m^\infty t}\end{pmatrix}e^{-ipx} \quad \text{при} \quad x\to\infty,$$

которые справедливы при $Imp>0$. Из этих оценок и равенства (12) следует, что

$$h_n \sim -C_n(t)\begin{pmatrix} -\frac{i(\xi_n-p_n)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t} \\ 1\end{pmatrix}e^{ip_n x} \quad \text{при} \quad x\to-\infty,$$

$$h_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi_n-p_n)}{\rho}e^{i\beta-2\Omega_m^\infty t}\end{pmatrix}e^{-ip_n x} \quad \text{при} \quad x\to\infty,$$

где $p_n=i\sqrt{\rho^2-\xi_n^2}$. В частности,

$$W\{\varphi_n,h_n\}=-\frac{2p_n(\xi_n-p_n)}{\rho^2}C_n, \quad n=1,2,...,N.$$

Набор величин $\{\ a(t,\xi),\ b(t,\xi),\ \xi_k(t),\ C_k(t),\ k=1,2,...,N\ \}$ называется данными рассеяния для системы уравнений (6).

4. Эволюция данных рассеяния

Пусть потенциал $u(x,t)$ в системе уравнений (6) является решением уравнения

$$iu_t-4\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1}D_x^k(u\Omega_{m-k})=G(x,t), \tag{13}$$

где функция $G(x,t)$ достаточно гладкая и достаточно быстро стремится к нулю при $x\to\pm\infty$.

Лемма 2. *Если потенциал $u(x,t)$ является решением уравнения (13), то данные рассеяния системы уравнений (6) с потенциалом $u(x,t)$ зависят от t следующим образом:*

$$a_t=-\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^\tau R\varphi dx,$$

$$b_t=\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^\tau R\varphi dx-\left(\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^\tau R\varphi dx+\right.$$

$$\left.+4\Omega_m^\infty-2S_2^\infty\frac{i(\xi+p)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}-2S_1^\infty\right)b,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^\tau R\varphi_n dx}{2\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n1}\varphi_{n2}dx},$$

$$\frac{dC_n}{dt}+(4\Omega_m^\infty-2S_{2,n}^\infty\frac{i(\xi_n+p_n)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}-2S_{1,n}^\infty)C_n=\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)}\int_{-\infty}^{\infty}h_n^\tau R\varphi_n dx,$$

$$n=1,2,...,N,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & G^* \\ G & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^\tau = (\varphi_2, \varphi_1), \quad h^\tau = (h_2, h_1),$$

$$S_j^\infty(t,\xi) = \lim_{|x|\to\infty} S_j(x,t,\xi), \quad S_{j,n}^\infty = S_j^\infty(t,\xi_n), \quad j = 1,\ 2.$$

Доказательство. Легко проверить, что в классе достаточно гладких функций, являющихся решением уравнения $Lv = \xi v$, выполняется функциональное равенство

$$[L,S] = LS - SL = \begin{pmatrix} 0 & 4\sum\limits_{k=0}^{m} \left(-\frac{1}{2i}\right)^{k+1} D_x^k(u^*\Omega_{m-k}) \\ -4\sum\limits_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} D_x^k(u\Omega_{m-k}) & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

По определению оператора $L(t)$ и из равенства (14) следует, что уравнение (13) тождественно операторному соотношению

$$L_t + [L,S] = R. \tag{15}$$

Пусть $\varphi(x,t,\xi)$ — решение Йоста уравнения

$$L\varphi = \xi\varphi.$$

Дифференцируя это равенство по t, получим

$$L_t\varphi + L\varphi_t = \xi\varphi_t. \tag{16}$$

Поставляя L_t из (15) в (16), имеем

$$(L-\xi)(\varphi_t - S\varphi) = -R\varphi. \tag{17}$$

Будем искать решение (17) в виде

$$\varphi_t - S\varphi = \gamma_1(x,t)\psi + \gamma_2(x,t)\varphi. \tag{18}$$

Для определения $\gamma_1(x,t)$ и $\gamma_2(x,t)$ получим уравнение

$$\sigma\,\gamma_{1x}\psi + \sigma\,\gamma_{2x}\varphi = iR\varphi, \tag{19}$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — матрица Паули. Умножая обе части (19) на $\varphi^\tau = (\varphi_2, \varphi_1)$ и $\psi^\tau = (\psi_2, \psi_1)$, находим

$$\begin{aligned} \gamma_{1x} &= \frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\varphi^\tau R\varphi, \\ \gamma_{2x} &= -\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\psi^\tau R\varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

На основании (4), (14) и асимптотики (7) при $x \to -\infty$ выводим

$$\varphi_t - S\varphi \to -(2\Omega_m^\infty - S_2^\infty \frac{i(\xi+p)}{\rho} e^{-i\alpha + 2\Omega_m^\infty t} - S_1^\infty) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi-p)}{\rho} e^{i\alpha - 2\Omega_m^\infty t} \end{pmatrix} e^{-ipx}.$$

Поэтому из (18) следует, что

$$\gamma_1(x,t) \to 0, \ \ \gamma_2(x,t) \to -2\Omega_m^\infty + S_2^\infty \frac{i(\xi+p)}{\rho} e^{-i\alpha + 2\Omega_m^\infty t} + S_1^\infty \quad \text{при} \quad x \to -\infty.$$

Решая (20), имеем

$$\gamma_1(x,t)=\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi^\tau R\varphi dx,$$
$$\gamma_2(x,t)=-\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int\limits_{-\infty}^{x}\psi^\tau R\varphi dx-2\Omega_m^\infty+S_2^\infty\frac{i(\xi+p)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}+S_1^\infty.$$

Таким образом, (18) может быть переписано в виде

$$\varphi_t-S\varphi=\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi^\tau R\varphi dx\psi+$$
$$+\left(-\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int\limits_{-\infty}^{x}\psi^\tau R\varphi\,dx-2\Omega_m^\infty+S_2^\infty\frac{i(\xi+p)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}+S_1^\infty\right)\varphi. \tag{21}$$

Используя (9) и переходя в (21) к пределу $x\to\infty$, находим, что

$$a_t=-\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^\tau R\varphi\,dx,$$

$$b_t=\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^\tau R\varphi dx-\left(\frac{i\rho^2}{2p(\xi-p)a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^\tau R\varphi dx+\right.$$
$$\left.+4\Omega_m^\infty-2S_2^\infty\frac{i(\xi+p)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}-2S_1^\infty\right)b.$$

Дифференцируя равенство $\varphi_n=C_n\psi_n$ по t, имеем

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n}+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_n}\frac{d\xi_n}{dt}=\frac{dC_n}{dt}\psi_n+C_n\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n}+C_n\left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_n}\cdot\frac{d\xi_n}{dt}.$$

Подставляя вместо $\frac{d}{d\xi}(\varphi-C_n\psi)|_{\xi=\xi_n}$ его выражение через $h_n(x)$, из (12) находим

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=\frac{dC_n}{dt}\psi_n+C_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t}-\dot a(t,\xi_n)h_n\frac{d\xi_n}{dt}, \tag{22}$$

где $\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n}$. Также, как и в случае непрерывного спектра, выводим равенство

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}-S\varphi_n=-\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_n^\tau R\varphi_n dx h_n-$$
$$-\left(-\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}h_n^\tau R\varphi_n dx+2\Omega_m^\infty-S_{2,n}^\infty\frac{i(\xi_n+p_n)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}-S_{1,n}^\infty\right)\varphi_n.$$

Согласно (22) последнее равенство можем написать в виде

$$\frac{dC_n}{dt}\psi_n+C_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t}-\dot a(t,\xi_n)h_n\frac{d\xi_n}{dt}-C_nS\psi_n=-\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_n^\tau R\varphi_n dx h_n-$$
$$-\left(-\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}h_n^\tau R\varphi_n dx+2\Omega_m^\infty-S_{2,n}^\infty\frac{i(\xi_n+p_n)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}-S_{1,n}^\infty\right)\varphi_n. \tag{23}$$

Используя равенство $\varphi_n=C_n\psi_n$ и переходя в (23) к пределу $x\to\infty$, получим

$$\frac{dC_n}{dt}+(4\Omega_m^\infty-2S_{2,n}^\infty\frac{i(\xi_n+p_n)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty t}-2S_{1,n}^\infty)C_n=\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_n^\tau R\varphi_n dx,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt}=\frac{i\rho^2}{2p_n(\xi_n-p_n)\dot a(t,\xi_n)C_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^\tau R\varphi_n dx.$$

На основании равенства

$$\dot a(t,\xi_n)=\frac{i\rho^2}{p_n(\xi_n-p_n)C_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{1n}\varphi_{2n}dx$$

уравнение для ξ_n напишем в следующем виде

$$\frac{d\xi_n}{dt}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^\tau R\varphi_n dx}{2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{1n}\varphi_{2n}dx}.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть

$$G(x,t)=2\sum_{n=1}^{N}(\Phi_{1n}^{*2}-\Phi_{2n}^2).$$

Применяя лемму 1,2 и асимптотики для φ, ψ и h_n, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(G^*\varphi_2^2+G\varphi_1^2)dx=0,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}(G^*\varphi_{2n}^2+G\varphi_{1n}^2)dx=0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(G^*\psi_{2n}\varphi_{2n}+G\psi_{1n}\varphi_{1n})dx=0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(G^*h_{2n}\psi_{2n}+Gh_{1n}\psi_{1n})dx=-\frac{4p_n(\xi_n-p_n)}{\rho^2}(A_n(t)e^{2\Omega_m^\infty t}-A_n^*(t)e^{-2\Omega_m^\infty t}).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Если функции $u(x,t)$, Φ_n, $n=1,2,...N$ являются решением задачи (2)-(5), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом:*

$$a(t,\xi)=a(0,\xi),$$

$$b(t,\xi)=b(0,\xi)\exp\int\limits_0^t\left\{-4\Omega_m^\infty+2S_2^\infty\frac{i(\xi+p)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty\tau}+2S_1^\infty\right\}d\tau\quad \text{при}\quad Imp=0,$$

$$\xi_n(t)=\xi_n(0),$$

$$C_n(t)=C_n(0)\exp\int\limits_0^t\left\{-4\Omega_m^\infty+2S_{2,n}^\infty\frac{i(\xi_n+p_n)}{\rho}e^{-i\alpha+2\Omega_m^\infty\tau}+2S_{1,n}^\infty+\right.$$

$$\left.+2iA_n(\tau)e^{2\Omega_m^\infty\tau}-2iA_n^*(\tau)e^{-2\Omega_m^\infty\tau}\right\}d\tau,\quad n=1,2,...N.$$

5. Пример

Рассмотрим систему уравнений (2) при $m=3$

$$\begin{cases} iu_t+3i|u|^2u-\frac{1}{2}iu_{xxx}=2\sum\limits_{n=1}^{N}(\Phi_{1n}^{*2}-\Phi_{2n}^2), \\ L\Phi_n=\xi_n\Phi_n,\ \ n=1,2,...,N \end{cases}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=\sqrt{2}\cdot\frac{1+ie^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

В этом случае, решая прямую задачу для оператора $L(0)$, находим

$$a(0,\xi)=\frac{\xi+p-1-i}{\xi+p-1+i},\ \ N=1,\ \ b(0,\xi)=0,\ \ \xi_1(0)=1,\ \ C_1(0)=\frac{i-1}{\sqrt{2}}.$$

Из вышеприведённой теоремы следует, что

$$a(t,\xi)=\frac{\xi+p-1-i}{\xi+p-1+i},\quad b(t,\xi)=0,\quad \xi_1(t)=1,$$

$$C_1(t)=\frac{i-1}{\sqrt{2}}\exp(8t+2i\int\limits_0^t(A_1(\tau)-A_1^*(\tau))d\tau).$$

Применяя процедуру обратной задачи теории рассеяния для оператора $L(t)$, получим

$$u(x,t)=\sqrt{2}\cdot\frac{1+i\exp(-2x+8t+2g(t))}{1+\exp(-2x+8t+2g(t))},$$

где $g(t)=i\int\limits_0^t(A_1(\tau)-A_1^*(\tau))\,d\tau$. С помощью представления (11) и нормировки (5) находим

$$\Phi_1=\begin{pmatrix} -\frac{i+1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}(i-1)A_1(t)}}{2ch(-x+4t+g(t))}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruska1, R.M. Miura *Method for solving the KdV equation.* // Phys. Rev. Lett. 19, № 19. 1967. P. 1095–1097.
2. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C Newell, H. Segur *Nonlinearevolution equations of physical significance*// Phys. Rev. Lett. 31, № 2. 1973. P. 125–127.
3. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде.* // ЖЭТФ. Москва. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
4. V.K. Melnikov *Integration of the nonlinear Schrödinger equation with a source*// Inverse Probl. 1992. V.8. P. 133–147.
5. V.K. Melnikov. *Integration of the Nonlinear Schroedinger Equation with a Self-Consistent Source*// Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 359–381.

6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *О взаимодействии солитонов в устойчивой среде* // ЖЭТФ. 1973. Т. 64, № 5. С. 1627–1639.
7. Yan-Chow Ma. *The perturbed plane-wave solutions of the Cubic Schrödinger Equation* // Studies in Applied Mathematics. 1979. № 60. P. 43–58.
8. Anjan Kundu. *Integrable hierarchy of higher nonlinear Schrödinger type equations* // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006. V. 2. nlin.si/051201v2, paper078.
9. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. *Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций* // Узб. матем. журнал. Ташкент. 2003. № 2. С. 53–59.
10. A.B. Khasanov, G.U. Urazboev *Solution of general KdV equation in the class step functions* // Journal of Mathematical Sciences. Springer. 2006. V. 136, № 1. P. 3625–3640.
11. Shuo Ye, Yunbo Zeng. *Integration of the mKdV hierarchy with integral type of source* // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2002. V. 1, nlin.si/0205024v1.
12. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М., Наука. 1986.

Акназар Бектурдиевич Хасанов,
Ургенчский Государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: ahasanov2002@mail.ru

Анвар Акназарович Рейимберганов,
Ургенчский Государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: anwar2006@mail.ru