ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 4 (2009). С. 33-66.

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКИ КВАЗИОДНОРОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

Ю.Н. ДРОЖЖИНОВ, Б.И. ЗАВЬЯЛОВ

Аннотация. Обобщенные функции, обладающие квазиасимптотикой по специальным группам преобразований аргументов этих функций в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными по этим группам преобразований. В частности, к этим функциям принадлежат все "квазиоднородные"обобщенные функции. В работе получено полное описание асимптотически однородных функций в начале координат по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}^n_+$, в том числе и в случае критических порядков. Для этого вводятся и изучаются специальные пространства обобщенных функций. Полученные результаты применяются для построения асимптотически квазиоднородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются квазиоднородные многочлены.

Ключевые слова: обобщенные функции, квазиасимптотика, тауберовы теоремы, дифференциальные уравнения в частных производных.

1. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathcal{N}$ — некоторое пространство (основных) функций ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и т.п.), штрихом сверху обозначаем пространство обобщенных функций (пространство линейных непрерывных функционалов) над пространством соответствующих основных функций. Следуя стандартам, принятым в теории обобщенных функций, обобщенную функцию $f \in \mathcal{N}'$ удобно указывать вместе с аргументом основной функции, и мы в основном пишем $(f(t), \psi(t))$, $\psi(t) \in \mathcal{N}$, вместо (f, ψ). В такой записи $f(Ut)$, где U — линейное преобразование координат, означает обобщенную функцию, дествующую по правилу $(f(Ut), \psi(t)) = \frac{1}{\det U}(f(t), \psi(U^{-1}t))$.

Определение 1.1. Пусть $\{U_k, k > 0\}$ — мультипликативная, непрерывная, однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, так что $U_{k_1k_2} = U_{k_1}U_{k_2}$. Пусть также $\mathcal{N}$ инвариантно относительно U_k, $\rho(k)$ - положительная непрерывная функция при $k > 0$ и $f \in \mathcal{N}'$. Мы говорим, что f обладает квазиасимптотикой в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$ по группе U_k, если для любой $\psi(t) \in \mathcal{N}$ и некоторой $g \in \mathcal{N}'$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho(k)}(f(U_{\frac{1}{k}}t), \psi(t)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (g(t), \psi(t)) \\ \left(\frac{1}{\rho(k)}(f(U_k t), \psi(t)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (g(t), \psi(t))\right).\end{gathered} \tag{1.1}$$

В этом случае говорят, что f *асимптотически однородна* в нуле (на бесконечности) по группе преобразований $\{U_k, k > 0\}$.

Yu. N. Drozhzhinov, B.I. Zavialov.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00144а и грант НШ-3224.2008.1 .
Поступила 2009 г.

Отметим, что U_k может быть представлена в виде $U_k = e^{E\ln k}$, где E — некоторое линейное преобразование $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем мы ограничимся следующим важным для приложений случаем, когда вещественная жорданова форма E имеет диагональный вид, причем все диагональные элементы либо отрицательны, либо положительны. Таким образом, если $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, то можно выбрать координаты $t = (t_1, \dots, t_n)$ так, что

$$U^a_k t = (k^{a_1}t_1, \dots, k^{a_n}t_n), \quad U^a_{\frac{1}{k}} t = U^{-a}_k t = (\frac{t_1}{k^{a_1}}, \dots, \frac{t_n}{k^{a_n}}).$$

В соответствии с предыдущим определением будем говорить, что $f(t) \in \mathcal{N}'$, удовлетворяющая условию (1.1), *асимптотически однородна* по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}^n_+$ в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$. Класс таких обобщенных функций обозначаем $AO^{-a}_\rho(\mathcal{N})$ ($AO^a_\rho(\mathcal{N})$ соответственно).

Нетрудно видеть, что если $f(t) \in AO^{-a}_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, то ее преобразование Фурье $\widetilde{f}(x) \in AO^a_{\rho_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, где $\rho_1(k) = k^{-|a|}\rho(k)$.

Если $g = 0$, то мы говорим, что $f(t)$ обладает *тривиальной квазиасимптотикой* по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}^n_+$ в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$. Если для $f \in \mathcal{N}'$ выполнено соотношение (1.1) и $g \neq 0$, то функция $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией (см.[6]).

Напомним, что положительная непрерывная функция $\rho(k)$ при $k > 0$ называется автомодельной, если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \to a^\alpha, \quad k \to \infty$$

равномерно на компактах по a в $(0, +\infty)$. Число α называется *порядком* автомодельности ρ. Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$, участвующей в (1.1), называется порядком асимптотически однородной обобщенной функции.

Заметим, что если $\rho(k)$ в соотношении (1.1) имеет порядок α, то g является однородной обобщенной функцией степени α по группе преобразований аргумента, определяемой вектором a, то есть $g(U^a_k t) = k^\alpha g(t), k > 0$ (такие функции называют иногда "квазиоднородными"(см. [9]), а про саму f, удовлетворяющую соотношению (1.1), говорят, что она *асимптотически квазиоднородна* относительно $\rho(k)$).

Из общего представления автомодельных функций непосредственно вытекает следующая

Лемма 1.1. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа c такая, что*

$$\begin{cases} \frac{1}{c}t^{\alpha-\varepsilon} \leqslant \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leqslant ct^{\alpha+\varepsilon} & \text{\textit{при}} \quad k > 1,\ t > 1 \\ \frac{1}{c}t^{\alpha+\varepsilon} \leqslant \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leqslant ct^{\alpha-\varepsilon} & \text{\textit{при}} \quad \frac{1}{k} < t < 1,\ k > 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α. Введем функцию

$$\widehat{\rho}(k) = \begin{cases} k^\alpha \int\limits_1^k \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty \\ \\ k^\alpha \int\limits_k^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{\rho}(k)$ — тоже автомодельная функция порядка α. Отметим некоторые ее свойства:

1. Пусть непрерывная комплекснозначная функция $r(k) \to 1$, при $k \to +\infty$, тогда

$$\frac{k^\alpha}{\widehat{\rho}(k)} \int_1^k \frac{\rho(\varkappa) r(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \text{ если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty;$$

$$\frac{k^\alpha}{\widehat{\rho}(k)} \int_k^\infty \frac{\rho(\varkappa) r(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \text{ если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \tag{1.4}$$

2.

$$\frac{\widehat{\rho}(k)}{k^\alpha} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty, & \text{если } \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty \\ 0, & \text{если } \int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

3.

$$\frac{\widehat{\rho}(k)}{\rho(k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{1.6}$$

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем и в различных задачах математической физики. Их описание и свойства хорошо изучены для пространства обобщенных функций из $\mathcal{S}'_+$ — пространства, двойственного к пространству $\mathcal{S}_+$, являющемуся проективным пределом банаховых пространств $\mathcal{S}_+^N$ — пополнения пространства $C^\infty([0, +\infty))$ по норме

$$P_N[\varphi] = \max_{|j| \leqslant N} \sup_{r \geqslant 0} (1+r)^N |\varphi^{(j)}(r)|.$$

В частности, $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{r}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} C f_{-\alpha+1}(r) \quad \text{ в } \mathcal{S}'_+, \tag{1.7}$$

где ядро дробного (дифференциирования) интегрирования $f_\beta(r) \in \mathcal{S}'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(r) = \begin{cases} \frac{\Theta(r) r^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \text{при } \beta > 0 \\ \frac{d^N}{dr^N} f_{\beta+N}(r), & \text{при } \beta \leqslant 0, \beta + N > 0, \text{ рекурентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ — гамма функция, $\Theta(r)$ — функция Хевисайда.

Класс обобщенных функций из $\mathcal{S}'_+$ асимптотически однородных в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ обозначаем через $AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_+)$. Справедлива следующая

Лемма 1.2. *Для того чтобы $f(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_+)$, то есть была асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $N > -\alpha + 1$ такое, что ее N-ая первообразная была непрерывна и обладала обычной асимптотикой относительно $r^N \rho(\frac{1}{r})$, то есть*

$$\frac{f^{(-N)}(r)}{r^N \rho(\frac{1}{r})} \underset{r \to +0}{\longrightarrow} A. \tag{1.8}$$

Доказательство см. в [5].

Напомним, что *первообразная (производная) порядка* β обобщенной функции $f(r) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(r) = f_\beta(r) * f(r).$$

Полное описание асимптотически однородных функций на бесконечности по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, получено в работе [1]. Основная цель данной статьи — получить подобного рода представление для асимптотически однородных функций в нуле. Основные теоремы будут изложены в § 4. Основным инструментом такого описания служит так называемое, *обобщенное сферическое представление* обобщенных функций, которое вводится в § 2 . Это представление сводит изучение асимптотических свойств обобщенных функций по группе U_k^a к исследованию радиальных асимптотических свойств обобщенных функций, заданных на специальных пространствах основных функций. Асимптотически однородные обобщенные функции на этих специальных пространствах изучаются в § 2 и § 3.

Наконец, в § 5 полученные результаты применяются для построения асимптотически квазиоднородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются квазиоднородные многочлены.

2. Пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'_J$

Как обычно, если $j = (j_1, \dots, j_n)$ — мультиндекс, то

$$j! = j_1! \cdot \dots \cdot j_n!; \quad |j| = j_1 + \dots + j_n \text{ и } \varphi^{(j)}(x) \equiv D^j\varphi(x) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \varphi(x).$$

Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Шварца быстро убывающих основных функций, а $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — соответствующее пространство медленно растущих обобщенных функций. Через $\mathcal{S}_{+\ell}$ обозначаем стандартное пространство основных функций вида $r^\ell\psi(r)$, где $\psi(r) \in \mathcal{S}_+$, то есть пространство основных функций, имеющих в нуле ноль порядка ℓ. (при $\ell = \infty$ — бесконечного порядка). Так, например, $\mathcal{S}_{+,\infty}$ состоит из бесконечно дифференциируемых функций на $\bar{\mathbb{R}}_+$, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой обратной степени r и имеющих ноль в начале координат бесконечного порядка.

Пусть J не более чем счетное (может быть пустое) множество чисел λ без точек накопления и ограниченное снизу.

$$J = \left\{ \lambda_i, \left\{ \begin{array}{lll} i = 0, \dots M, & & \text{если множество конечное;} \\ i = 0, 1, 2, \dots; & \lambda_i \nearrow +\infty, & \text{если множество счетное.} \end{array} \right. \right\}. \tag{2.1}$$

Такие множества вещественных чисел будем называть *допустимыми.* Всюду далее J — допустимое множество.

Отметим, что $J - \ell = \{\lambda_i - \ell, i = 0, 1, \dots\}$, где ℓ действительное число, также допустимое множество.

Обозначим через $\mathcal{S}_J$ пространство функций $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, быстро убывающих при $r \to +\infty$ вместе со всеми производными и таких, что для некоторых C_λ, зависящих от ψ,

$$[\psi(r) - \sum_{\lambda \leqslant N,\ \lambda \in J} C_\lambda r^\lambda] \in C^N([0, +\infty)), \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r) - \sum_{\lambda \leqslant N,\ \lambda \in J} C_\lambda r^\lambda]\bigg|_{r=0} = 0, \tag{2.2}$$

где $N \geqslant 0$ и $\ell = 0, \dots, N$. Топологию на $\mathcal{S}_J$ зададим с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leqslant \ell \leqslant N} \sup_{r>0} (1+r)^N \left| \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \left[\psi(r) - \sum_{\lambda \leqslant N,\ \lambda \in J} C_\lambda r^\lambda \eta(r)\right] \right| + \max_{\lambda \leqslant N,\ \lambda \in J} |C_\lambda|. \tag{2.3}$$

Здесь и всюду далее функция $\eta(r)$ бесконечно дифференциируема на $[0, +\infty)$, финитна и равна 1 в некоторой окрестности нуля. Например,

$$\eta(r) \in C^\infty([0, +\infty)), \quad \eta(r) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{при } r < 1, \\ 0 & \text{при } r > 2. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Заметим, что топология на $\mathcal{S}_J$ не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами. Через $\mathcal{S}_J^N$ обозначаем пополнение $\mathcal{S}_J$ по норме $\mathcal{P}_N$. Пространство $\mathcal{S}_J$ — пространство Фреше. Отметим также, что $\mathcal{S}_J$ инвариантно относительно дилатаций аргумента функций из этого пространства и $\mathcal{S}_{+,\infty} \subset \mathcal{S}_J$.

Кроме того, заметим, что если множество J' содержит J, то $\mathcal{S}_J \subset \mathcal{S}_{J'}$ (для добавочных точек $\lambda \in J'$, но не принадлежащих J, считаем $C_\lambda = 0$ для функций из $\mathcal{S}_J$). В частности, если J — пустое множество (обозначим его как $J_\emptyset$), то $\mathcal{S}_{J_\emptyset} = \mathcal{S}_{+,\infty}$.

На пространства $\mathcal{S}_J$ и $\mathcal{S}'_J$ переносятся (соответствующим образом) определения асимптотической однородности.

В пространстве $\mathcal{S}'_J$ определим моменты обобщенных функций и несколько конкретных обобщенных функций.

Определение 2.1. Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$. Если для некоторого $\lambda \in J$ существует предел

$$\lim_{k\to+\infty} (F(r), r^\lambda \eta(\frac{r}{k})) = M_\lambda[F], \tag{2.5}$$

не зависящий от функции $\eta(r) \in C^\infty([0,+\infty))$ с компактным носителем и равный единице в окрестности нуля, то $M_\lambda[F]$, называется *моментом порядка* λ обобщенной функции $F(r)$. Если $F(r)$ имеет компактный носитель, то $M_\lambda[F] = (F(r), r^\lambda)$.

Пусть $\lambda \in J$, определим $\triangle_\lambda(r)$ по формуле

$$(\triangle_\lambda(r), \psi(r)) = C_\lambda, \qquad \text{где } C_\lambda \text{ определяется формулой (2.2).} \tag{2.6}$$

Отметим, что $\triangle_\lambda(kr) = \frac{1}{k^{\lambda+1}}\triangle_\lambda(r)$, то есть $\triangle_\lambda(r)$ — однородная функция степени $-(\lambda+1)$.

Обобщенную функцию r_J^β определим формулой

$$(r_J^\beta, \varphi(r)) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty r^\beta\big(\varphi(r) - \sum\limits_{\lambda\in J,\ \lambda<-\beta-1} C_\lambda r^\lambda\big)dr, & \text{если } -\beta-1 \notin J; \\ \int\limits_0^\infty r^\beta\left(\varphi(r) - \sum\limits_{\lambda\in J,\ \lambda<-\beta-1} C_\lambda r^\lambda - C_{-\beta-1} r^{-\beta-1}\Theta(1-r)\right)dr, & \text{при } -\beta-1 \in J. \end{cases} \tag{2.7}$$

Отметим, что при $-\beta-1 \notin J$ функция r_J^β однородна степени β. Действительно,

$$((kr)_J^\beta, \varphi(r)) = \frac{1}{k}(r_J^\beta, \varphi(\frac{r}{k})) =$$

$$= \int\limits_0^\infty r^\beta(\varphi(\frac{r}{k}) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<-\beta-1} \frac{C_\lambda}{k^\lambda} r^\lambda)dr = k^\beta \int\limits_0^\infty r^\beta(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<-\beta-1} C_\lambda r^\lambda)dr.$$

При $-\beta-1 \in J$ обобщенная функция r_J^β не однородна. Заметим, что при $J = \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ пространство $\mathcal{S}_J = \mathcal{S}_+$, а $r_J^\beta = r_+^\beta$ и $\triangle_\lambda(r) = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}(r)$ (см. [7]).

Лемма 2.1. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, а $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ имеет компактный носитель и*

$$M_\lambda[F] = 0 \ \text{для } \forall\lambda \in J \ \text{и } \lambda \leqslant -\beta-1. \tag{2.8}$$

Тогда $F(r)$ имеет тривиальную квазиасимптотику на бесконечности относительно $\rho(k)$.

Доказательство см. в [1].

Лемма 2.2. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, а $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ и ее носитель отделен от нуля, то есть существует число $a > 0$, так что supp $F(r) \subset \{r \geqslant a\}$. Тогда $F(r)$ имеет тривиальную квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$.*

Доказательство. Пусть

$$\xi(r) \in C^\infty(0,+\infty), \quad \xi(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < \frac{a}{2}, \\ 1 & \text{при } r \geqslant a. \end{cases}$$

Для любой $\varphi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(F(\frac{r}{k}), \varphi(r)) = \frac{k}{\rho(k)}(F(r), \varphi(kr)) = \frac{k}{\rho(k)}(F(r), \xi(r)\varphi(kr)).$$

Далее

$$\left|\frac{1}{\rho(k)}(F(\frac{r}{k}), \varphi(r))\right| = \frac{k}{\rho(k)}\left|(F(r), \xi(r)\varphi(kr))\right| \leqslant \frac{k}{\rho(k)} C\mathcal{P}_N(\xi(r)\varphi(kr)) =$$

$$= \frac{k}{\rho(k)} C \max_{0\leqslant \ell \leqslant N} \sup_{r>\frac{1}{2}a} (1+r)^N \left|\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \xi(r)\varphi(kr)\right| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Следующие леммы и теоремы дают описание обобщенных функций из класса $AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$.

Лемма 2.3. *Пусть J — допустимое множество вещественных чисел, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, числа $A, \ell \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{Z}_+$, и $\gamma(r)$ — непрерывная при $r > 0$ функция, такая что*

$$\gamma(r) \sim A \cdot \rho(\frac{1}{r}) r^{N+\ell}, \quad r \to +0. \tag{2.9}$$

Тогда:
1. Если $\beta - 1 \notin J$, то обобщенная функция $F_1(r)$, определяемая формулой

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\psi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda)\right) dr, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}_J, \tag{2.10}$$

корректно определена на $\mathcal{S}_J$ и асимптотически однородна (в нуле) относительно $\rho(k)$, то есть $F_1(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$, причем

$$\frac{1}{\rho(k)} F_1(\frac{r}{k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AGr_J^{-\beta}, \text{ где } G = (\beta - \ell - N)\cdot \dots \cdot (\beta - \ell - 1). \tag{2.11}$$

2. Если $\beta - 1 \in J$ и $\int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} < \infty$, то обобщенная функция $F_1(r)$, определяемая формулой (2.10), принадлежит $\mathcal{S}'_J$ и асимптотически однородна в нуле относительно $\widehat{\rho}(k)$, то есть $F_1(r) \in AO_{\widehat{\rho}}^{-1}(\mathcal{S}_J)$, причем

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)} F_1(\frac{r}{k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pm AG \triangle_{\beta-1}(r) \tag{2.12}$$

со знаком минус.

3. Если $\beta - 1 \in J$ и $\int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} = \infty$, то обобщенная функция $F_1(r)$, определяемая формулой

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\psi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant\beta-1} C_\lambda r^\lambda)\right) dr, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}_J, \tag{2.13}$$

корректно определена на $\mathcal{S}_J$ и асимптотически однородна в нуле относительно $\widehat{\rho}(k)$, то есть $F_1(r) \in AO_{\widehat{\rho}}^{-1}(\mathcal{S}_J)$, причем выполнено соотношение (2.12) со знаком плюс.

Замечание. Если $\beta - 1 \in J$ и $\beta - 1 - \ell \in \mathbb{Z}_+$, а $N > \beta - 1 - \ell$, то $G = 0$. В этом случае обобщенная функция, определяемая формулой (2.10), корректно определена на $\mathcal{S}_J$ и асимптотически однородна (в нуле) относительно $\rho(k)$, то есть $F_1(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$, причем выполнено соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)} F_1(\frac{r}{k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (-1)^{-\beta+\ell+N+1} A(-\beta+\ell+N)!(\beta-\ell-1)!\Delta_{\beta-1}(r). \tag{2.14}$$

Доказательство. Сперва отметим, что формулы (2.10) и (2.13) корректно задают обобщенные функции из $\mathcal{S}'_J$. Обозначим через

$$g(r) = \begin{cases} \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell} \big(\psi(r) - \sum\limits_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda\big)\right) & \text{в случае 1. и 2.;} \\ \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell} \big(\psi(r) - \sum\limits_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant\beta-1} C_\lambda r^\lambda\big)\right) & \text{в случае 3.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Из определения пространства $\mathcal{S}_J$ (см. (2.3)) следует, что в окрестности нуля имеем

$$|g(r)| \leqslant c \begin{cases} r^{\beta-1+\Delta_1-\ell-N} & \text{в случае 1 и 3,} \\ r^{\beta-1-\ell-N} & \text{в случае 2.} \end{cases} \tag{2.16}$$

Справедлива также оценка

$$|\gamma(r)| \leqslant \text{const}\cdot\rho(\frac{1}{r}) r^{N+\ell} \leqslant c_\varepsilon r^{N+\ell-\beta-\varepsilon}, \quad \varepsilon < \Delta_1, \tag{2.17}$$

см. (1.2) при $\frac{1}{r} > 1$. Из этих оценок следует сходимость интегралов в (2.10) (в случае 1) и (2.13). Для случая 2 заметим, что формула (2.10) определяет обобщенную функцию на $\mathcal{S}_J$ в силу оценки

$$\int\limits_0^1 |\gamma(r) g(r)| dr \leqslant c \int\limits_0^1 r^{N+\ell} \rho(\frac{1}{r}) r^{\beta-1-\ell-N} dr = c \int\limits_1^\infty \frac{\rho(r')}{r'^{\beta+1}} dr' < \infty.$$

(сделана замена переменной $r' = \frac{1}{r}$).

Рассмотрим случай 1. Покажем, что $F_1(r)$, определяемая формулой (2.10), обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$. Для любой $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(F_1(\frac{r}{k}), \psi(r)) = \frac{k}{\rho(k)}(F_1(r), \psi(kr)) =$$

$$= \frac{k}{\rho(k)} \int\limits_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell} \left(\psi(kr) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda k^\lambda r^\lambda \right)\right] dr =$$

$$= \frac{k^{N+\ell}}{\rho(k)} \int\limits_0^k \gamma(\frac{r}{k}) g(r) dr = \int\limits_0^k \frac{\rho(\frac{k}{r})}{\rho(k)} \frac{\gamma(\frac{r}{k})}{(\frac{r}{k})^{N+\ell}\rho(\frac{k}{r})} r^{N+\ell} g(r) dr. \tag{2.18}$$

Учитывая, что в окрестности ∞

$$|g(r)| \leqslant c \begin{cases} r^{\beta-1-\Delta-\ell-N} & \text{в случае 1 и 2,} \\ r^{\beta-1-\ell-N} & \text{в случае 3.} \end{cases} \tag{2.19}$$

считая $\varepsilon < \min\{\Delta, \Delta_1\}$ (см. (2.16)) по лемме 1.1 имеем

$$\frac{\rho(\frac{k}{r})}{\rho(k)} \leqslant c \begin{cases} r^{\beta+\varepsilon} & \text{при } r<1, k>1 \\ r^{\beta-\varepsilon} & \text{при } 1<r<k, k>1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Учитывая оценки (2.16), (2.20) и оценку

$$\left|\omega(\frac{r}{k})\right| \leqslant \mathrm{const}, \quad \text{при } k > r, \quad \text{где } \omega(r) = \frac{\gamma(r)}{r^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r})}, \tag{2.21}$$

видим, что подынтегральная функция в (2.18) оценивается функцией $cr^{-1-(\Delta-\varepsilon)}$ в окрестности ∞ и функцией $cr^{-1+(\Delta_1-\varepsilon)}$ в окрестности нуля, то есть интегрируемой функцией, не зависящей от k. При $k \to +\infty$ существует предел у подынтегральной функции (при каждом r), равный $Ar^{-\beta+N+\ell}g(r)$. По теореме Лебега можно в (2.18) перейти к пределу при $k \to +\infty$. Имеем ("избавляясь"в пределе от производных) соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)}(F_1(\frac{r}{k}), \psi(r)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AG \int_0^\infty r^{-\beta}(\psi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda)dr.$$

Случай 1 доказан. Докажем справедливость замечания.

Действительно, замечая, что оценка (2.16) остается справедливой и в этом случае, ибо $\left(\frac{d}{dr}\right)^N (r^{-\ell}C_{\beta-1}r^{\beta-1}) = 0$, переходя к пределу в (2.18), имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(F_1(\frac{r}{k}), \psi(r)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A \int_0^\infty r^{-\beta+\ell+N} \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}\Big(\psi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda\Big)\right] dr =$$

$$= A \int_0^\infty r^{-\beta+\ell+N} \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}\Big(\psi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda - C_{\beta-1}r^{\beta-1}\eta(r)\Big)\right] dr +$$

$$+AC_{\beta-1} \int_0^\infty r^{-\beta+\ell+N} \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell+\beta-1}\eta(r)dr.$$

Нетрудно видеть (интегрируя по частям $\ell - \beta + N + 1$ раз), что первое слагаемое равно нулю. Замечая, что носитель подынтегрального выражения во втором интеграле финитен и отделен от нуля, интегрируя по частям второе слагаемое и учитывая, что $\eta(0) = 1$, доказываем соотношение (2.14).

Перейдем к оставшимся случаям 2 и 3 Действуя также, как и при получении соотношения (2.18) в предыдущем случае, для любой функции $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$(F_1(\frac{r}{k}), \psi(r)) = \int_0^k \omega(\frac{r}{k})\rho(\frac{k}{r})r^{N+\ell}g_1(r)dr +$$

$$+ \int_0^k \omega(\frac{r}{k})\rho(\frac{k}{r})r^{N+\ell} \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}C_{\beta-1}r^{\beta-1} \begin{cases} \eta(r) & \text{в случае 2} \\ 1-\eta(r) & \text{в случае 3} \end{cases}\right], \tag{2.22}$$

где функция $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (2.4), $\omega(r)$ определяется формулой (2.21), а

$$g_1(r) = g(r) - \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}C_{\beta-1}r^{\beta-1}\eta(r)\right]. \tag{2.23}$$

Замечая, что $g_1(r)$ удовлетворяет оценкам (2.16) и (2.19) для случая 1, точно также, как и при доказательстве предыдущего случая, выводим, что первое слагаемое справа в сумме (2.22) ведет себя при $k \to \infty$ как $c\rho(k)$, с некоторой постоянной c.

Учитывая, что

$$\begin{cases} \eta(r) & = 1 \\ 1-\eta(r) & = 0 \end{cases} \quad \text{при } r \leqslant 1 \text{ и } \begin{cases} \eta(r) & = 0 \\ 1-\eta(r) & = 1 \end{cases} \quad \text{при } r > 2,$$

для второго слагаемого справа в (2.22) имеем

$$\begin{cases} \text{в случае 2} & C_{\beta-1}(\int\limits_0^1+\int\limits_1^2)\omega(\frac{r}{k})\rho(\frac{k}{r})r^{N+\ell}\left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell+\beta-1}\eta(r)dr \\ \text{в случае 3} & C_{\beta-1}(\int\limits_1^2+\int\limits_2^k)\omega(\frac{r}{k})\rho(\frac{k}{r})r^{N+\ell}\left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell+\beta-1}(1-\eta(r))dr. \end{cases} \tag{2.24}$$

Пользуясь формулой Лейбница и оценками (2.20) и (2.21), при $k>1$ имеем (для случаев 2. и 3. соответственно)

$$\left|C_{\beta-1}\rho(k)\int\limits_1^2\omega(\frac{r}{k})\frac{\rho(\frac{k}{r})}{\rho(k)}r^{N+\ell}\left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell+\beta-1}\left\{\begin{array}{l}\eta(r)\\ 1-\eta(r)\end{array}\right. dr\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\rho(k)\int\limits_1^2 r^{\beta-\varepsilon+N+\ell}\sum_{m=0}^N A_m r^{-\ell+\beta-1-N+m}\left\{\begin{array}{l}|\eta^{(m)}(r)|\\ |(1-\eta(r))^{(m)}|\end{array}\right. dr\leqslant$$

$$\leqslant c\rho(k)\sum_{m=0}^N\int\limits_1^2 r^{m-1-\varepsilon}\left\{\begin{array}{l}|\eta^{(m)}(r)|\\ |(1-\eta(r))^{(m)}|\end{array}\right. dr\leqslant c\rho(k). \tag{2.25}$$

Рассмотрим оставшиеся интегралы в (2.24) при $k\to\infty$ соответственно для случаев 2 и 3. Выполняя дифференциирование, делая замену $\frac{k}{r}=\varkappa$, из (1.4) получим

$$GC_{\beta-1}\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^1\\ \int\limits_2^k\end{array}\right. \omega(\frac{r}{k})\rho(\frac{k}{r})r^{\beta-1}dr\sim GAC_{\beta-1}\left\{\begin{array}{l}\widehat{\rho}(k)\\ -\widehat{\rho}(k).\end{array}\right. \tag{2.26}$$

Отсюда следует справедливость (2.12) для случаев 2. и 3. Лемма доказана.

Докажем обратное утверждение в случае $\beta-1\notin J$.

Лемма 2.4. *Пусть J — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\beta,\beta-1\notin J$, а $F(r)\in\mathcal{S}'_J$ и $F(r)\in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$. Тогда найдется число ℓ, так что*

$$F(r)=F_0(r)+F_1(r), \tag{2.27}$$

где $F_0(r)\equiv 0$ в некоторой окрестности нуля, а $F_1(r)$ определяется формулой (2.10) с $\gamma(r)$, удовлетворяющей условию (2.9).

Доказательство. Разобьем F (с помощью соответствующего разбиения еденицы) на две части — $F=F_2+H_2$, где

$$\operatorname{supp}F_2\subset\{r\geqslant\frac{1}{2}\};\quad \operatorname{supp}H_2\subset\{r\leqslant 1\}.$$

Согласно лемме 2.2 F_2 обладает тривиальной квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$, и, следовательно, $H_2\in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$.

Поскольку $\mathcal{S}_{J_\emptyset}\subset J$, то $H_2(r)\in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_{J_\emptyset})$ и в силу теоремы о сходимости в конечном порядке $H_2(r)\in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_{+\ell})$ для некоторого ℓ. Следовательно, $r^\ell H_2(r)\in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_+)$, где $\rho_\ell(k)=k^{-\ell}\rho(k)$. Согласно лемме 1.2 существует число N такое, что первообразная порядка N от нее непрерывная функция и выполнено соотношение

$$\gamma_1(r)=\left(r^\ell H_2(r)\right)^{(-N)}\sim Ar^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r}),\quad r\to+0. \tag{2.28}$$

В силу теоремы о сходимости в конечном порядке существует целое число Q такое, что $r^\ell H_2(r) \in AO^{-1}_{\rho_\ell}(\mathcal{S}^Q_+)$. Теперь, замечая, что для любого числа $\mathcal{L}$ существует число M такое, что функция

$$r^{-\ell}\big(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<M} C_\lambda r^\lambda\big)\chi(r) \in \mathcal{S}^{\mathcal{L}}_+, \quad \forall\varphi(r)\in\mathcal{S}_J$$

(здесь $\chi(r)\in C^\infty([0,+\infty))$ равна 1 при $r\leqslant 1$ и нулю при $r>2$), имеем при достаточно большом M

$$(H_2(r),\varphi(r)) = (H_2(r),\chi(r)(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda r^\lambda)) + \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda (H_2(r), r^\lambda) =$$

$$= (r^\ell H_2(r), r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda r^\lambda)\chi(r)) + \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda M_\lambda[H_2] =$$

$$= \left((r^\ell H_2(r))^{(-N)}, \left(\frac{d}{dr}\right)^N [r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda r^\lambda)\chi(r)]\right) + \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda M_\lambda[H_2] =$$

$$= (\int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty)\gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda r^\lambda)\chi(r)\right] dr + \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} M_\lambda[H_2](\triangle_\lambda(r),\varphi(r)). \tag{2.29}$$

Полагая для второго из интегралов в (2.29)

$$\int\limits_1^\infty \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}\varphi(r)\chi(r)]dr \equiv (F_3(r),\varphi(r)), \tag{2.30}$$

видим, что $\operatorname{supp} F_3$ отделен от нуля. А для оставшейся части этого интеграла имеем

$$\sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda \int\limits_1^\infty \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{\lambda-\ell}\chi(r)]dr = \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} B^1_\lambda(\triangle_\lambda(r),\varphi(r)) \tag{2.31}$$

с некоторыми постоянными B^1_λ.

Для первого из интегралов (2.29), учитывая, что $\chi(r)=1$, при $r\leqslant 1$, имеем

$$\int\limits_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} C_\lambda r^\lambda]dr = \int\limits_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda]dr +$$

$$+ \sum_{\lambda\in J,\ \beta-1<\lambda\leqslant M} C_\lambda \int\limits_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell}dr. \tag{2.32}$$

Последний интеграл в (2.32) сходится в силу (2.28). Из (2.29) с учетом (2.30)–(2.32) имеем

$$(H_2(r),\varphi(r)) = \int\limits_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda]dr +$$

$$+ \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} B_\lambda(\triangle_\lambda(r),\varphi(r)) + (F_3(r),\varphi(r)) \tag{2.33}$$

с некоторыми постоянными $B_\lambda = B^1_\lambda + M_\lambda[H_2]$. Так как $H_2\in AO^{-1}_\rho(\mathcal{S}_J)$, а интеграл в (2.33) согласно лемме 2.3 определяет обобщенную функцию, имеющую квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$ и F_3 обладает тривиальной квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$, то

$$\frac{1}{\rho(k)}\sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} B_\lambda(\Delta_\lambda(\frac{r}{k}),\varphi(r)) = \sum_{\lambda\in J,\ \lambda\leqslant M} B_\lambda\frac{k^{\lambda+1}}{\rho(k)}(\Delta_\lambda(r),\varphi(r)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \text{const}. \tag{2.34}$$

Это возможно, только если $B_\lambda = 0$ для $\lambda > \beta - 1$. Следовательно, в соотношении (2.33) суммирование ведется только по $\lambda \in J, \lambda < \beta - 1$.

Таким образом мы показали, что

$$(F(r),\varphi(r)) = \int_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda]dr +$$

$$+\sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} B_\lambda(\Delta_\lambda(r),\varphi(r)) + (F_4(r),\varphi(r)), \tag{2.35}$$

где $\gamma_1(r)$ удовлетворяет условиям (2.9), а $F_4 = F_3 + F_2$ и $\operatorname{supp} F_4$ отделен от нуля.

Подберем теперь непрерывную функцию $\gamma_2(r) = 0$ при $r \leqslant \frac{1}{2}$ и $r \geqslant 1$ такую, чтобы

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \gamma_2(r)(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell}dr = -B_\lambda, \quad \forall\lambda \in J, \lambda < \beta - 1. \tag{2.36}$$

Это всегда возможно, например, если $\ell > \beta - 1$. Из (2.33) имеем

$$(H_2(r),\varphi(r)) = \int_0^1 (\gamma_1(r)+\gamma_2(r))(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda)]dr + (F_3(r),\varphi(r)) -$$

$$-(F_5(r),\varphi(r)),\ \text{где}\ (F_5(r),\varphi(r)) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \gamma_2(r)(\frac{d}{dr})^N r^{-\ell}\varphi(r)dr. \tag{2.37}$$

Отметим, что $\operatorname{supp} F_5$ отделен от нуля. Полагая

$$\gamma(r) = \gamma_1(r) + \gamma_2(r), \quad F_0 = F_5 + F_4$$

и замечая, что $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (2.9), а $\operatorname{supp} F_0$ отделен от нуля, завершаем доказательство леммы.

Утверждение 2.1. *Пусть J и J_1 — допустимые множества вещественных чисел, причем $J \subset J_1$, и $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β. Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ и $F(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$. Тогда:*

1. Если $\beta - 1 \notin J_1$, то существует число B такое, что

$$\frac{1}{\rho(k)}F(\frac{r}{k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Br_J^{-\beta} \quad \text{на } \mathcal{S}_J. \tag{2.38}$$

При этом $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ до $\widehat{F}(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_{J_1})$, так что

$$\frac{1}{\rho(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Br_{J_1}^{-\beta} \quad \text{на } \mathcal{S}_{J_1}. \tag{2.39}$$

Любое другое такое продолжение отличается от $\widehat{F}(r)$ на

$$\sum_{\lambda\in J_1\setminus J,\lambda<\beta-1} a_\lambda\Delta_\lambda(r) \quad \text{с некоторыми постоянными } a_\lambda. \tag{2.40}$$

2. Если $\beta-1\notin J$ и $\beta-1\in J_1$, то $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ до $\widehat{F}(r)\in AO^{-1}_{\widehat{\rho}}(\mathcal{S}_{J_1})$. При этом выполнено соотношение (2.38) с некоторым числом B, и имеет место соотношение

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\pm B\triangle_{\beta-1}(r)\quad \text{на } \mathcal{S}_{J_1}, \tag{2.41}$$

где знак "+" берется при а знак "−", если $\int\limits_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\beta+1}}<\infty$.

3. Если $\beta-1\in J$, то $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ до $\widehat{F}(r)\in AO^{-1}_{\rho}(S_{J_1})$. При этом имеет место соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}B\triangle_{\beta-1}(r)\quad \text{на } \mathcal{S}_{J_1} \tag{2.42}$$

с некоторым числом B.

Доказательство. Рассмотрим случай 1. По лемме 2.4 $F(r)$ представляется в виде $F=F_0+F_1$, где носитель F_0 отделен от нуля, а F_1 удовлетворяет условиям (2.9), (2.10). Поэтому по лемме 2.3 имеет место соотношение (2.38) с некоторым числом B. Заметим, что F_0 продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ и будет иметь там тривиальную квазиасимптотику относительно $\rho(k)$. Теперь зададим $\widehat{F}_1$ формулой

$$(\widehat{F}_1(r),\psi(r))=\int\limits_0^1\gamma(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^N\left(r^{-\ell}(\psi(r)-\sum_{\lambda\in J_1,\ \lambda<\beta-1}C_\lambda r^\lambda)\right)dr,\quad \psi\in\mathcal{S}_{J_1},$$

где $\gamma(r),\ell,N$ берутся из представления (2.9),(2.10) для $F(r)$. По лемме 2.3 $\widehat{F}_1\in AO^{-1}_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$. Таким образом, $\widehat{F}=\widehat{F}_1+\widehat{F}_0$ дает нужное продолжение. Поскольку F и $\widehat{F}$ совпадают на $\mathcal{S}_J$, то будут совпадать и их квазиасимптотики. Отсюда следует (2.39).

Теперь, поскольку все такие продолжения совпадают на основных функциях из $\mathcal{S}_J$, то все они отличаются только в нуле. Поэтому, если $\widehat{G}$ — другое такое продолжение, то

$$\widehat{G}(r)-\widehat{F}(r)=\sum_{\lambda\in J_1\setminus J}a_\lambda\triangle_\lambda(r),\qquad \text{с некоторыми } a_\lambda.$$

Так как оба продолжения из $AO^{-1}_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$, то

$$\frac{1}{\rho(k)}\left(\widehat{G}(\frac{r}{k})-\widehat{F}(\frac{r}{k})\right)=\frac{1}{\rho(k)}\sum_{\lambda\in J_1\setminus J}a_\lambda\triangle_\lambda(\frac{r}{k})=$$

$$=\sum_{\lambda\in J_1\setminus J}a_\lambda\frac{k^{\lambda+1}}{\rho(k)}\triangle_\lambda(r)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}g(r)\qquad \text{в } \mathcal{S}'_{J_1}.$$

А это возможно при $a_\lambda\neq0$, только если $\beta-\lambda-1>0$. Отсюда и следует (2.40).

Рассмотрим случай 2. Доказательство непосредственно следует из леммы 2.3 и леммы 2.4 (случай 2 и 3), если заметить, что $F_0\in\mathcal{S}'_J$, носитель которой отделен от нуля, продолжается до обобщенной функции из $\mathcal{S}'_{J_1}$ с носителем также отделенным от нуля.

Рассмотрим случай 3. Пусть $J^0=J\setminus\{-\beta-1\}$ и $J_1^0=J_1\setminus\{-\beta-1\}$. Построим $\widehat{\widehat{F}}(r)\in AO^{-1}_\rho(\mathcal{S}_{J_1^0})$ как продолжение $F(r)$ с $\mathcal{S}_{J^0}$ на $\mathcal{S}_{J_1^0}$ в соответствии со случаем 2. Для того чтобы построить искомое продолжение $\widehat{\widehat{F}}$ на $\mathcal{S}_{J_1}$, достаточно определить его на одной функции вида $\eta(r)r^{\beta-1}$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (2.4). Положим

$$(\widehat{F}(r),r^{\beta-1}\eta(r))=(F(r),r^{\beta-1}\eta(r)).$$

Поскольку $\eta(r)r^{\beta-1}\in\mathcal{S}_J$, то $\widehat{F}(r)\in AO^{-1}_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$.

Докажем теперь соотношение (2.42). Так как

$$\frac{1}{\rho(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} G(r), \quad \text{на} \quad \mathcal{S}_{J_1},$$

то по лемме 2.4 $G(r) = Ar_{J^0}^{-\beta}$ на $\mathcal{S}_{J^0}$ с некоторым числом A (см. (2.11)). Тогда по уже доказанному (случай 2)

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pm A\Delta_{\beta-1}(r), \quad \text{на } \mathcal{S}_J$$

(см. (2.41)). С другой стороны, на $\mathcal{S}_J$

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k}) = \frac{\rho(k)}{\widehat{\rho}(k)}\frac{1}{\rho(k)}F(\frac{r}{k})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(см. (1.6)). Это возможно только, если $A = 0$, то есть $G(r) = 0$ на $\mathcal{S}_{J^0}$, а следовательно, и на $\mathcal{S}_{J_1^0}$ (случай 1). Теперь для любой $\varphi \in \mathcal{S}_{J_1}$ имеем

$$(G(r), \varphi(r)) = (G(r), \varphi(r) - C_{\beta-1}r^{\beta-1}\eta(r)) + (G(r), C_{\beta-1}r^{\beta-1}\eta(r)) =$$

$$= C_{\beta-1}(G(r), r^{\beta-1}\eta(r)) = C_{\beta-1}B = B(\Delta_{\beta-1}(r), \varphi(r)).$$

Что и доказывает соотношение (2.42). Утверждение доказано.

Теорема 2.1. *Пусть J — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\beta, \beta - 1 \notin J$ и число ℓ таково, что $\beta - 1 - \ell \notin \mathbb{Z}_+$. Тогда для того чтобы $F(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа A, N (N — целое) и непрерывная при $r > 0$ функция $\gamma(r)$,*

$$\gamma(r) \sim Ar^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0 \tag{2.43}$$

такие, что для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{S}_J$

$$(F(r), \varphi(r)) = \int_0^1 \gamma(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda)\right] dr + (F_0(r), \psi(r)), \tag{2.44}$$

где $\operatorname{supp} F_0(r)$ *отделен от нуля.*

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из лемм 2.2 и 2.3. Докажем необходимость. Пусть $F(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$. Представим F с помощью соответствующего разбиения еденицы в виде

$$(F(r), \varphi(r)) = (F_2(r), \varphi(r)) + (H_2(r), \varphi(r)), \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}_J,$$

где $\operatorname{supp} F_2$ отделен от нуля, а $\operatorname{supp} H_2 \subset \{r \leqslant 1\}$ и $H_2 \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$ (мы учли, что F_2 имеет тривиальную квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$).

Положим $J_1 = \{J - \ell\} \cup \mathbb{Z}_+$. Поскольку $\beta - 1 \notin J$, то $\beta - 1 - \ell \notin J - \ell$, а т.к. $\beta - 1 - \ell \notin \mathbb{Z}_+$, то $\beta - 1 - \ell \notin J_1$. Замечая, что $r^\ell H_2(r) \in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_{J-\ell})$, где $\rho_\ell(k) = k^{-\ell}\rho(k)$, согласно утверждению 2.1 (случай 1) существует продолжение $r^\ell H_2(r)$ до $\widehat{r^\ell H_2(r)} \in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_{J_1})$. А так как $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}_{J_1}$, то $\widehat{r^\ell H_2(r)} \in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_+)$. Поэтому существует целое число N (см. лемму 1.2) такое что первообразная $(\widehat{r^\ell H_2(r)})^{(-N)} = \gamma_1(r)$ — непрерывная при $r > 0$ функция, удовлетворяющая условию (2.43). Положим

$$J_c = \{\lambda \in J : \lambda \leqslant \beta - 1, \lambda - \ell \in \mathbb{Z}_+\} \quad \text{и } J_M^* = \{\lambda \in J : \lambda < M\} \backslash J_c,$$

где M — некоторое вещественное число. Замечая, что для любого числа $\mathcal{L}$ существует число M такое, что функция

$$r^{-\ell}\big(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda r^\lambda\big)\chi(r)\in\mathcal{S}_+^{\mathcal{L}},\quad \forall\varphi(r)\in\mathcal{S}_J$$

(здесь $\chi(r)\in C^\infty([0,+\infty))$ равна 1 при $r\leqslant 1$ и нулю при $r>2$), для любой $\varphi\in\mathcal{S}_J$ и достаточно большого M имеем

$$(H_2(r),\varphi(r))=(H_2(r),\chi(r)(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda r^\lambda))+\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda(H_2(r),r^\lambda)=$$

$$=(r^\ell H_2(r),r^{-\ell}(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda r^\lambda)\chi(r))+\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda M_\lambda[H_2]=$$

$$=\left((\widehat{r^\ell H_2(r)})^{(-N)},\left(\frac{d}{dr}\right)^N[r^{-\ell}(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda r^\lambda)\chi(r)]\right)+\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda M_\lambda[H_2]=$$

$$=(\int_0^1+\int_1^\infty)\gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N\left[r^{-\ell}(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J_M^*}C_\lambda r^\lambda)\chi(r)\right]dr+\sum_{\lambda\in J_M^*}M_\lambda[H_2](\triangle_\lambda(r),\varphi(r)).$$

Действуя точно также, как и при доказательстве леммы 2.4 (см. (2.30)–(2.34), где во всех суммах следует заменить J на J_M^*), аналогично (2.35) получим

$$(F(r),\varphi(r))=\int_0^1\gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J_M^*,\ \lambda\leqslant\beta-1}C_\lambda r^\lambda]dr+$$

$$+\sum_{\lambda\in J_M^*,\ \lambda\leqslant\beta-1}B_\lambda(\triangle_\lambda(r),\varphi(r))+(F_4(r),\varphi(r)),\tag{2.45}$$

где $\gamma_1(r)$ удовлетворяет условиям (2.43), а $\operatorname{supp}F_4$ отделен от нуля. Отметим, что слагаемые с $\lambda=\beta-1\notin J_M^*$, ибо $\beta-1\notin J$. Обозначая $J_c^*=\{\lambda\in J_c:(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell}\equiv 0\}$, из (2.45) имеем

$$(F,\varphi)=\int_0^1\gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1}C_\lambda r^\lambda]dr+(F_4,\varphi)+$$

$$+\sum_{\lambda\in J_M^*,\ \lambda\leqslant\beta-1}B_\lambda C_\lambda+\sum_{\lambda\in J_c\setminus J_c^*,\ \lambda<\beta-1}B_\lambda^3C_\lambda,\quad \text{где } B_\lambda^3=\int_0^1\gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell}dr.\tag{2.46}$$

Заметим, что хотя в сумме под интегралом в (2.46) имеются слагаемые с $\lambda\in J_c^*$, но фактически из $r^{-\ell}\varphi(r)$ мы вычитаем слагаемые, которые после взятия производных обращаются в ноль. Поэтому в суммы вне интеграла эти слагаемые вклада не дают и, следовательно, можно подобрать непрерывную функцию $\gamma_2(r)=0$ при $r\leqslant\frac12$ и $r\geqslant 1$ такую, чтобы

$$\int_{\frac12}^1\gamma_2(r)(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell}dr=\begin{cases}-B_\lambda, & \forall\lambda\in J_M^*,\lambda\leqslant\beta-1,\\ -B_\lambda^3, & \forall\lambda\in J_c\setminus J_c^*,\lambda\leqslant\beta-1.\end{cases}$$

Из (2.46) имеем

$$(F(r),\varphi(r))=\int_0^1(\gamma_1(r)+\gamma_2(r))(\frac{d}{dr})^N[r^{-\ell}(\varphi(r)-\sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1}C_\lambda r^\lambda)]dr+(F_4(r),\varphi(r))-$$

$$-(F_5(r), \varphi(r)), \text{ где } (F_5(r), \varphi(r)) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \gamma_2(r)(\frac{d}{dr})^N r^{-\ell} \varphi(r) dr.$$

Отметим, что $\operatorname{supp} F_5$ отделен от нуля. Полагая

$$\gamma(r) = \gamma_1(r) + \gamma_2(r), \quad F_0 = F_5 + F_4$$

и замечая, что $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (2.43), а $\operatorname{supp} F_0$ отделен от нуля, завершаем доказательство. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть J — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\beta, \beta - 1 \in J$ и число ℓ таково, что $\beta - 1 - \ell \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для того чтобы $F(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа A, N (N — целое и $N > \beta - 1 - \ell$), и непрерывная при $r > 0$ функция $\gamma(r)$,*

$$\gamma(r) \sim A r^{N+\ell} \rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0 \tag{2.47}$$

такие, что для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{S}_J$

$$(F(r), \varphi(r)) = \int\limits_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda \in J,\ \lambda < \beta - 1} C_\lambda r^\lambda) \right] dr + (F_0(r), \psi(r)), \tag{2.48}$$

где $\operatorname{supp} F_0(r)$ отделен от нуля.

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из лемм 2.2 и замечания к лемме 2.3. Докажем необходимость. Пусть $F(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$. Представим F с помощью соответствующего разбиения еденицы в виде

$$(F(r), \varphi(r)) = (F_2(r), \varphi(r)) + (H_2(r), \varphi(r)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_J,$$

где $\operatorname{supp} F_2$ отделен от нуля, а $\operatorname{supp} H_2 \subset \{r \leqslant 1\}$ и $H_2 \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}_J)$ (мы учли, что F_2 имеет тривиальную квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$).

Положим $J_1 = \{J - \ell\} \cup \mathbb{Z}_+$. Поскольку $\beta - 1 \in J$, то $\beta - 1 - \ell \in J - \ell$, а так как $\beta - 1 - \ell \in \mathbb{Z}_+$, то $\beta - 1 - \ell \in J_1$. Замечая, что $r^\ell H_2(r) \in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_{J-\ell})$, где $\rho_\ell(k) = k^{-\ell}\rho(k)$, согласно утверждению 2.1 (случай 3) существует продолжение $r^\ell H_2(r)$ до $\widehat{r^\ell H_2(r)} \in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_{J_1})$. А так как $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}_{J_1}$, то $\widehat{r^\ell H_2(r)} \in AO_{\rho_\ell}^{-1}(\mathcal{S}_+)$. Поэтому существует целое число N (см. лемму 1.2) такое, что первообразная $(\widehat{r^\ell H_2(r)})^{(-N)} = \gamma_1(r)$ — непрерывная при $r \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию (2.53). Увеличим, если нужно, N так, чтобы $N > \beta - 1 - \ell$. Положим

$$J_c = \{\lambda \in J : \lambda \leqslant \beta - 1, \lambda - \ell \in \mathbb{Z}_+\} \quad \text{и } J_M^* = \{\lambda \in J : \lambda < M\} \backslash J_c,$$

где M — некоторое вещественное число. Отметим, что $\lambda = \beta - 1 \notin J_M^*$, ибо $\beta - 1 \in J_c$. Замечая, что для любого числа $\mathcal{L}$ существует число M такое, что функция

$$r^{-\ell}\big(\varphi(r) - \sum_{\lambda \in J_M^*} C_\lambda r^\lambda\big)\chi(r) \in \mathcal{S}_+^{\mathcal{L}}, \quad \forall \varphi(r) \in \mathcal{S}_J$$

(здесь $\chi(r) \in C^\infty([0, +\infty))$ равна 1 при $r \leqslant 1$ и нулю при $r > 2$), для любой $\varphi \in \mathcal{S}_J$ и достаточно большого M имеем

$$(H_2(r), \varphi(r)) = (H_2(r), \chi(r)(\varphi(r) - \sum_{\lambda \in J_M^*} C_\lambda r^\lambda)) + \sum_{\lambda \in J_M^*} C_\lambda (H_2(r), r^\lambda) =$$

$$= (r^\ell H_2(r), r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda \in J_M^*} C_\lambda r^\lambda)\chi(r)) + \sum_{\lambda \in J_M^*} C_\lambda M_\lambda[H_2] =$$

$$= \left((r^{\ell}\widehat{H_2(r)})^{(-N)}, \left(\frac{d}{dr}\right)^N [r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J_M^*} C_\lambda r^\lambda)\chi(r)] \right) + \sum_{\lambda\in J_M^*} C_\lambda M_\lambda[H_2] =$$

$$= (\int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty)\gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J_M^*} C_\lambda r^\lambda)\chi(r) \right] dr + \sum_{\lambda\in J_M^*} M_\lambda[H_2](\triangle_\lambda(r), \varphi(r)).$$

Действуя точно также, как и при доказательстве леммы 2.4 (см. (2.30)–(2.34), где во всех суммах следует заменить J на J_M^*), аналогично (2.35) получим

$$(F(r), \varphi(r)) = \int\limits_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N [r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J_M^*,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda]dr +$$

$$+ \sum_{\lambda\in J_M^*,\ \lambda<\beta-1} B_\lambda(\triangle_\lambda(r), \varphi(r)) + (F_4(r), \varphi(r)), \tag{2.49}$$

где $\gamma_1(r)$ удовлетворяет условиям (2.47), а $\operatorname{supp} F_4$ отделен от нуля. Учитывая, что $(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell} = 0$ при $\lambda \leqslant \beta - 1, \lambda \in J_c$, из (2.49) имеем

$$(F(r), \varphi(r)) = \int\limits_0^1 \gamma_1(r)(\frac{d}{dr})^N [r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda]dr +$$

$$+ \sum_{\lambda\in J\setminus J_c,\ \lambda<\beta-1} B_\lambda(\triangle_\lambda(r), \varphi(r)) + (F_4(r), \varphi(r)). \tag{2.50}$$

Подберем теперь непрерывную функцию $\gamma_2(r) = 0$ при $r \leqslant \frac{1}{2}$ и $r \geqslant 1$ такую, чтобы

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \gamma_2(r)(\frac{d}{dr})^N r^{\lambda-\ell}dr = -B_\lambda, \quad \forall \lambda \in J\setminus J_c, \lambda < \beta - 1.$$

Из (2.50) имеем

$$(F(r), \varphi(r)) = \int\limits_0^1 (\gamma_1(r) + \gamma_2(r))(\frac{d}{dr})^N [r^{-\ell}(\varphi(r) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda r^\lambda)]dr + (F_4(r), \varphi(r)) -$$

$$-(F_5(r), \varphi(r)),\ \text{где } (F_5(r), \varphi(r)) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \gamma_2(r)(\frac{d}{dr})^N r^{-\ell}\varphi(r)dr.$$

Отметим, что $\operatorname{supp} F_5$ отделен от нуля. Полагая

$$\gamma(r) = \gamma_1(r) + \gamma_2(r), \quad F_0 = F_5 + F_4$$

и замечая, что $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (2.47), а $\operatorname{supp} F_0$ отделен от нуля, завершаем доказательство. Теорема доказана.

3. Пространства W_J и V_J

Пусть $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ — любое ядерное пространство Фреше. Далее будем полагать, что $\mathcal{F}$ — замыкание ограниченной регулярной области в $\mathbb{R}^{n-1}$ (иногда $\mathcal{F}$ — гладкая бесконечно дифференцируемая $n-1$-мерная компактная поверхность без края, например, еденичная сфера), а пространство $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ — пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathcal{F}$ функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Систему (полу)норм в $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ обозначим через

$$Q_N\{\varphi\} = \max_{0\leqslant|j|\leqslant N}\sup_{e\in\mathcal{F}}|\varphi^{(j)}(e)|, \quad N=0,1,\ldots,$$

а ${\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}^N$ пополнение $C^\infty(\mathcal{F})$ по норме Q_N. Через ${\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ обозначаем пространство двойственное к $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

Положим $W_J = \mathcal{S}_J\widetilde{\otimes}\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ (проективное тензорное произведение пространств $\mathcal{S}_J$ и $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ (см. [8])). В силу ядерности $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ пространство W_J может быть реализовано как пространство функций $\psi(r,e), r\in\mathbb{R}_+, e\in\mathcal{F}$, бесконечно дифференцируемых на $\mathcal{F}$ и по r на $\mathbb{R}_+ = \{r>0\}$, имеющих асимптотическое разложение

$$\psi(r,e)\sim\sum_{\lambda\in J}C_\lambda(e)r^\lambda, \quad r\to+0, \quad C_\lambda(e)\in C^\infty(\mathcal{F}),$$

то есть

$$\Big(\frac{d}{dr}\Big)^\ell\Big[\psi(r,e)-\sum_{\lambda\leqslant N,\ \lambda\in J}C_\lambda(e)r^\lambda\Big]\Bigg|_{r\to+0} = 0, \quad 0\leqslant\ell\leqslant N, \quad N=0,1,\ldots. \tag{3.1}$$

Топология на W_J задается с помощью системы (полу)норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0\leqslant\ell\leqslant N}\sup_{r>0}Q_N\left\{(1+r)^N\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell\Big[\psi(r,e)-\sum_{\lambda\leqslant N,\ \lambda\in J}C_\lambda(e)r^\lambda\eta(r)\Big]\right\}+$$

$$+\max_{\lambda\leqslant N,\lambda\in J}Q_N\{C_\lambda(e)\}, \tag{3.2}$$

где функция $\eta(r)$ удовлетворяет условию (2.4) (заметим, что топология на W_J не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами.) Таким образом,

$$W_J\subset\cdots\subset W_J^{N+1}\subset W_J^N\subset\cdots\subset W_J^0, \tag{3.3}$$

где W_J^N — банахово пространство с нормой $\mathcal{P}_N(\psi)$ (пополнение W_J по норме $\mathcal{P}_N$).

Для каждого $\lambda\in J$ и любой $\Phi(e)\in{\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ в соответствии с (2.6) определим обобщенную функцию $\triangle_\lambda(r)\otimes\Phi(e)$ формулой

$$(\triangle_\lambda(r)\otimes\Phi(e),\psi(r,e)) = (\Phi(e),C_\lambda(e)), \quad \forall\psi\in W_J,$$

где $C_\lambda(e)\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ определяется формулой (3.1). Из соотношения

$$(\triangle_\lambda(kr)\otimes\Phi(e),\psi(r,e)) = \frac{1}{k}(\triangle_\lambda(r)\otimes\Phi(e),\psi(\frac{r}{k},e)) = \frac{1}{k}(\Phi(e),\frac{1}{k^\lambda}C_\lambda(e)) \tag{3.4}$$

следует, что $\triangle_\lambda(r)\otimes\Phi(e)$ — однородная по r функция степени $-(\lambda+1)$.

В соответствии с (2.7) для любой $\Phi(e) \in {\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ определим обобщенную функцию $r^{\beta} \otimes \Phi(e)$ формулой

$$(r^{\beta} \otimes \Phi(e), \psi(r,e)) = \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} r^{\beta}\Big(\Phi(e), \psi(r,e) - \sum\limits_{\lambda \in J,\ \lambda < -\beta-1} C_{\lambda}(e) r^{\lambda}\Big)_e dr, \text{ при } -\beta-1 \notin J, \\ \int\limits_0^{\infty} r^{\beta}\Big(\Phi(e), \psi(r,e) - \sum\limits_{\lambda \in J,\ \lambda < -\beta-1} C_{\lambda}(e) r^{\lambda} - \\ -C_{-\beta-1}(e) r^{-\beta-1}\Theta(1-r)\Big)_e dr, \text{ при } -\beta-1 \in J \end{cases} \tag{3.5}$$

для любой $\psi(r,e) \in W_J$. Заметим, что при $-\beta-1 \notin J$ она однородна по r степени β.

Пусть $F(r,e) \in W_J'$. В соответствии с (2.5), если для некоторого $\lambda \in J$ выполнено соотношение

$$(F(r,e), r^{\lambda}\eta(\frac{r}{k})) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M_{\lambda}[F](e) \quad \text{на } \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \tag{3.6}$$

не зависящее от $\eta(r) \in C^{\infty}([0,+\infty))$ с комактным носителем и равной единице в окрестности нуля, то $M_{\lambda}[F](e) \in {\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ называется *моментом по r порядка λ* обобщенной функции $F(r,e)$.

Определение 3.1. Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β. В соответствии с определением 1.1 $F(r,e) \in W_J'$ асимптотически однородна по r в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$, если для любой $\psi(r,e) \in W_J$

$$\frac{1}{\rho(k)}(F(\frac{r}{k},e), \psi(r,e)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (G(r,e), \psi(r,e))$$
$$\left(\frac{1}{\rho(k)}(F(kr,e), \psi(r,e)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (G(r,e), \psi(r,e))\right). \tag{3.7}$$

При этом пишем $F(r,e) \in AO_{\rho}^{-1}(W_J)$ (сответственно $F(r,e) \in AO_{\rho}(W_J)$). Заметим, что $G(r,e)$ — обязательно однородная функция по r степени β.

Все результаты, полученные в § 2 для пространства $\mathcal{S}_J$, практически дословно переносятся на пространство W_J.

Пример. Пусть обобщенная функция $F(r,e) \in W_J'$, тогда ее всегда можно представить в виде $F(r,e) = F_1(r,e) + F_0(r,e)$, где носитель F_0 отделен от нуля, а F_1 имеет компактный носитель и сколь угодно много моментов равных нулю, скажем

$$M_{\lambda_i}[F_1](e) \equiv 0, \quad \lambda_i \in J, \quad i = 1, \dots M.$$

При этом, если обобщенная функция $F(r,e)$ ортогональна к некоторой $\varphi_0(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, то есть $(F(r,e), \varphi_0(e)) \equiv 0$, то такими же будут и F_1 и F_0, то есть

$$(F_1(r,e), \varphi_0(e)) \equiv 0, \quad (F_0(r,e), \varphi_0(e)) \equiv 0.$$

Доказательство см. в [1]. В частности, для пространства W_J справедлив аналог леммы 2.3, где $\psi = \psi(r,e) \in W_J, C_{\lambda} = C_{\lambda}(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, а утверждение 2.1 принимает следующий вид

Утверждение 3.1. *Пусть J и J_1 допустимые множества вещественных чисел, причем $J \subset J_1$, и $\rho(k)$ автомодельная функция порядка β. Пусть $F(r,e) \in W_J'$ и $F(r,e) \in AO_{\rho}^{-1}(W_J)$. Тогда:*

1. Если $\beta - 1 \notin J_1$, то существует обобщенная функция $\Phi(e) \in {\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ такая, что

$$\frac{1}{\rho(k)}F(\frac{r}{k},e) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} r_J^{-\beta} \otimes \Phi(e) \quad \text{на } W_J. \tag{3.8}$$

При этом $F(r,e)$ продолжается на W_{J_1} до $\widehat{F}(r,e) \in AO_{\rho}^{-1}(W_{J_1})$, так что

$$\frac{1}{\rho(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k},e) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} r_{J_1}^{-\beta} \otimes \Phi(e) \quad \text{на } W_{J_1}. \tag{3.9}$$

Любое другое такое продолжение отличается от $\widehat{F}(r,e)$ на

$$\sum_{\lambda\in J_1\setminus J,\ \lambda>\beta-1} \Delta_\lambda(r)\otimes\Phi_\lambda(e) \tag{3.10}$$

с некоторыми $\Phi_\lambda(e)\in{\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$.
2. Если $\beta-1\notin J$ и $\beta-1\in J_1$, то обобщенная функция $F(r,e)$ продолжается на W_{J_1} до $\widehat{F}(r,e)\in AO^{-1}_{\widehat{\rho}}(W_{J_1})$. При этом имеет место соотношение

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k},e)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\pm\Delta_{\beta-1}(r)\otimes\Phi(e)\quad \text{на } W_{J_1}, \tag{3.11}$$

где $\Phi(e)\in{\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$ берется из соотношения (3.8), и если

$$\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\beta+1}}d\varkappa \begin{cases} =\infty, & \text{то берется знак } +,\\ <\infty, & \text{то берется знак } -.\end{cases} \tag{3.12}$$

3. Если $\beta-1\in J$, то $F(r,e)$ продолжается на W_{J_1} до $\widehat{F}(r,e)\in AO^{-1}_{\rho}(W_{J_1})$. При этом имеет место соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)}\widehat{F}(\frac{r}{k},e)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\Delta_{\beta-1}(r)\otimes\Phi(e)\quad \text{на } W_{J_1}, \tag{3.13}$$

с некоторой $\Phi(e)\in{\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$.

Замечание. Пусть выполнены условия утверждения 3.1, $\beta-1\notin J_1$, и для некоторого подпространства $\mathcal{E}\subset\mathcal{S}_\mathcal{F}$ выполнено условие ортогональности, то есть

$$(F(r,e),\varphi(e))\equiv 0 \text{ в } \mathcal{S}'_J\quad \forall\varphi(e)\in\mathcal{E}.$$

Тогда существует продолжение $F(r,e)$ до $\widehat{F}(r,e)\in AO^{-1}_\rho(W_{J_1})$, для которого также выполнено условие ортогональности, то есть для любой $\varphi(e)\in\mathcal{E}$

$$(\widehat{F}(r,e),\varphi(e))\equiv 0 \quad \text{в } \mathcal{S}'_{J_1}. \tag{3.14}$$

Пусть $\gamma(r,e)$ — непрерывная по r функция со значениями в ${\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$, то есть для любой функции $\varphi(e)\in\mathcal{S}_\mathcal{F}$ функция $(\gamma(r,e),\varphi(e))_e$ непрерывна по r. Будем писать

$$\gamma(r,e)\sim\rho(r)\Phi(e),\quad r\to+\infty,\quad \text{на } \mathcal{S}_\mathcal{F},$$

где $\Phi(e)\in{\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$, а $\rho(r)$ — положительная функция, если

$$\frac{1}{\rho(r)}\gamma(r,e)\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}\Phi(e)\quad \text{в}\quad {\mathcal{S}_\mathcal{F}}'.$$

Теоремы 2.1 и 2.2 для пространства W_J примут следующий вид

Теорема 3.1. *Пусть J — допустимое множество, $F(r,e)\in W'_J$, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β. Пусть еще число ℓ таково, что*

$$\begin{cases} \beta-1-\ell\notin\mathbb{Z}_+, & \text{если } \beta-1\notin J;\\ \beta-1-\ell\in\mathbb{Z}_+, & \text{если } \beta-1\in J.\end{cases} \tag{3.15}$$

Тогда для того чтобы $F(r,e)\in AO^{-1}_\rho(W_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало N ($N>\beta-1-\ell$ в случае $\beta-1\in J$), непрерывная по r при $r>0$ функция $\gamma(r,e)$ со значениями в ${\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$ и обобщенная функция $\Phi(e)\in{\mathcal{S}_\mathcal{F}}'$, так что

$$\gamma(r,e)\sim r^{\ell+N}\rho(\frac{1}{r})\Phi(e),\quad r\to+0,\quad \text{на } \mathcal{S}_\mathcal{F} \tag{3.16}$$

такие, что для любой основной функции $\psi(r,e) \in W_J$

$$(F(r,e),\psi(r,e)) = \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\psi(r,e) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<-\beta-1} C_\lambda(e)r^\lambda)\right]\right)_e dr +$$
$$+(F_0(r,e),\psi(r,e)), \tag{3.17}$$

где $F_0(r,e) \in W_J'$ и ее носитель отделен от нуля.

Замечание. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторое подпространство $\mathcal{S}_\mathcal{F}$. Если в условиях теоремы 3.1 полагать, что $(F(r,e),\varphi(e))_e \equiv 0$ для $\varphi(e) \in \mathcal{E}$, то можно считать, что $(\gamma(r,e),\varphi(e))_e \equiv 0$.

Сопоставим каждому $\lambda \in J$ замкнутое подпространство $\mathcal{E}_\lambda \subset \mathcal{S}_\mathcal{F}$. Через $\mathcal{E}_\lambda^N$ обозначаем пополнение $\mathcal{E}_\lambda$ по норме Q_N. Положим

$$V_J = \{\psi(r,e) \in W_J : \quad C_\lambda(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \lambda \in J\}. \tag{3.18}$$

Топология в V_J наследуется топологией в W_J.

Далее для описания обобщенных функций из $AO_\rho^{-1}(V_J)$ нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $F(r,e) \in W_J'$, J — допустимое множество и $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, где $\beta - 1 \notin J$. Тогда $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_J)$ в том и только в том случае, если существует $\widehat{F}(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_J)$ такая, что*

$$\widehat{F}(r,e) = F(r,e) \quad \textit{на } V_J. \tag{3.19}$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Пусть теперь $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_J)$, тогда $F \in AO_\rho^{-1}(W_{J_\emptyset})$, и по утверждению 3.1 (случай 1) F продолжается до $\widehat{\widehat{F}} \in AO_\rho^{-1}(W_J)$. При этом они отличаются на обобщенную функцию, сосредоточенную в нуле, то есть для некоторого M

$$F - \widehat{\widehat{F}} = \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} \Phi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(r) + \sum_{\lambda\in J,\ \beta-1<\lambda\leqslant M} \Phi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(r), \tag{3.20}$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}_\mathcal{F}'$. В соотношении (3.20) слева стоит обобщенная функция из $AO_\rho^{-1}(V_J)$, первая из сумм справа также из $AO_\rho^{-1}(W_J)$ и, следовательно, вторая сумма из $AO_\rho^{-1}(V_J)$. А потому, фиксируя любое $\lambda_0 > \beta - 1$, функции $\varphi(e) \in \mathcal{E}_{\lambda_0}$ и $\eta(r)$, удовлетворяющую условиям (2.4), для $\psi(r,e) = r^{\lambda_0}\eta(r)\varphi(e) \in V_J$ имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}\Big(\sum_{\lambda\in J,\ \beta-1<\lambda\leqslant M} \Phi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(\frac{r}{k}), \psi(r,e)\Big) =$$
$$= \frac{k^{\lambda_0+1}}{\rho(k)}(\mathit{\Phi}_{\lambda_0}(e),\varphi(e)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{const}. \tag{3.21}$$

Это возможно, только если $(\mathit{\Phi}_{\lambda_0}(r),\varphi(e)) = 0$. Теперь нетрудно проверить, что

$$\widehat{F}(r,e) = \widehat{\widehat{F}}(r,e) + \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} \Phi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(r)$$

дает нужное продолжение. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, $\quad \beta - 1 \in J$, и*

$$F(r,e) \in W_J', \quad F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_J).$$

Тогда существует $h(r,e) \in W_J'$ со свойствами:
1. Для любой $\varphi(e) \in \mathcal{E}_{\beta-1}$ справедливо тождество

$$(F(r,e) - h(r,e),\varphi(e))_e \equiv 0. \tag{3.22}$$

2. Существуют число M и $\Phi_\lambda(e) \in {\mathcal{S}_\mathcal{F}}', \lambda \in J, \beta-1<\lambda \leqslant M$ такие, что

$$\widehat{h}(r,e) \equiv h(r,e) - \sum_{\lambda\in J,\ \beta-1<\lambda\leqslant M} \Phi_\lambda(e)\triangle_\lambda(r) \quad \in AO_\rho^{-1}(W_J). \tag{3.23}$$

Доказательство. Так как $F \in AO_\rho^{-1}(V_J)$, то есть

$$\frac{1}{\rho(k)}F(\frac{r}{k},e) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} G(r,e)$$

на V_J, а V_J замкнуто в W_J, то эта сходимость имеет место в некотором V_J^M (пополнение V_J по норме $\mathcal{P}_M$, см. (3.3)). Учитывая конечность порядка $F(r,e)$ на W_J и увеличивая M, если нужно, можно считать также, что $F(r,e) \in (W_J^M)'$. Так как $\mathcal{E}_{\beta-1} \subset \mathcal{S}_\mathcal{F}$ — ядерное пространство, то существуют: число N, ограниченное семейство $\{\varphi_m(e) \in \mathcal{E}_{\beta-1}^M, m=1,2,\dots\}$, ограниченная последовательность функционалов $\{f_m \in \left(\mathcal{E}_{\beta-1}^N\right)'\}$ и семейство чисел $\{\lambda_m\}$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|<\infty$, таких, что

$$\psi(e) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(f_m(e),\psi(e))_e\varphi_m(e), \quad \forall\psi(e)\in\mathcal{E}_{\beta-1}^N. \tag{3.24}$$

По теореме Хана-Банаха семейство функционалов $\{f_m \in \left(\mathcal{E}_{\beta-1}^N\right)'\}$ может быть продолжено до ограниченного семейства функционалов на ${\mathcal{S}_\mathcal{F}}^N$, в частности, до ограниченного семейства на $\mathcal{S}_\mathcal{F}$.

Теперь для любой функции $\psi(r,e) \in W_J$ положим

$$(h(r,e),\psi(r,e)) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\left(F(r,e),\varphi_m(e)(f_m(e),\psi(r,e))_e\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\Big(\big(F(r,e),\varphi_m(e)\big)_e, \big(f_m(e),\psi(r,e)\big)_e\Big)_r. \tag{3.25}$$

Отметим, что $h(r,e)$ корректно определена на всем W_J. Проверим, что

$$(F(r,e)-h(r,e),\varphi(e))_e \equiv 0, \quad \forall\varphi\in\mathcal{E}_{\beta-1}. \tag{3.26}$$

Действительно, для $\varphi(e)\in\mathcal{E}_{\beta-1}$ и $\psi(r)\in\mathcal{S}_J$ имеем

$$(h(r,e),\varphi(e)\psi(r)) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\Big(\big(F(r,e),\varphi_m(e)\big)_e, \big(f_m(e),\psi(r)\varphi(e)\big)\Big)_r =$$

$$= \left(F(r,e), \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(f_m(e),\varphi(e))\varphi_m(e)\cdot\psi(r)\right) = (F(r,e),\varphi(e)\psi(r)).$$

Кроме того $h(r,e)\in AO_\rho^{-1}(W_{J_\emptyset})$, ибо

$$\frac{1}{\rho(k)}(h(\frac{r}{k},e),\psi(r,e)) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\frac{1}{\rho(k)}\left(F(\frac{r}{k},e),\varphi_m(e)(f_m(e),\psi(r,e))_e\right),$$

а семейство $\{\varphi_m(e)(f_m(e),\psi(r,e))_e\}$ есть ограниченное семейство в V_J^M, если $\psi(r,e)\in W_{J_\emptyset}$.

Заметим еще, что $h(r,e)$ обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$ на функциях вида $r^{\beta-1}\eta(r)\varphi(e)$, где $\eta(r)\in\mathcal{S}_+$, с компактным носителем и равна 1 в окрестности нуля, а $\varphi(e)\in\mathcal{S}_\mathcal{F}$. Действительно, это следует из соотношения

$$\frac{1}{\rho(k)}(h(\frac{r}{k},e),r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)) =$$

$$r = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(\frac{1}{\rho(k)} \big(F(\frac{r}{k}, e), \varphi_m(e)\big)_e, r^{\beta-1}\eta(r)(f_m(e), \varphi(e))_e \right)_r =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f_m(e), \varphi(e)) \frac{1}{\rho(k)} \left(F(\frac{r}{k}, e), r^{\beta-1}\eta(r)\varphi_m(e) \right), \tag{3.27}$$

если заметить, что последовательность $\{(f_m(e), \varphi(e))\}$ ограничена, а $\{r^{\beta-1}\eta(r)\varphi_m(e)\}$ — ограниченное семейство в V_J^M.

Докажем теперь соотношение (3.23). Положим $J_1 = J\backslash\{\beta-1\}$. Так как обобщенная функция $h(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{J_\emptyset})$, то по утверждению 3.1 (случай 1) она продолжается до обобщенной функции $G(r,e) \in W'_{J_1}$, причем $G \in AO_\rho^{-1}(W_{J_1})$. Поскольку h и G совпадают на $W_{J_\emptyset}$, то они отличаются на обобщенную функцию, сосредоточенную в нуле, то есть

$$G(r,e) - h(r,e) = \sum_{\lambda \in J,\ \beta-1<\lambda\leqslant M} \Phi_\lambda(e)\Delta_\lambda(r) \tag{3.28}$$

с некоторыми $\Phi_\lambda \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}{}'$ (слагаемые с $\lambda < \beta - 1$ не влияют на квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$ порядка β, и мы отнесли их к G). Продолжим G на W_J, обозначив это продолжение через $\widehat{h}(r,e)$. Для этого достаточно определить его на функциях вида $r^{\beta-1}\eta(r)\varphi(e)$, где $\eta(r)$ удовлетворяет (2.4), а $\varphi(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Положим

$$(\widehat{h}(r,e), r^{\beta-1}\eta(r)\varphi(e)) = (h(r,e), r^{\beta-1}\eta(r)\varphi(e)). \tag{3.29}$$

Таким образом, $\widehat{h} \in W_J$. Кроме того $\widehat{h}(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_J)$, ибо $\widehat{h}(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{J_1})$ и обладает квазиасимптотикой в нуле на функциях вида $r^{\beta-1}\eta(r)\varphi(e)$, где $\varphi(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, ибо h обладает ей. Лемма доказана.

Следующие две теоремы дают описание обобщенных функций из $AO_\rho^{-1}(V_J)$.

Теорема 3.2. *Пусть J — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\beta, \beta - 1 \notin J, F(r,e) \in W'_J$ и ℓ — некоторое число такое, что $\beta - 1 - \ell \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали: число N, функция $\gamma(r,e)$, непрерывная (по r) при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}{}'$, так что*

$$\gamma(r,e) \sim r^{\ell+N}\rho(\frac{1}{r})\Phi(e), \quad r \to +0, \quad \text{на} \quad \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \tag{3.30}$$

с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}{}'$ такие, что

$$(F(r,e), \psi(r,e)) = \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \big[r^{-\ell}(\psi(r,e) - \sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1} C_\lambda(e) r^\lambda)\big] \right)_e dr +$$

$$+(F_0(r,e), \psi(r,e)), \quad \forall \psi(r,e) \in V_J, \tag{3.31}$$

где $F_0(r,e) \in W'_J$ и $\operatorname{supp} F_0$ отделен от нуля.

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы 3.1 и леммы 3.1.

Замечание. Если $(F(r,e), \varphi(e)) \equiv 0$ для всех $\varphi(e)$ из некоторого подпространства $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, то можно считать, что $(\gamma(r,e), \varphi(e)) \equiv 0$ и $(F_0(r,e), \varphi(e)) \equiv 0$ для $\varphi(e)$ из того же подпространства (см. пример и замечание к утверждению 3.1).

Теорема 3.3. *Пусть J — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, $\beta - 1 \in J$, $F(r,e) \in W'_J$ и ℓ — некоторое число такое, что $\beta - 1 - \ell \in \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_J)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(r,e) = F_1(r,e) + F_2(r,e), \quad \text{где } F_1(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_J) \text{ и } F_2(r,e) \in W'_J. \tag{3.32}$$

Причем существуют: число N, функция $\gamma(r,e)$ непрерывная по r при $r>0$ со значениями в ${\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ так, что

$$(\gamma(r,e),\varphi(e))\equiv 0, \qquad \text{для всех } \varphi(e)\in\mathcal{E}_{\beta-1}, \tag{3.33}$$

$$\gamma(r,e)\sim r^{\ell+N}\rho(\frac{1}{r})\Phi(e), r\to+0 \quad \text{на } \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \tag{3.34}$$

с некоторой $\Phi(e)\in{\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}'$ такие, что для любой $\psi(r,e)\in V_J$

$$(F_2(r,e),\psi(r,e))=\int\limits_0^1\left(\gamma(r,e),\left(\frac{d}{dr}\right)^N\left[r^{-\ell}(\psi(r,e)-\sum_{\lambda\in J,\ \lambda<\beta-1}C_\lambda(e)r^\lambda)\right]\right)_e dr. \tag{3.35}$$

Доказательство. Пусть $F(r,e)\in AO_\rho^{-1}(V_J)$. Согласно лемме 3.2 существует $h(r,e)\in W_J'$, удовлетворяющая условиям (3.22) и (3.23). Имеем

$$F(r,e)=F(r,e)-h(r,e)+\Delta(r,e)+\widehat{h}(r,e), \text{ где } \Delta=\sum_{\lambda\in J,\ \beta-1<\lambda\leqslant M}\Phi_\lambda(e)\otimes\Delta_\lambda(r). \tag{3.36}$$

Так как $\widehat{h}\in AO_\rho^{-1}(W_J)$, то $F-h+\Delta\in AO_\rho^{-1}(V_J)$. Учитывая, что носитель Δ сосредоточен в нуле, получаем, что

$$G(r,e)\equiv F(r,e)-h(r,e)\in AO_\rho^{-1}(W_{J_\emptyset}),$$

при этом согласно (3.22) $(G(r,e),\varphi(e))_e\equiv 0$, для любой $\varphi(e)\in\mathcal{E}_{\beta-1}$. Положим $J_1=J\backslash\{-\beta-1\}$. По утверждению 3.1 (случай 1) обобщенная функция $G(r,e)$ продолжается на W_{J_1} до обобщенной функции $\widetilde{G}(r,e)\in AO_\rho^{-1}(W_{J_1})$, причем $(\widetilde{G}(r,e),\varphi(e))_e\equiv 0$ для любой $\varphi\in\mathcal{E}_{\beta-1}$, (см. замечание к утверждению 3.1).

По теореме 3.2 для $\widetilde{G}(r,e)$ справедливо представление

$$(\widetilde{G}(r,e),\psi(r,e))=\int\limits_0^1\left(\gamma(r,e),\left(\frac{d}{dr}\right)^N\left[r^{-\ell}(\psi(r,e)-\sum_{\lambda\in J_1,\ \lambda<-\beta-1}C_\lambda(e)r^\lambda)\right]\right)_e dr+$$

$$+(\widetilde{G}_0(r,e),\psi(r,e)), \quad \psi\in W_{J_1}, \tag{3.37}$$

где $N,\ell,\gamma(r,e)$ определяются теоремой 3.2, а $\operatorname{supp}\widetilde{G}_0(r,e)$ отделен от нуля и $(\widetilde{G}_0(r,e),\varphi(e))_e\equiv 0$ для любой $\varphi\in\mathcal{E}_{\beta-1}$. При этом согласно замечанию к теореме 3.2 выполнено условие (3.33).

Заметим, что интеграл в (3.37) корректно определен для любой $\psi\in W_J$ и определяет обобщенную функцию из W_J', которая к тому же в силу (3.33) принадлежит $AO_\rho^{-1}(V_J)$. Обозначим эту обобщенную функцию через $\widetilde{F}_2(r,e)$.

Теперь заметим, что $\widetilde{F}_2+\widetilde{G}_0$ и $F-h+\Delta$ совпадают на $W_{J_\emptyset}$ и принадлежат $AO_\rho^{-1}(V_J)$. Поэтому они отличаются на обобщенную функцию $\Delta_1(r,e)$, сосредоточенную в нуле, причем $\Delta_1(r,e)\in AO_\rho^{-1}(V_J)$. Другими словами, существуют: число M, обобщенные функции $\Psi_\lambda(e)\in\mathcal{S}(S^{n-1})$, $\lambda\in J,\lambda\leqslant M$ такие, что

$$F-h+\Delta=\widetilde{F}_2+\widetilde{G}_0+\Delta_1, \quad \text{где } \Delta_1(r,e)=\sum_{\lambda\in J,\ \lambda<M}\Psi_\lambda(e)\otimes\Delta_\lambda(r). \tag{3.38}$$

Те слагаемые в сумме для $\Delta_1(r,e)$, которые обладают квазиасимптотикой в нуле (может даже тривиальной) относительно $\rho(k)$ на всем W_J, объединим в сумму, которую обозначим через Δ_2. Для каждого из остальных слагаемых, так как $\Delta_1\in AO_\rho^{-1}(V_J)$, справедливо соотношение

$$\Psi_\lambda(e)\otimes\Delta_\lambda(r)\equiv 0 \quad \text{на } V_J.$$

Сумму этих слагаемых обозначим через $\Delta_3(r,e)$.

Теперь положим

$$F_2(r,e)=\widetilde{F}_2(r,e)+\triangle_3(r,e);\quad F_1(r,e)=\widehat{h}(r,e)+\widetilde{G}_0(r,e)+\triangle_2(r,e).$$

Нетрудно проверить, что F_1 и F_2 обладают нужными свойствами.

Обратное утверждение тривиально. Теорема доказана.

4. Представление асимптотически однородных обобщенных функций по специальным группам преобразований

В этом параграфе мы описываем асимптотически однородные в нуле функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ по группе преобразований, определяемой вектором a (см. § 1).

Пусть задан вектор $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n_+$ (то есть $a_i>0, i=1,\dots,n$), будем полагать, что $\mathcal{F}$ — замыкание ограниченной регулярной области в $\mathbb{R}^{n-1}$, обладающей тем свойством, что для каждой точки $t^0=(t^0_1,\dots,t^0_n)\in\mathcal{F}$, кривая $\{r^{a_1}t^0_1,\dots,r^{a_n}t^0_n : r>0\}$ пересекает $\mathcal{F}$ только в точке t^0 (иногда, $\mathcal{F}$ — гладкая $n-1$-мерная поверхность без края гомеоморфная еденичной сфере, обладающая этим свойством). Совокупность таких кривых образует каноид в $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}}=\{t\in\mathbb{R}^n : t_1=r^{a_1}e_1,\dots,t_n=r^{a_n}e_n;\quad r\geqslant 0, e=(e_1,\dots,e_n)\in\mathcal{F}\},\tag{4.1}$$

причем будем полагать, что $\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}}$ — регулярная замкнутая область в $\mathbb{R}^n$ (см. [5], отметим, что если $\mathcal{F}$ гомеоморфна еденичной сфере, то $\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}}=\mathbb{R}^n$).

Через $\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ обозначаем пространство бесконечно дифференциируемых вплоть до границы каноида функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой обратной степени $|t|$. Пространство $\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ есть проективный предел банаховых пространств $\mathcal{S}^N(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ — пополнения пространства $C^\infty(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ по норме

$$P_N[\varphi]=\max_{|j|\leqslant N}\sup_{t\in\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}}}(1+|t|)^N|\varphi^{(j)}(t)|.$$

Напомним, что если J — допустимое множество, то пространство W_J состоит из функций $\psi(r,e), r\in\mathbb{R}_+, e\in\mathcal{F}$, бесконечно дифференциируемых по e на $\mathcal{F}$ и по r на $\mathbb{R}_+$, имеющих асимптотическое разложение (3.1) и с топологией, задаваемой системой (полу)норм (3.2).

Фиксируем $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n_+$. Далее через J_a и I_a обозначаем допустимые множества:

$$J_a=\{\lambda=m_1a_1+\dots+m_na_n;\quad m=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^n_+\};$$

$$I_a=\{\lambda=m_1a_1+\dots+m_na_n;\quad m=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n\}.\tag{4.2}$$

Имея множества $J=J_a$ и $\mathcal{F}$, строим пространство W_{J_a}. Фиксируем число $\lambda\in J_a$. Через $\mathcal{E}^a_\lambda$ обозначаем линейную оболочку функций $E_j(e)=e_1^{j_1}\cdot\dots\cdot e_n^{j_n}\in\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, у которых мультииндекс j удовлетворяет уравнению $(j,a)=\lambda$, то есть

$$\mathcal{E}^a_\lambda=\mathrm{Lin}\{E_j(e),(j,a)=\lambda,\quad j\in\mathbb{Z}^n_+\}.\tag{4.3}$$

Отметим, что функции $E_j(e)\in\mathcal{E}^a_\lambda$ линейно независимы и образуют базис в $\mathcal{E}^a_\lambda$ (см. [1]). Рассмотрим в пространстве W_{J_a} подпространство

$$V_{J_a}=\{\psi(r,e)\in W_{J_a} :\quad C_\lambda(e)\in\mathcal{E}^a_\lambda,\lambda\in J_a\}.\tag{4.4}$$

Топология в V_{J_a} наследуется топологией в W_{J_a}.

Пусть $\varphi(t)\in\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$. Сделаем замену переменных

$$\mu(r,e)=t :\quad t_i=r^{a_i}e_i,\quad i=1,\dots,n,\quad e=(e_1,\dots,e_n)\in\mathcal{F}.\tag{4.5}$$

Рассмотрим отображение

$$\tau_a : \varphi(t)=\varphi(t_1,\dots,t_n)\mapsto\varphi(\mu(r,e))\equiv\psi(r,e)=\varphi(r^{a_1}e_1,\dots,r^{a_n}e_n).\tag{4.6}$$

Отметим, что τ_α — непрерывное отображение $\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ в W_{J_a}, где J_a определяется формулой (4.2). Ядро этого отображения тривиально. Более того, легко заметить, что τ_α отображает $\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ в V_{J_a}. Действительно,

$$\psi(r,e) \sim \sum_{\lambda_i \in J} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} E_j(e) r^{\lambda_i} = \sum_{\lambda_i} C_{\lambda_i}(e) r^{\lambda_i}, \quad r \sim 0, \tag{4.7}$$

где

$$C_{\lambda_i}(e) = \sum_{(j,a)=\lambda_i} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} E_j(e) \in \mathcal{E}^a_{\lambda_i}. \tag{4.8}$$

Нетрудно усмотреть, что V_{J_a} — замкнутое подпространство пространства W_{J_a}.

Утверждение 4.1. Отображение τ_α, определяемое формулой (4.6). осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ и V_{J_a}.

Доказательство см. в [1].

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$, тогда обобщенная функция $f_s(r,e)$, определяемая формулой

$$\big(f_s(r,e), \psi(r,e)\big) = \big(f(t), \varphi(t)\big), \text{ где } \varphi(t) = \varphi(\mu(r,e)) = \psi(r,e) \in V_{J_a}, \tag{4.9}$$

принадлежит $(V_{J_a})'$. Так как V_{J_a} — замкнутое подпространство W_{J_a}, то по теореме Хана-Банаха мы можем продолжить f_s на все W_{J_a}. Обозначим это продолжение $F(r,e)$ и назовем его *обобщенным каноидным представлением* обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$, так что

$$(F(r,e), \psi(r,e)) = (f_s, \psi(r,e)), \quad \forall \psi(r,e) \in V_{J_a}.$$

Пусть $F(r,e)$ — обобщенное каноидное представление для обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$, тогда

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r,e), \varphi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}}). \tag{4.10}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\left(f(\frac{t_1}{k^{a_1}}, \ldots, \frac{t_n}{k^{a_n}}), \varphi(t) \right) = k^{|a|} (f(t), \varphi(k^{a_1}t_1, \ldots, k^{a_n}t_n)) = \\ &= k^{|a|} \left(F(r,e), \varphi(kr^{a_1}e_1, \ldots, kr^{a_n}e_n) \right) = k^{|a|-1} \left(F(\frac{r}{k}, e), \varphi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n) \right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Обобщенное каноидное представление $F(r,e)$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ определяется неоднозначно. Общий вид обобщенного каноидного представления для любой $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ выглядит так:

$$F(r,e) + \sum_{\lambda_i \leqslant N, \lambda_i \in J_a} \triangle_{\lambda_i}(r) \otimes \Phi_i(e), \tag{4.12}$$

где N — некоторое натуральное число, а $F(r,e)$ — какое-то (конкретное) обобщенное каноидное представление, а обобщенные функции $\Phi_i(e) \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$(\Phi_i(e), E_j(e)) = 0, \quad (a,j) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{4.13}$$

Замечание 1. Если $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ имеет компактный носитель, то ее обобщенное каноидное представление $F(r,e)$ также будет иметь компактный носитель на V_{J_a}, а следовательно, и на всем W_{J_a} (ибо ее продолжение на все W_{J_a} отличается от $F(r,e)$ на обобщенные функции, сосредоточенные в нуле). Обратное утверждение очевидно тоже справедливо.
Замечание 2. Если $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_{\mathcal{F}})$ имеет носитель,отделенный от нуля, то ее обобщенное каноидное представление $F(r,e)$ также будет иметь носитель на V_{J_a}, отделенный от нуля. Это непосредственно видно из соотношений (4.10) и (4.13). Обратное утверждение тоже справедливо.

Из (4.11) следует

Утверждение 4.2. Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α и вектор $a \in \mathbb{R}^n_+$. Для того чтобы $f(t) \in AO^{-a}_\rho(\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}))$, необходимо и достаточно, чтобы ее обобщенное каноидное представление $F(r,e) \in AO^{-1}_{\rho_1}(V_{J_a})$, где $\rho_1(k) = \frac{1}{k^{|a|-1}}\rho(k)$.

Следующие две теоремы дают описание обобщенных функций $f(t) \in AO^{-a}_\rho(\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}))$.

Теорема 4.1. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, причем*

$$\alpha \notin I_a = \{(a,m),\ \text{где } m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n\}, \tag{4.14}$$

и число ℓ такое, что $\alpha - |a| - \ell \notin \mathbb{Z}_+$. Тогда для того чтобы $f(t) \in AO^{-a}_\rho(\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_1(t) + f_0(t), \tag{4.15}$$

где $f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_\mathcal{F})$ имеет носитель, отделенный от нуля, а $f_1(t)$ имеет представление: для достаточно большого N существует функция $\gamma(r,e)$ — непрерывная по r, при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$, так что

$$\gamma(r,e) \sim r^{\ell+N+|a|-1}\rho(\frac{1}{r})\Psi(e), r \to +0 \tag{4.16}$$

для некоторой $\Psi(e) \in \mathcal{S}'_\mathcal{F}$ такая, что

$$(f_1(t), \varphi(t)) = \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r^{a_1}e_1, \dots, r^{a_n}e_n) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{(m,a)<\alpha-|a|,\ m\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{1}{m!} r^{(m,a)}\varphi^{(m)}(0)E_m(e))\right]\right)_e dr, \quad \forall\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}). \tag{4.17}$$

Доказательство. Пусть $f(t) \in AO^{-a}_\rho(\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}))$, тогда согласно утверждению 4.2 ее обобщенное сферическое представление $F(r,e) \in AO^{-1}_{\rho_1}(V_{J_a})$. Порядок автомодельной функции $\rho_1(k) = k^{-|a|+1}\rho(k)$ равен $\beta = \alpha - |a| + 1$, и из (4.14) имеем

$$\beta - 1 = \alpha - |a| \notin \{(m_1-1)a_1 + \dots + (m_n-1)a_n, \quad m_i - 1 \in \mathbb{Z}_+, i = 1, 2, \dots, n\} = J_a. \tag{4.18}$$

По теореме 3.2 (учитывая (4.18)) для $F(r,e)$ и любой $\psi(r,e) \in V_{J_a}$ имеет место представление (3.31), в котором $F_0(r,e)$ имеет носитель, отделенный от нуля, и тривиальную квазиасимптотику в нуле относительно ρ_1. Следовательно, соответствующая ей обобщенная функция $f_0(t)$ будет такой же (см. замечание 2). Для оставшейся части $f_1(t) = f(t) - f_0(t)$ с компактным носителем обобщенное каноидное представление будет таким же (замечание 1) и из (3.31) имеем: для достаточно большого N существует функция $\gamma(r,e)$ — непрерывная по r, при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$ такая, что

$$\gamma(r,e) \sim r^{\ell+N}\rho_1(\frac{1}{r})\Psi(e), r \to +0, \text{ с некоторой } \Psi(e) \in \mathcal{S}'_\mathcal{F} \tag{4.19}$$

(как обобщенная функция из $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$), так что для любой $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F})$

$$(f_1(t), \varphi(t)) = (F_1(r,e), \varphi(r^{a_1}e_1, \dots, r^{a_n}e_n)) =$$

$$= \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r^{a_1}e_1, \dots, r^{a_n}e_n) - \sum_{\lambda<\beta-1,\ \lambda\in J_a} C_\lambda(e)r^\lambda)\right]\right)_e dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r^{a_1}e_1, \dots, r^{a_n}e_n) - \right.\right.$$

$$-\sum_{\lambda\in J_a,\ \lambda<\alpha-|a|} r^{\lambda} \sum_{(m,a)=\lambda} \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)E_m(e))\Big]\Big)_e dr.$$

Отсюда с учетом (4.19) и равенства

$$\sum_{\lambda<\beta-1,\ \lambda\in J_a} C_\lambda(e)r^\lambda = \sum_{\lambda\in J_a,\ \lambda<\alpha-|a|} r^\lambda \sum_{(m,a)=\lambda} \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)E_m(e) =$$

$$= \sum_{(m,a)<\alpha-|a|,\ m\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{1}{m!} r^{(m,a)}\varphi^{(m)}(0)E_m(e), \tag{4.20}$$

получаем (4.16) и представление (4.17).

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, вектор $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n_+$, причем*

$$\alpha\in I_a=\{(a,m): m=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n\}, \tag{4.21}$$

и числа μ и ν такие, что

$$-\mu+\alpha-|a|\notin\mathbb{Z}_+,\quad -\nu+\alpha-|a|\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда для того чтобы $f(t)\in AO^{-a}_\rho(\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_0(t),\quad f_i(t)\in\mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}), i=0,1,2, \tag{4.22}$$

где $f_0(t)\in\mathcal{S}'(\mathcal{K}^a_\mathcal{F})$ имеет носитель, отделенный от нуля;

$f_1(t)$ имеет представление: для достаточно большого $N(N>\alpha-|a|-\nu)$ существует функция $\gamma(r,e)$ — непрерывная по r, при $r>0$ со значениями в $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$, так что

$$\gamma(r,e)\sim r^{\nu+N+|a|-1}\rho(\frac{1}{r})\Psi(e), r\to+0, \text{ с некоторой } \Psi(e)\in\mathcal{S}'_\mathcal{F} \tag{4.23}$$

(как обобщенная функция из $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$) такая, что

$$(f_1(t),\varphi(t))=\int_0^1\left(\gamma(r,e),\left(\frac{d}{dr}\right)^N\Big[r^{-\nu}(\varphi(r^{a_1}e_1,\dots,r^{a_n}e_n)-\right.$$

$$\left.-\sum_{(m,a)<\alpha-|a|,\ m\in\mathbb{Z}^n_+}\frac{1}{m!}r^{(m,a)}\varphi^{(m)}(0)E_m(e))\Big]\right)_e dr,\quad \forall\varphi(t)\in\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}); \tag{4.24}$$

$f_2(t)$ имеет представление: для достаточно большого N существует функция $\omega(r,e)$ — непрерывная по r, при $r>0$ со значениями в $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$, так что

$$\omega(r,e)\sim r^{\mu+N+|a|-1}\rho(\frac{1}{r})\Phi(e), r\to+0, \text{ с некоторой } \Phi(e)\in\mathcal{S}'_\mathcal{F} \tag{4.25}$$

(как обобщенная функция из $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$),

$$(\omega(r,e),E_j(e))\equiv 0 \quad \text{для всех } j \text{ таких, что } (j,a)=\alpha-|a| \tag{4.26}$$

такая, что

$$(f_2(t),\varphi(t))=\int_0^1\left(\omega(r,e),\left(\frac{d}{dr}\right)^N\Big[r^{-\mu}(\varphi(r^{a_1}e_1,\dots,r^{a_n}e_n)-\right.$$

$$\left.-\sum_{(m,a)<\alpha-|a|,\ m\in\mathbb{Z}^n_+}\frac{1}{m!}r^{(m,a)}\varphi^{(m)}(0)E_m(e))\Big]\right)_e dr,\quad \forall\varphi(t)\in\mathcal{S}(\mathcal{K}^a_\mathcal{F}). \tag{4.27}$$

Доказательство. Пусть $f(t) \in AO_\rho^{-a}(\mathcal{S}(\mathcal{K}_\mathcal{F}^a))$, тогда согласно утверждению 4.2 ее обобщенное каноидное представление $F(r,e) \in AO_{\rho_1}^{-1}(V_{J_a})$. Порядок автомодельной функции $\rho_1(k) = k^{-|a|+1}\rho(k)$ равен $\beta = \alpha - |a| + 1$, и из (4.21) имеем

$$\beta - 1 = \alpha - |a| \in \{(m_1-1)a_1 + \dots + (m_n-1)a_n, \quad m_i - 1 \in \mathbb{Z}_+, i = 1,2,\dots,n\} = J_a. \tag{4.28}$$

По теореме 3.3 (учитывая (4.28)) для $F(r,e)$ на V_{J_a} имеет место соотношение (3.32) с $F_1 \in AO_{\rho_1}^{-1}(W_{J_a})$ и $F_2 \in AO_{\rho_1}^{-1}(V_{J_a})$ со свойствами (3.33)–(3.34) и представлением (3.35). Для $F_1(r,e)$ по теореме 3.1 получим представление (3.17), в котором справа представлены обобщенная функция F_0 с носителем, отделенным от нуля, и интеграл, в котором функция $\gamma(r,e)$ удовлетворяет свойству (3.16). Теперь из этих представлений и их свойств (как и при доказательстве предыдущей теоремы) для соответствующих обобщенных функций $f_0(t), f_1(t)$ и $f_2(t)$, обобщенными каноидными представлениями которых являются F_0, F_1 и подынтегральная функция из (3.17) соответственно, выводим требуемые представления (4.24) и (4.27) с нужными свойствами.

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что теоремы 4.1 и 4.2 останутся справедливыми, если вместо непрерывности функций $\gamma(r,e)$ и $\omega(r,e)$, как функций со значениями в $\mathcal{S}'_\mathcal{F}$, потребовать лишь их слабую измеримость. Это означает, что для любой $\varphi(e) \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ функции $(\gamma(r,e), \varphi(e))_e$ и $(\omega(r,e), \varphi(e))_e$ измеримы как функции r.

5. Некоторые применения

В качестве применений приведенных выше результатов рассмотрим следующую задачу:

Пусть заданы вектор $a \in \mathbb{R}_+^n$, автомодельная функция $\rho(k)$ порядка α, многочлен $P(t)$, квазиоднородный относительно a степени q, то есть такой, что

$$P(k^{a_1}t_1, \dots, k^{a_n}t_n) = k^q P(t), \tag{5.1}$$

и обобщенная функция $f(x) \in AO_\rho^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. Зададимся вопросом: когда дифференциальное уравнение

$$P(\partial)u(x) = f(x) \tag{5.2}$$

имеет решение $u(x) \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, где $\rho_1(k)$ — подходящая автомодельная функция?

Отметим, что если

$$P(t) = \sum_{i=1}^M A_i t^{m^i}, \qquad t^{m^i} = t_1^{m_1^i} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n^i}; \quad m^i \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{5.3}$$

квазиоднородный многочлен относительно вектора $a \in \mathbb{R}_+^n$ степени q, то

$$(a, m^i) = q, \quad m^i \in \mathbb{Z}_+^n; \quad i = 1, \dots, M. \tag{5.4}$$

Действительно, из (5.1) и (5.3) имеем

$$P(k^{a_1}t_1, \dots, k^{a_n}t_n) = \sum_{i=1}^M A_i k^{(a,m^i)} t^{m^i} = k^q P(t),$$

$$\text{откуда } \sum_{i=1}^M A_i k^{(a,m^i)-q} t^{m^i} = P(t).$$

Справа стоит многочлен, не зависящий от k, следовательно, все коэффициенты многочлена, стоящего слева, не зависят от k.

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — замыкание ограниченной регулярной области в $\mathbb{R}^n, P(e)$ — многочлен и $\{f_k(e) \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}, k > 0\}$ — семейство обобщенных функций, непрерывное по параметру k, причем*

$$f_k(e) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f_0(e) \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}.$$

Тогда существует семейство обобщенных функций $\{g_k(e) \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}, k > 0\}$, измеримое по параметру k, так что

$$(1) \quad g_k(e) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} g_0(e) \ \text{в} \mathcal{S}'_{\mathcal{F}},$$

$$(2) \quad P(e)g_k(e) = f_k(e).$$

Доказательство. Положим $f'_k = f_k - f_0$, так что $f'_k \to 0$ при $k \to \infty$. По теореме о конечном порядке сходимости функционалов существуют числа $A_k, k > 0$ и норма $Q_N\{\}$, так что

$$|(f'_k(e), \varphi(e))| \leqslant A_k Q_N\{\varphi\}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}.$$

Отметим, что в силу непрерывности семейства $\{f_k\}$ по параметру $k > 0$ и ее сходимости к нулю при $k \to \infty$ все A_k ограничены некоторым числом A и $A_k \to 0$ при $k \to \infty$. Определим семейство функционалов $\{\sigma_k(e), k > 0\}$ на подпространстве $P\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ пространства $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, состоящего из функций $\psi(e) = P(e)\varphi(e)$, где $\varphi(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ формулой

$$(\sigma_k(e), \psi(e)) = (f'_k(e), \varphi(e)).$$

По лемме Хёрмандера (см. [10]) существуют числа M и K такие, что

$$|(\sigma_k(e), \psi(e))| = |(f'_k(e), \varphi(e))| \leqslant A_k Q_N\{\varphi\} \leqslant A_k K Q_M\{P(e)\varphi(e)\}.$$

Отсюда следует, что $\{\sigma_k(e), k > 0\}$ — семейство непрерывных функционалов на $P\mathcal{S}^M_{\mathcal{F}}$ — подпространстве банахова пространства $\mathcal{S}^M_{\mathcal{F}}$. Причем это семейство непрерывно по параметру $k > 0$ и сходится к нулю при $k \to \infty$ на этом подпространстве. По теореме П.1 работы [3] это семейство можно продолжить на все банахово пространство $\mathcal{S}^M_{\mathcal{F}}$ как измеримое по параметру $k > 0$ семейство непрерывных функционалов, причем

$$\sigma_k(e) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{на } \mathcal{S}^M_{\mathcal{F}}$$

Полагая теперь

$$(\sigma_0(e), \psi(e)) = (f_0(e), \varphi(e)), \quad \psi(e) = P(e)\varphi(e), \varphi(e) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$$

и рассуждая, как и выше, заключаем, что $\sigma_0(e)$ — непрерывный функционал на $\mathcal{S}^M_{\mathcal{F}}$.

Теперь, как нетрудно проверить, семество функционалов $g_k(e) = \sigma_k(e) + \sigma_0(e)$ удовлетворяет утверждениям (1) и (2). Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, $P(t)$ — квазиоднородный относительно вектора $a \in \mathbb{R}^n_+$ многочлен степени q, и $f(t) \in AO^{-a}_{\rho}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.*

Тогда, если

$$\begin{cases} \alpha + q \notin I_a, & \text{то существует } g(t) \in AO^{-a}_{\rho_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)), \\ \alpha + q \in I_a, n > 1, & \text{то существует } g(t) \in AO^{-a}_{\widehat{\rho}_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)), \end{cases} \tag{5.5}$$

так что

$$P(t)g(t) = f(t), \tag{5.6}$$

где $\rho_1(k) = k^q \rho(k)$ и $I_a = \{(a, m) : \quad m \in \mathbb{N}^n\}$.

Доказательство. Сначала заметим, что если носитель $f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ отделен от нуля, то можно считать, что носитель обобщенной функции $g_0(t)$, полученной в результате деления f на многочлен P, тоже отделен от нуля.

Пусть $\bar{\mathbb{R}}^n_q, q = 1, \ldots, 2^n$ ортанты в $\mathbb{R}^n$, так что $\cup_q \bar{\mathbb{R}}^n_q = \mathbb{R}^n$. Используя теоремы 4.1 и 4.2, нетрудно показать, что $f(t)$ можно представить в виде суммы обобщенных функций $f_q(t) \in AO^{-a}_{\rho}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ таких, что $\operatorname{supp} f_q \subset \bar{\mathbb{R}}^n_q$ (отметим, что при $\alpha + q \in I_a$ это возможно, если $n > 1$. Подробнее см. § 5 работы [1]). Если для каждой f_q мы сможем построить соответствующую обобщенную функцию $g_q(t)$, удовлетворяющую условиям теоремы, то, очевидно, искомой функцией будет функция $g(t) = \sum_q g_q(t)$. Поэтому далее, без ограничения общности, считаем, что $\operatorname{supp} f(t) \subset \bar{\mathbb{R}}^n_+$ и в обобщенном каноидном представлении поверхность $\mathcal{F}$ является гиперплоскостью, скажем $\mathcal{F} = \{e : e_1 + \cdots + e_n = 1\}$.

Рассмотрим случай $\alpha + q \notin I_a$. Заметим, что в этом случае $\alpha \notin I_a$ (ибо иначе, согласно (5.4), $\alpha + q \in I_a$). По теореме 4.1, $f(t) = f_0(t) + f_1(t)$, где $\operatorname{supp} f_0$ отделен от нуля, а для любой $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$$(f_1(t), \varphi(t)) = \int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{\lambda < \alpha - |a|,\ \lambda \in J_a} r^\lambda C_\lambda(e)\right]\right)_e dr. \tag{5.7}$$

Здесь $\gamma(r,e), N$ и ℓ определяются по теореме 4.1. Определим $g(t)$ формулой

$$(g(t), \varphi(t)) = \int\limits_0^1 \left(\sigma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell-q}(\varphi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{\lambda < \alpha - |a| + q,\ \lambda \in J_a} r^\lambda C_\lambda(e)\right]\right)_e dr + (g_0(t), \varphi(t)). \tag{5.8}$$

Здесь $g_0(t) = \frac{f_0(t)}{P(t)}$, причем $\operatorname{supp} g_0$ отделен от нуля, а $\sigma(r,e) = \frac{\gamma(r,e)}{P(e)}$, где $P(e)$ — след $P(t)$ на $\mathcal{F}$, причем $\sigma(r,e)$ измерима по $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'_{\mathcal{F}}$ и

$$\sigma(r,e) \sim r^{\ell+N+|a|-1}\rho(\frac{1}{r})\Phi_1(e), r \to +0, \qquad \text{где } \Phi_1(e) = \frac{\Phi(e)}{P(e)}. \tag{5.9}$$

Здесь мы воспользовались леммой 5.1, учтя, что $P(e)$ — многочлен (как след многочлена на плоскости $\mathcal{F}$).

Проверим, что $g(t)$ обладает нужными свойствами. Полагая $\ell + q = \ell_1$ и $\alpha + q = \alpha_1$, учитывая, что

$$\sigma(r,e) \sim r^{\ell_1+N+|a|-1}\frac{1}{r^q}\rho(\frac{1}{r})\Phi_1(e), r \to +0,$$

(см. (5.9)), из теоремы 4.1 (см. (4.16), (4.17)) выводим, что $g(t) \in AO^{-a}_{\rho_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

Полагая $P(t)\varphi(t) = \psi(t)$, учитывая, что

$$\psi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n) = r^q P(e)\varphi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n) \sim r^q P(e) \sum_{\lambda \in J_a} r^\lambda C^\varphi_\lambda(e);$$

$$C^\psi_\lambda(e) = \begin{cases} P(e)C^\varphi_{\lambda-q}(e), & \lambda - q \in J_a \\ 0, & \lambda - q \notin J_a \end{cases}; (\text{если } \lambda - q \in J_a, \text{ то } \lambda \in J_a + q \subset J_a),$$

$$\sum_{\lambda \in J_a,\ \lambda < \alpha - |a| + q} C^\psi_\lambda(e) r^\lambda = P(e) \sum_{\lambda + q < \alpha - |a| + q,\ \lambda \in J_a,\ \lambda - q \in J_a} r^\lambda C^\varphi_{\lambda-q}(e) =$$
$$= r^q P(e) \sum_{\lambda - q < \alpha - |a|,\ \lambda - q \in J_a} r^{\lambda-q} C^\varphi_{\lambda-q}(e),$$

из (5.8) имеем

$$(P(t)g(t), \varphi(t)) = (g(t), \psi(t)) = (g_0(t), \varphi(t)) +$$
$$+ \int\limits_0^1 \left(\sigma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell-q}\left(r^q P(e)\varphi(r^{a_1}e_1, \ldots, r^{a_n}e_n) - r^q P(e) \sum \lambda - q < \right.\right.\right.$$

$$< \alpha - |a|,\ \lambda - q \in J_a r^{\lambda-q} C^{\varphi}_{\lambda-q}(e)\Big)\Big]\Big)_e dr$$

$$= \int_0^1 \Bigg(\sigma(r,e)P(e), \Big(\frac{d}{dr}\Big)^N \big[r^{-\ell}(\varphi(r^{a_1}e_1,\ldots,r^{a_n}e_n) -$$

$$- \sum_{\lambda<\alpha-|a|,\ \lambda\in J_a} r^{\lambda} C_{\lambda}(e)\big]\Bigg)_e dr + (\frac{f_0(t)}{P(t)}, P(t)\varphi(t)) = (f(t),\varphi(t)). \qquad (5.10)$$

Здесь сделана замена $\lambda - q = \lambda'$ (штрихи опущены).

Рассмотрим теперь случай $\alpha + q \in I_a$ и $\alpha \notin I_a$. По теореме 4.1 $f = f_0 + f_1$, где f_0 имеет носитель, отделенный от нуля, а f_1 представляется в виде (5.7). Определим $g(t)$ формулой

$$(g(t),\varphi(t)) = (g_0(t),\varphi(t)) + \int_0^1 \Bigg(\sigma(r,e), \Big(\frac{d}{dr}\Big)^N \Bigg[r^{-\ell-q}(\varphi(r^{a_1}e_1,\ldots,r^{a_n}e_n) -$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\lambda<\alpha-|a|+q,\ \lambda\in J_a} r^{\lambda}C_{\lambda}(e) \\ \sum\limits_{\lambda\leqslant\alpha-|a|+q,\ \lambda\in J_a} r^{\lambda}C_{\lambda}(e) \end{array} \right. \Bigg]\Bigg)_e dr.$$

Здесь верхняя сумма берется, если $\int_1^{\infty} \frac{\rho_1(\xi)}{\xi^{\alpha+q+1}} d\xi < \infty$, а нижняя, если этот интеграл $= \infty$. Обобщенные функции $\sigma(r,e)$ и $g_0(t)$ такие же, как и в предыдущем случае. Замечая, что $\alpha - |a| + q \in J_a$, по лемме, аналогичной лемме 2.3, для пространства W_{J_a} заключаем, что $g(t) \in AO_{\widehat{\rho}_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

Точно так же, как и в предыдущем случае, доказывается, что $P(t)g(t) = f(t)$. Следует только заметить, что в этом случае в последней сумме в формуле, аналогичной (5.10), слагаемое с $\lambda = \alpha - |a|$ будет отсуствовать, ибо в этом подслучае $\alpha - |a| \notin J_a$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha + q \in I_a$ и $\alpha \in I_a$. По теореме 4.2 $f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t)$, где $f_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_+), i = 0,1,2$. Обобщенная функция f_0 имеет носитель, отделенный от нуля, для f_1 выполнены соотношения (4.23)–(4.24), а для f_2 соотношения (4.25)–(4.27), в которых μ и ν удовлетворяют условиям теоремы 4.2.

Положим теперь $g_0(t) = \frac{f_0(t)}{P(t)}$, причем так, чтобы $\operatorname{supp} g_0$ был отделен от нуля;

$$(g_1(t),\varphi(t)) = \int_0^1 \Bigg(\sigma(r,e), \Big(\frac{d}{dr}\Big)^N \Bigg[r^{-\nu-q}(\varphi(r^{a_1}e_1,\ldots,r^{a_n}e_n) -$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\lambda<\alpha-|a|+q,\ \lambda\in J_a} r^{\lambda}C_{\lambda}(e) \\ \\ \sum\limits_{\lambda\leqslant\alpha-|a|+q,\ \lambda\in J_a} r^{\lambda}C_{\lambda}(e) \end{array} \right. \Bigg]\Bigg)_e dr,$$

где $-\nu + \alpha - |a| \in \mathbb{Z}_+, N > -\nu + \alpha - |a|$ и верхняя и нижняя суммы берутся в соответствии с предыдущим случаем в зависимости от поведения автомодельной функции $\rho(k)$, а $\sigma(r,e) = \frac{\gamma(r,e)}{P(e)}$ и удовлетворяет соотношению

$$\sigma(r,e) \sim r^{\nu+N+|a|-1}\rho(\frac{1}{r})\Psi_1(e), \quad r \to +0, \quad \text{где } \Psi_1(e) = \frac{\Psi(e)}{P(e)};$$

$$(g_2(t),\varphi(t)) = \int_0^1 \Bigg(\tau(r,e), \Big(\frac{d}{dr}\Big)^N \Bigg[r^{-\mu-q}(\varphi(r^{a_1}e_1,\ldots,r^{a_n}e_n) -$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{\lambda<\alpha-|a|+q,\ \lambda\in J_a} r^\lambda C_\lambda(e)\\ \sum\limits_{\lambda\leqslant\alpha-|a|+q,\ \lambda\in J_a} r^\lambda C_\lambda(e)\end{array}\right]\Bigg)_e dr,$$

где $-\mu+\alpha-|a|\notin\mathbb{Z}_+$ и верхняя и нижняя суммы берутся в соответствии с предыдущим случаем в зависимости от поведения автомодельной функции $\rho(k)$, а $\tau(r,e)=\frac{\omega(r,e)}{P(e)}$ и удовлетворяет соотношению

$$\tau(r,e)\sim r^{\mu+N+|a|-1}\rho(\frac{1}{r})\Phi_1(e),\quad r\to+0,\quad \text{где } \Phi_1(e)=\frac{\Phi(e)}{P(e)}.$$

Замечая, что $\alpha-|a|+q\in J_a$, по лемме, аналогичной лемме 2.3, для пространства W_{J_a} (случай 2 и 3) заключаем, что $g_i(t)\in AO_{\widehat{\rho}_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)), i=1,2$.

Точно так же, как и в предыдущем случае доказывается, что $P(t)g_i(t)=f_i(t), i=0,1,2$. Следует только учесть, что в последней сумме в формулах, аналогичных (5.10), слагаемое с $\lambda=\alpha-|a|$ можно не учитывать, ибо

$$\left\{\begin{array}{lll}(\frac{d}{dr})^N r^{-\nu+\alpha-|a|} & =0 & \text{для } g_1,\\ (\omega(r,e),C_{\alpha-|a|}(e)) & \equiv 0 & \text{для } g_2.\end{array}\right.$$

Теперь искомое $g(t)=g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)$. Теорема доказана.

Теперь ответ на поставленный в начале § 5 вопрос дает следующая

Теорема 5.2. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, $P(x)$ — квазиоднородный относительно вектора $a\in\mathbb{R}^n_+$ многочлен степени q, и $g(x)\in AO^a_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.*

Тогда, если

$$\alpha+q+|a|\notin I_a=\{(a,m):\quad m\in\mathbb{N}^n\},$$

то уравнение

$$P(\partial)u(x)=g(x),\quad \partial=(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$$

имеет решение

$$u(x)\in AO^a_{\rho_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

где $\rho_1(k)=k^q\rho(k)$. Если

$$\alpha+q+|a|\in I_a,$$

то уравнение (5.12) обладает решением

$$u(x)\in AO^a_{\widehat{\rho}_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

где $\widehat{\rho}_1(k)$ определяется по формуле (1.3).

Доказательство. Утверждение теоремы, по сути, есть утверждение теоремы 5.1, сформулированное в терминах преобразований Фурье.

Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u(x)=\delta(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Соответствующий оператору Лапласа многочлен квазиоднороден относительно вектора $a=(1,\dots,1), |a|=n$, степени $q=2$. Дельта функция асимптотически однородна по группе преобразований, определяемой этим вектором a, на бесконечности относительно $\rho(k)=k^{-n}$ порядка $\alpha=-n$. В соответствии с вышесказанным, если размерность пространства $n>2$, тогда

$$\alpha+q+|a|=2\notin I_a=\{(a,m):m\in\mathbb{N}^n\}=\{n,n+1,\dots\}$$

и существует фундаментальное решение оператора Лапласа, асимптотически однородное на бесконечности по группе преобразований, определяемой вектором a, относительно

$\rho_1(k) = k^q\rho(k) = k^{2-n}$ (таковым является функция $-\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-2)2\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{|x|^{n-2}}$). При $n = 2$ (критический случай $\alpha + q + |a| = 2 \in I_a$) существует фундаментальное решение оператора Лапласа асимптотически однородное на бесконечности по группе преобразований, определяемой вектором a, относительно $\widehat{\rho}_1(k) = \ln k$ (таковым является функция $\frac{1}{2\pi}\ln|x|$, мы учли, что при $n = 2, \rho_1(k) = 1$ и $\widehat{\rho_1} = \ln k$).

2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad t \in \bar{\mathbb{R}}_+, x \in \mathbb{R}^n,$$

в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, сводится к отысканию соответствующего решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u(t,x) = \delta(t)f(x).$$

Соответствующий оператору теплопроводности многочлен квазиоднороден относительно вектора $a = (2,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, |a| = n+2$, степени $q = 2$. Траектории, определяемые этим вектором, являются пораболами

$$t = cx^2, \quad c = \frac{t_0}{x_0^2}, \quad t_0^2 + x_0^2 = 1.$$

Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, вектор $b = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n_+$ и начальное условие задачи Коши $f(x) \in AO^b_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, тогда
$\delta(t)f(x) \in AO^a_{\rho_1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}))$, где $\rho_1(k) = k^{-2}\rho(k)$ имеет порядок $\alpha = \beta - 2$. Если

$$\beta - 2 + q + n + 2 = \beta + n + 2 \notin I_a = \{n+2, n+3, \dots\},$$

то согласно утверждению теоремы 5.2, решение задачи Коши (5.15) $u(t,x) \in AO^a_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}))$, то есть, другими словами, обладает квазиасимптотикой относительно ρ по параболам.

Отметим, что если $f(x) = \delta(x)$, то (5.16) будет выполнено для любого n и, следовательно, у уравнения теплопроводности существует фундаментальное решение, обладающее квазиасимптотикой по параболам относительно $\rho(k) = k^{-n}$ (таковым является функция $\frac{\Theta(t)}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4t}}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным группам преобразований* // Матем. сборник. 2009. n/ 200 dsgecr 6. С. 23–66.
2. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции* // Доклады РАН. 2008. Т. 421. № 2. С. 1–5.
3. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически однородные обобщенные функции и граничные свойства функций голоморфных в трубчатых конусах* // Известия РАН. Сер. математ. 2006. Т. 70. № 6. С. 45–92.
4. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически однородные обобщенные функции в сферическом представлении и некоторые применения* // Доклады РАН. 2005. Т. 405. № 1. С. 18–21.
5. Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций.* М.: Наука. 1986.
6. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука. 1985.
7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними. Вып.1.* М.: Физматгиз. 1959.
8. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир. 1971.
9. O. Grudzinski *Quasihomogeneous Distributions.* North-Holland–Amsterdam. North-Hollandmathematics studies 165. 1991.

10. L. Hörmander *On the division of distribution by polynomials* // Ark. math. 1958. V. 3. № 6. P. 555–568.

Юрий Николаевич Дрожжинов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Завьялов Борис Иванович,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: bzavial@mi.ras.ru