ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 3 (2018). С. 89-109.

УДК 517.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРИРУЕМОСТЬЮ

М.Н. ПОПЦОВА, И.Т. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Обсуждается метод классификации нелинейных интегрируемых уравнений с тремя независимыми переменными, основанный на понятии интегрируемой редукции. Авторы называют уравнение интегрируемым, если оно допускает широкий класс редукций, представляющих собой интегрируемые по Дарбу системы гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными. Наиболее естественным и удобным объектом для применения такого подхода являются двумеризованные цепочки, обобщающие известную цепочку Тоды. В настоящей работе исследуются квазилинейные двумеризованные цепочки вида $u_{n,xy} = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x}u_{n,y} + \beta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + \gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + \delta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$. Уточнен вид цепочки исходя из предположения, что существуют условия обрыва, сводящие цепочку к интегрируемой по Дарбу гиперболической системе, сколь угодно высокого порядка. При некотором дополнительном предположении о невырожденности мы провели описание цепочек, являющихся интегрируемыми в предложенном выше смысле. В полученном списке цепочек имеются новые примеры.

Ключевые слова: двумеризованная интегрируемая цепочка, x-интеграл, интегрируемая редукция, условие обрыва, открытая цепочка, система, интегрируемая по Дарбу, характеристическая алгебра Ли.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 37K30, 37D99

1. Введение

Интегрируемые уравнения с тремя независимыми переменными имеют широкий спектр приложений в физике. Достаточно вспомнить такие известные нелинейные модели, как уравнение КП, уравнение Дэви-Стюартсона, уравнение цепочки Тоды и др. С точки зрения интегрирования и классификации многомерные уравнения являются наиболее сложными. Различные подходы к изучению интегрируемых многомерных моделей обсуждаются, например, в работах [1]–[9]. Известно, что симметрийный подход [10, 11], зарекомендовавший себя как весьма эффективный метод классификации интегрируемых уравнений в размерности 1+1, не столь эффективен в многомерье [12]. При изучении многомерных уравнений часто используется идея редукции — сведения уравнения к системам уравнений с меньшим числом независимых переменных. Наличие широкого класса интегрируемых редукций с двумя независимыми переменными, как правило, указывает на интегрируемость уравнения с тремя независисмыми переменными. Среди специалистов наибольшей популярностью пользуется метод гидродинамических редукций, когда в качестве признака интегрируемости уравнения берется наличие бесконечного множества интегрируемых

M.N. Poptsova, I.T. Habibullin, Algebraic properties of quasilinear two-dimensional chain related to integrability.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).
Поступила 28 февраля 2018 г.

систем гидродинамического типа, общее решение каждой из которых порождает некоторое решение рассматриваемого уравнения (см., например, [1, 2, 13]). Историю развития метода и соответствующие ссылки можно найти в обзоре [3].

В работах [14, 15] мы используем альтернативный подход и называем заданное уравнение интегрируемым, если оно допускает бесконечный класс редукций в виде интегрируемых по Дарбу систем уравнений в частных производных гиперболического типа с двумя независимыми переменными. При решении классификационных задач для многомерных уравнений в такой постановке можно использовать аппарат характеристических алгебр Ли (подробное изложение можно найти в [17, 18]). Это направление в теории интегрируемости нам представляется перспективным.

Рассмотрим нелинейную цепочку

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}) \tag{1.1}$$

с тремя независимыми переменными, где искомая функция $u = u_n(x, y)$ зависит от вещественных x, y и целого n. Для цепочки (1.1) искомые конечно-полевые редукции получаются естественным образом, достаточно подходящим способом оборвать цепочку в двух целочисленных точках

$$u_{N_1} = \varphi_1(x, y, u_{N_1+1}, ...), \tag{1.2}$$
$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad N_1 < n < N_2, \tag{1.3}$$
$$u_{N_2} = \varphi_2(x, y, u_{N_2-1}, ...). \tag{1.4}$$

Примеры таких граничных условий можно найти ниже (см. (4.29), (4.30)). Следует отметить следующие два очень существенных обстоятельства:

i) для известных интегрируемых цепочек вида (1.1) существуют условия обрыва, сводящие их к интегрируемой по Дарбу системе гиперболических уравнений вида (1.2)–(1.4) сколь угодно большого порядка $N = N_2 - N_1 - 1$;
ii) конкретный вид функций φ_1, φ_2 и f конструктивно определяется из требования интегрируемости системы в смысле Дарбу.

Два этих факта служат мотивацией для следующего определения (см. также работу [14]):

Определение 1. *Цепочку* (1.1) *назовем интегрируемой, если существуют функции φ_1 и φ_2 такие, что для любого выбора пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа* (1.2)–(1.4) *является интегрируемой по Дарбу.*

В настоящей работе мы исследуем квазилинейные цепочки следующего вида

$$u_{n,xy} = \alpha u_{n,x} u_{n,y} + \beta u_{n,x} + \gamma u_{n,y} + \delta, \tag{1.5}$$

предполагая, что функции $\alpha = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $\beta = \beta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $\gamma = \gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $\delta = \delta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ являются аналитическими в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$. Мы также предполагаем, что производные

$$\frac{\partial \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{\partial u_{n+1}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} \tag{1.6}$$

отличны от тождественного нуля.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве следующего утверждения

Теорема 1. *Квазилинейная цепочка* (1.5), (1.6) *интегрируема в смысле Определения 1, если и только если она приводится посредством точечных преобразований к одной из* *следующих форм*

$$
\begin{aligned}
&i) && u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y},\\
&ii) && u_{n,xy} = \alpha_n (u_{n,x} u_{n,y} - u_n (u_{n,x} + u_{n,y}) + u_n^2) + u_{n,x} + u_{n,y} - u_n,\\
&iii) && u_{n,xy} = \alpha_n (u_{n,x} u_{n,y} - s_n (u_{n,x} + u_{n,y}) + s_n^2) + s_n' (u_{n,x} + u_{n,y} - s_n),
\end{aligned}
$$

где

$$
s_n = u_n^2 + C, \quad s_n' = 2u_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n},
$$

C *– произвольная постоянная.*

Отметим, что уравнение i) было найдено ранее в работах [27], [28] Ферапонтова и Шабата и Ямилова, а уравнения ii) и iii), по видимому, являются новыми. Накладывая на уравнения i)-iii) дополнительные условия вида $x = \pm y$ мы получаем 1+1 -мерные интегрируемые цепочки. Можно показать, что точечными заменами они сводятся к уравнениям, найденным ранее Ямиловым (см. [29]).

Следуя Определению 1, мы предполагаем, что в интегрируемом случае существуют условия обрыва, заданные в целых точках $n = N_1$, $n = N_2$ $(N_1 < N_2 - 1)$, которые сводят цепочку (1.5) к конечной системе гиперболических уравнений

$$
\begin{aligned}
&u_{N_1} = \varphi_1,\\
&u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + \beta_n u_{n,x} + \gamma_n u_{n,y} + \delta_n, \quad N_1 < n < N_2,\\
&u_{N_2} = \varphi_2.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

интегрируемой в смысле Дарбу.

Напомним, что система уравнений в частных производных гиперболического типа (1.7) является интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор функционально независимых x- и y-интегралов. Функция I, зависящая от конечного набора динамических переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \ldots$, называется y-интегралом, если она удовлетворяет уравнению $D_y I = 0$, где D_y – оператор полного дифференцирования по переменной y и $\mathbf{u}$ вектор с координатами $u_{N_1+1}, u_{N_1+2}, \ldots, u_{N_2-1}$. Так как система (1.7) является автономной, мы рассматриваем только автономные нетривиальные интегралы. Можно показать, что y-интеграл не зависит от $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_{yy}, \ldots$. Поэтому мы будем рассматривать только $y-$интегралы, зависящие, по крайней мере, от одной динамической переменной $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \ldots$. Отметим, что в настоящее время интенсивно изучаются интегрируемые по Дарбу дискретные и непрерывные модели (см., [14, 17], [19]–[26]).

Приведем еще один аргумент в пользу нашего Определения 1, касающегося свойства интегрируемости двумеризованной цепочки. Задача поиска общего решения системы, интегрируемой по Дарбу, сводится к задаче решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно эти ОДУ решаются явно. С другой стороны, любое решение рассматриваемой гиперболической системы (1.7) легко продолжается вне интервала $[N_1, N_2]$ и генерирует решение соответствующей цепочки (1.5). Следовательно, в этом случае цепочка (1.5) имеет большой набор точных решений.

Поясним кратко структуру работы. В параграфе 2 мы напомним необходимые определения и исследуем основные свойства характеристической алгебры Ли, которая является основным инструментом в теории систем, интегрируемых по Дарбу. В параграфе 3 мы вводим определение тестовых последовательностей, при помощи которых получаем систему дифференциальных уравнений для уточнения функций α, β, γ. Параграф 4 посвящен поиску функции δ. Здесь же приводится окончательная форма искомой цепочки (4.28), интегрируемой в смысле Определения 1 и дается доказательство Теоремы 1.

2. Характеристические алгебры Ли

Так как цепочка (1.5) инвариантна относительно сдвига переменной n, то без потери общности можно положить $N_1 = -1$. Далее мы будем рассматривать систему гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} &u_{-1} = \varphi_1, \\ &u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + \beta_n u_{n,x} + \gamma_n u_{n,y} + \delta_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \\ &u_{N+1} = \varphi_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Напомним, что здесь $\alpha_n = \alpha(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$, $\beta_n = \beta(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$, $\gamma_n = \gamma(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$, $\delta_n = \delta(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$. Предположим, что система (2.1) интегрируема по Дарбу и что $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \ldots)$ ее нетривиальный y-интеграл. Последнее означает, что функция I должна удовлетворять уравнению $D_y I = 0$, где D_y – оператор полного дифференцирования по переменной y. Оператор D_y действует на классе функций вида $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \ldots)$ по правилу $D_y I = YI$, где

$$Y = \sum_{i=0}^{N} \left(u_{i,y} \frac{\partial}{\partial u_i} + f_i \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + f_{i,x} \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots \right). \tag{2.2}$$

Здесь $f_i = \alpha_i u_{i,x} u_{i,y} + \beta_i u_{i,x} + \gamma_i u_{i,y} + \delta_i$ есть ни что иное, как правая часть цепочки (1.5). Следовательно, функция I удовлетворяет уравнению $YI = 0$. Коэффициенты уравнения $YI = 0$ зависят от переменных $u_{i,y}$, в то время как его решение I не зависит от $u_{i,y}$, поэтому функция I на самом деле удовлетворяет системе линейных уравнений:

$$YI = 0, \quad X_j I = 0, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{2.3}$$

где $X_i = \frac{\partial}{\partial u_{i,y}}$. Из (2.3) следует, что коммутатор $Y_i = [X_i, Y] = X_i Y - Y X_i$ операторов Y и X_i, $i = 0, 1, ...N$ также аннулирует I. Воспользуемся явным координатным представлением оператора Y_i:

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial u_i} + X_i(f_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + X_i(D_x f_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots \tag{2.4}$$

В силу специального вида функции f_i оператор Y можно представить в виде:

$$Y = \sum_{i=0}^{N} u_{i,y} Y_i + R, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} R = &\sum_{i=0}^{N} (f_i - u_{i,y} X_i(f_i)) \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + (f_{i,x} - u_{i,y} X_i(D_x f_i)) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots = \\ = &\sum_{i=0}^{N} (\beta_i u_{i,x} + \delta_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + \\ &\quad + \big((\alpha_i u_{i,x} + \gamma_i)(\beta_i u_{i,x} + \delta_i) + D_x(\beta_i u_{i,x} + \delta_i) \big) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Обозначим через $\mathbf{F}$ кольцо локально-аналитических функций от динамических переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \ldots$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{L}(y, N)$ над кольцом $\mathbf{F}$, порожденную дифференциальными операторами $Y, Y_0, Y_1, ..., Y_N$. Ясно, что операции коммутирования векторных полей и умножения векторного поля на функцию удовлетворяют следующим условиям

$$[Z, gW] = Z(g)W + g[Z, W], \tag{2.7}$$

$$(gZ)h = gZ(h), \tag{2.8}$$

где $Z, W \in \mathcal{L}(y, N)$, $g, h \in \mathbf{F}$. Следовательно, пара $(\mathbf{F}, \mathcal{L}(y, N))$ имеет структуру алгебры Ли-Райнхарта[1] (см. [30]). Будем называть эту алгебру характеристической алгеброй Ли системы уравнений (2.1) по направлению y. Хорошо известно (см. [20, 17]), что функция I является y-интегралом системы (2.1) тогда и только тогда, когда она принадлежит ядру любого оператора из $\mathcal{L}(y, N)$. Поскольку y-интеграл зависит лишь от конечного числа динамических переменных, то здесь можно воспользоваться известной теоремой Якоби о существовании нетривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией. Из этой теоремы легко можно вывести, что в Дарбу интегрируемом случае в алгебре $\mathcal{L}(y, N)$ должен существовать конечный базис $Z_1, Z_2, ...Z_k$, состоящий из линейно независимых операторов, такой что любой элемент Z из $\mathcal{L}(y, N)$ представим в виде линейной комбинации $Z = a_1Z_1 + a_2Z_2 + ...a_kZ_k$, где коэффициенты $a_1, a_2, ...a_k$ – аналитические функции от динамических переменных, определенные в некотором открытом множестве. При этом из равенства $a_1Z_1 + a_2Z_2 + ...a_kZ_k = 0$ следует, что $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$. В этом случае мы называем алгебру $\mathcal{L}(y, N)$ конечномерной. Аналогично можно определить характеристическую алгебру $\mathcal{L}(x, N)$ по направлению x. Ясно, что система (2.1) интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда характеристические алгебры по обоим направлениям конечномерны.

Для удобства дальнейших действий введем обозначение $\mathrm{ad}_X(Z) := [X, Z]$. Отметим, что в нашей работе оператор ad_{D_x} играет ключевую роль. Ниже мы будем применять D_x к гладким функциям, зависящим от динамических переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \dots$. Как было показано выше, на этом классе функций операторы D_y и Y совпадают. Тогда из равенства $[D_x, D_y] = 0$ немедленно следует $[D_x, Y] = 0$. Заменяя Y в силу (2.5), и собирая в полученном соотношении коэффициенты при независимых переменных $\{u_{i,y}\}_{i=0}^N$, получаем

$$[D_x, Y_i] = -a_iY_i, \quad \text{где} \quad a_i = \alpha_i u_{i,x} + \gamma_i. \tag{2.9}$$

Ясно, что оператор ad_{D_x} переводит характеристическую алгебру Ли в себя. Опишем ядро этого отображения:

Лемма 1. [16, 18, 17] *Если векторное поле*

$$Z = \sum_i z_{1,i}\frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + z_{2,i}\frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \cdots \tag{2.10}$$

удовлетворяет условию $[D_x, Z] = 0$, то $Z = 0$.

3. Метод тестовых последовательностей

Назовем последовательность операторов $W_0, W_1, W_2, \dots$ в алгебре $\mathcal{L}(y, N)$ тестовой последовательностью, если $\forall\ m$ справедливо равенство:

$$[D_x, W_m] = \sum_{j=0}^{m} w_{j,m}W_j. \tag{3.1}$$

Тестовая последовательность позволяет определять условия интегрируемости для системы гиперболичского типа (2.1) (см. [19, 17, 20]). Действительно, предположим, что (2.1) интегрируема по Дарбу. Тогда среди операторов $W_0, W_1, W_2, \dots$ имеется лишь конечное множество линейно независимых элементов, через которые выражаются все остальные. Т.е. существует целое k, такое, что операторы $W_0, \dots W_k$ линейно независимы и W_{k+1} выражается следующим образом:

$$W_{k+1} = \lambda_kW_k + \cdots + \lambda_0W_0. \tag{3.2}$$

---

[1]Мы благодарим Д.В.Миллионщикова обратившего наше внимание на это обстоятельство

Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям равенства (3.2). В результате получаем соотношение

$$\sum_{j=0}^{k} w_{j,k+1}W_j + w_{k+1,k+1}\sum_{j=0}^{k}\lambda_j W_j = \sum_{j=0}^{k} D_x(\lambda_j)W_j + \\ + \lambda_k \sum_{j=0}^{k} w_{j,k}W_j + \lambda_{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} w_{j,k-1}W_j + \dots + \lambda_0 w_{0,0}W_0. \quad (3.3)$$

Собирая коэффициенты при независимых операторах, получаем систему дифференциальных уравнений на коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_k$. Полученная система будет переопределенной, так как λ_j есть функции от конечного числа динамических переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots$. Условия совместности этой системы задают условия интегрируемости для системы гиперболического типа (2.1). Например, собирая коэффициенты при W_k, мы получаем первое уравнение указанной системы:

$$D_x(\lambda_k) = \lambda_k(w_{k+1,k+1} - w_{k,k}) + w_{k,k+1}, \quad (3.4)$$

которое также является переопределенным.

Ниже в этом разделе мы воспользуемся двумя тестовыми последовательностями для уточнения вида функций α_n, β_n, γ_n.

3.1. Первая тестовая последовательность. Зададим последовательность операторов в характеристической алгебре $\mathcal{L}(y, N)$ следующей рекуррентной формулой:

$$Y_0, \quad Y_1, \quad W_1 = [Y_0, Y_1], \quad W_2 = [Y_0, W_1], \dots W_{k+1} = [Y_0, W_k], \dots \quad (3.5)$$

Выше (см. (2.9)) были выведены коммутационные соотношения для первых двух членов данной последовательности:

$$[D_x, Y_0] = -a_0 Y_0 = -(\alpha_0 u_{0,x} + \gamma_0)Y_0, \quad [D_x, Y_1] = -a_1 Y_1 = -(\alpha_1 u_{1,x} + \gamma_1)Y_1. \quad (3.6)$$

Применяя тождество Якоби и используя последние формулы, выводим:

$$[D_x, W_1] = -(a_0 + a_1)W_1 - Y_0(a_1)Y_1 + Y_1(a_0)Y_0. \quad (3.7)$$

По индукции можно доказать, что (3.5) является тестовой последовательностью. При этом для любого $k \geq 2$ справедливы формулы

$$[D_x, W_k] = p_k W_k + q_k W_{k-1} + \cdots, \quad (3.8)$$

где функции p_k, q_k вычисляются следующим образом

$$p_k = -(a_1 + k a_0), \quad q_k = \frac{k - k^2}{2} Y_0(a_0) - Y_0(a_1)k. \quad (3.9)$$

По предположению в алгебре $\mathcal{L}(y, N)$ существует только конечный набор линейно независимых элементов последовательности (3.5). Следовательно, существует M такое, что:

$$W_M = \lambda W_{M-1} + \cdots, \quad (3.10)$$

операторы $Y_0, Y_1, W_1, \dots, W_{M-1}$ линейно независимы, а многоточием обозначена линейная комбинация операторов $Y_0, Y_1, W_1, \dots, W_{M-2}$.

Лемма 2. *Операторы Y_0, Y_1, W_1 линейно независимы.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть выполняется равенство

$$\lambda_1 W_1 + \mu_1 Y_1 + \mu_0 Y_0 = 0. \quad (3.11)$$

Операторы Y_0, Y_1 имеют вид $Y_0 = \frac{\partial}{\partial u_0} + \cdots$, $Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots$, в то время как W_1 не содержит слагаемые вида $\frac{\partial}{\partial u_0}$ и $\frac{\partial}{\partial u_1}$, следовательно, коэффициенты μ_1, μ_0 равны нулю. Если при этом

$\lambda_1 \neq 0$, тогда $W_1 = 0$. Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям последнего равенства, тогда в силу (3.7) получим уравнение

$$Y_0(a_1)Y_1 - Y_1(a_0)Y_0 = 0,$$

из которого следует: $Y_0(a_1) = \alpha_{1,u_0}u_{1,x} + \gamma_{1,u_0} = 0$ и $Y_1(a_0) = \alpha_{0,u_1}u_{0,x} + \gamma_{0,u_1} = 0$. В силу независимости переменных $u_{0,x}$ и $u_{1,x}$ получаем, что $\alpha_{1,u_0} = \alpha_{0,u_1} = 0$. Но это противоречит предположению (1.6) о том, что $\frac{\partial \alpha(u_{n+1},u_n,u_{n-1})}{\partial u_{n\pm1}} \neq 0$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если имеет место разложение* (3.10), *тогда*

$$\alpha(u_1, u_0, u_{-1}) = \frac{P'(u_0)}{P(u_0) + Q(u_{-1})} + \frac{1}{M-1}\frac{Q'(u_0)}{P(u_1) + Q(u_0)} - c_1(u_0). \tag{3.12}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что уравнение (3.4) для последовательности (3.5) имеет вид:

$$D_x(\lambda) = -a_0\lambda - \frac{M(M-1)}{2}Y_0(a_0) - MY_0(a_1). \tag{3.13}$$

Упростим соотношение (3.13), используя формулы

$$\begin{aligned} Y_0(a_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial u_0} + (\alpha_0 u_{0,x} + \gamma_0)\frac{\partial}{\partial u_{0,x}}\right)(\alpha_0 u_{0,x} + \gamma_0) = \\ &= \left(\alpha_{0,u_0} + \alpha_0^2\right) u_{0x} + \gamma_{0,u_0} + \alpha_0\gamma_0, \qquad (3.14)\\ Y_0(a_1) &= \alpha_{1,u_0}u_{1,x} + \gamma_{1,u_0}. \end{aligned}$$

Простой анализ уравнения (3.13) показывает, что $\lambda = \lambda(u_0, u_1)$. Следовательно, (3.13) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{u_0}u_{0,x} + \lambda_{u_1}u_{1,x} = -\left((\alpha_0\lambda + \frac{M(M-1)}{2}(\alpha_{0,u_0} + \alpha_0^2)\right)u_{0,x} - M\alpha_{1,u_0}u_{1,x} - \\ - \left(\gamma_0\lambda + \frac{M(M-1)}{2}(\gamma_{0,u_0} + \alpha_0\gamma_0) + M\gamma_{1,u_0}\right). \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при независимых переменных $u_{0,x}$, $u_{1,x}$, выводим переопределенную систему дифференциальных уравнений на λ:

$$\lambda_{u_0} = -\alpha_0\lambda - \frac{M(M-1)}{2}(\alpha_{0,u_0} + \alpha_0^2), \quad \lambda_{u_1} = -M\alpha_{1,u_0}, \tag{3.15}$$

$$\gamma_0\lambda + \frac{M(M-1)}{2}(\gamma_{0,u_0} + \alpha_0\gamma_0) + M\gamma_{1,u_0} = 0. \tag{3.16}$$

Заметим, что уравнения (3.15) не содержат функцию γ и полностью совпадают с уравнениями, изученными в нвшей работе [15]. Из Леммы 3.2 упомянутой работы немедленно вытекает справедливость Леммы 3. Уравнение (3.16) мы используем далее для уточнения функции γ. □

3.2. Вторая тестовая последовательность. Построим тестовую последовательность, содержащую операторы Y_0, Y_1, Y_2 и их кратные коммутаторы:

$$\begin{gathered} Z_0 = Y_0,\ Z_1 = Y_1,\ Z_2 = Y_2,\ Z_3 = [Y_1, Y_0],\ Z_4 = [Y_2, Y_1], \\ Z_5 = [Y_2, Z_3],\ Z_6 = [Y_1, Z_3],\ Z_7 = [Y_1, Z_4],\ Z_8 = [Y_1, Z_5]. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Элементы последовательности Z_m при $m > 8$ определяются рекуррентной формулой $Z_m = [Y_1, Z_{m-3}]$. Отметим, что это наиболее простая тестовая последовательность, порожденная итерациями отображения $Z \to [Y_1, Z]$, которая содержит оператор $[Y_2, [Y_1, Y_0]] = Z_5$.

Лемма 4. *Операторы Z_0, $Z_1, \ldots Z_5$ являются линейно независимыми.*

Доказательство. Нетрудно показать, что операторы $Z_0, Z_1, \dots Z_4$ линейно независимы (аналогично доказательству Леммы 1). Докажем лемму 4 от противного. Допустим, что

$$Z_5 = \sum_{j=0}^{4} \lambda_j Z_j. \tag{3.18}$$

Вычислим формулы, по которым действует оператор ad_{D_x} на операторы Z_i. Для $i = 0, 1, 2$ они немедленно получаются из соотношения

$$[D_x, Y_i] = -a_i Y_i.$$

Напомним, что $a_i = \alpha_i u_{i,x} + \gamma_i = \alpha(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) u_{i,x} + \gamma(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$. При $i = 3, 4, 5$ имеем

$$\begin{aligned} [D_x, Z_3] &= -(a_1 + a_0) Z_3 + \cdots, \\ [D_x, Z_4] &= -(a_2 + a_1) Z_4 + \cdots, \\ [D_x, Z_5] &= -(a_0 + a_1 + a_2) Z_5 + Y_0(a_1) Z_4 - Y_2(a_1) Z_3 + \cdots \end{aligned}$$

Применяя оператор ad_{D_x} к обеим частям (3.18), получаем

$$\begin{aligned} &-(a_0 + a_1 + a_2)(\lambda_4 Z_4 + \lambda_3 Z_3 + \cdots) + Y_0(a_1) Z_4 - Y_2(a_1) Z_3 + \cdots = \\ &\qquad = \lambda_{4,x} Z_4 + \lambda_{3,x} Z_3 - \lambda_4(a_1 + a_2) Z_4 - \lambda_3(a_0 + a_1) Z_3 + \cdots \end{aligned} \tag{3.19}$$

Собирая коэффициенты при Z_4 в равенстве (3.19), получаем следующее уравнение:

$$\lambda_{4,x} = -(\alpha_0 u_{0,x} + \gamma_0)\lambda_4 - (\alpha_{1,u_0} u_{1,x} + \gamma_{1,u_0}). \tag{3.20}$$

Простой анализ уравнения (3.20) показывает, что $\lambda = \lambda(u_0, u_1)$. Следовательно, уравнение (3.20) сводится к системе трех уравнений $\gamma_0 \lambda_4 + \gamma_{1,u_0} = 0$, $\lambda_{4,u_0} = -\alpha_0 \lambda_4$ и $\lambda_{4,u_1} = -\alpha_{1,u_0}$. Из этих уравнений следует, что $\lambda_4 = 0$. Иначе, если $\lambda_4 \neq 0$, тогда $\alpha_0 = -(\log \lambda_4)_{u_0}$, откуда следует, что $(\alpha_0)_{u_{-1}} = 0$, и это противоречит требованию о том, что $\alpha(u_1, u_0, u_{-1})$ существенно зависит от u_1 и u_{-1}, следовательно, $\lambda_4 = 0$. Тогда из (3.20) имеем $\alpha_{1,u_0} = 0$, последнее вновь приводит к противоречию. □

Вернемся к последовательности (3.17). Для дальнейшей работы необходимо описать действие оператора ad_{D_x} на все элементы этой последовательности. Удобно разделить последовательность (3.17) на три подпоследовательности $\{Z_{3m}\}$, $\{Z_{3m+1}\}$ и $\{Z_{3m+2}\}$.

Лемма 5. *Действие оператора* ad_{D_x} *на последовательность* (3.17) *задается следующими формулами:*

$$\begin{aligned} [D_x, Z_{3m}] &= -(a_0 + m a_1) Z_{3m} + \left(\frac{m - m^2}{2} Y_1(a_1) - m Y_1(a_0)\right) Z_{3m-3} + \cdots, \\ [D_x, Z_{3m+1}] &= -(a_2 + m a_1) Z_{3m+1} + \left(\frac{m - m^2}{2} Y_1(a_1) - m Y_1(a_2)\right) Z_{3m-2} + \cdots, \\ [D_x, Z_{3m+2}] &= -(a_0 + m a_1 + a_2) Z_{3m+2} + Y_0(a_1) Z_{3m+1} + Y_2(a_1) Z_{3m} - \\ &\quad - (m-1)\left(\frac{m}{2} Y_1(a_1) + Y_1(a_0 + a_2)\right) Z_{3m-1} + \cdots \end{aligned}$$

Лемма (5) легко доказывается по индукции.

Теорема 2. *Допустим, что оператор* Z_{3k+2} *представим в виде линейной комбинации*

$$Z_{3k+2} = \lambda_k Z_{3k+1} + \mu_k Z_{3k} + \nu_k Z_{3k-1} + \cdots \tag{3.21}$$

предыдущих членов последовательности (3.17) *и ни один из операторов* Z_{3j+2} *при* $j < k$ *не является линейной комбинаций операторов* Z_s, $s < 3j + 2$. *Тогда коэффициент* ν_k *удовлетворяет уравнению*

$$D_x(\nu_k) = -a_1 \nu_k - \frac{k(k-1)}{2} Y_1(a_1) - (k-1) Y_1(a_0 + a_2). \tag{3.22}$$

Лемма 6. *Допустим, что выполняются все условия Теоремы 2. Пусть при этом оператор Z_{3k} (оператор Z_{3k+1}) линейно выражается через операторы Z_i, $i < 3k$. Тогда в этом разложении коэффициент при Z_{3k-1} равен нулю.*

Доказательство. Докажем от противного, допустим что в формуле

$$Z_{3k} = \lambda Z_{3k-1} + \cdots \tag{3.23}$$

коэффициент λ отличен от нуля. Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям уравнения (3.23). В результате, согласно Лемме 5, получим:

$$-(a_0 + ka_1)\lambda Z_{3k-1} + \cdots = D_x(\lambda)Z_{3k-1} - \lambda(a_0 + (k-1)a_1 + a_2)Z_{3k-1} + \cdots \tag{3.24}$$

Собирая коэффициенты при Z_{3k-1}, получаем, что коэффициент λ должен удовлетворять уравнению

$$D_x(\lambda) = \lambda(a_2 - a_1).$$

Согласно нашему предположению выше, λ не обращается в ноль и, следовательно,

$$D_x(\log\lambda) = a_2 - a_1. \tag{3.25}$$

Так как λ зависит от конечного набора динамических переменных, то согласно уравнению (3.25) λ может зависеть только от u_1 и u_2. Следовательно, из (3.24) получаем, что

$$(\log\lambda)_{u_1}u_{1,x} + (\log\lambda)_{u_2}u_{2,x} = \alpha_2 u_{2,x} + \gamma_2 - \alpha_1 u_{1,x} - \gamma_1.$$

Переменные $u_{1,x}$, $u_{2,x}$ являются независимыми, так что последнее уравнение равносильно системе уравнений $\alpha_1 = -(\log\lambda)_{u_1}$, $\alpha_2 = (\log\lambda)_{u_2}$, $\gamma_2 - \gamma_1 = 0$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_1(u_1, u_2)$ зависит только от u_1, u_2. Последнее противоречит предположению, что α_1 существенно зависит от u_0. Противоречие показывает, что предположение $\lambda \neq 0$ неверно. Лемма доказана. □

Для того чтобы доказать Теорему 2, мы применяем оператор ad_{D_x} к обеим частям равенства (3.21) и упрощаем при помощи формул из Леммы 5. Собирая коэффициенты при Z_{3k-1}, получаем уравнение (3.22).

Найдем точные значения коэффициентов уравнения (3.22)

$$\begin{aligned}
Y_1(a_0) &= Y_1(\alpha_0 u_{0,x} + \gamma_0) = \alpha_{0,u_1}u_{0,x} + \gamma_{0,u_1},\\
Y_1(a_2) &= Y_1(\alpha_2 u_{2,x} + \gamma_2) = \alpha_{2,u_1}u_{2,x} + \gamma_{2,u_1},\\
Y_1(a_1) &= Y_1(\alpha_1 u_{1,x} + \gamma_1) = (\alpha_{1,u_1} + \alpha_1^2)u_{1,x} + \gamma_{1,u_1} + \gamma_1\alpha_1.
\end{aligned}$$

и подставим их в (3.22):

$$\begin{aligned}
D_x(\nu_k) = -(\alpha_1 u_{1,x} + \gamma_1)\nu_k - \frac{k(k-1)}{2}\left((\alpha_{1,u_1} + \alpha_1^2)u_{1,x} + \gamma_{1,u_1} + \gamma_1\alpha_1\right) -\\
- (k-1)(\alpha_{0,u_1}u_{0,x} + \alpha_{2,u_1}u_{2,x} + \gamma_{0,u_1} + \gamma_{2,u_1}).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Простой анализ уравнения (3.26) показывает, что ν_k может зависеть только от переменных u_0, u_1, u_2. Следовательно,

$$D_x(\nu_k) = \nu_{k,u_0}u_{0,x} + \nu_{k,u_1}u_{1,x} + \nu_{k,u_2}u_{2,x}. \tag{3.27}$$

Подставляя (3.27) в (3.26) и собирая коэффициенты при независимых переменных, получаем систему уравнений на коэффициент ν_k:

$$\nu_{k,u_0} = -(k-1)\alpha_{0,u_1}, \tag{3.28}$$

$$\nu_{k,u_1} = -\alpha_1\nu_k - \frac{k(k-1)}{2}(\alpha_{1,u_1} + \alpha_1^2), \tag{3.29}$$

$$\nu_{k,u_2} = -(k-1)\alpha_{2,u_1}, \tag{3.30}$$

$$0 = \gamma_1\nu_k + \frac{k(k-1)}{2}(\gamma_{1,u_1} + \gamma_1\alpha_1) + (k-1)(\gamma_{0,u_1} + \gamma_{2,u_1}). \tag{3.31}$$

Подставляя выражение для функции α, заданнное формулой (3.12) в уравнение (3.28), получаем

$$\nu_{k,u_0} = \frac{k-1}{M-1}\frac{P'(u_1)Q'(u_0)}{(P(u_1)+Q(u_0))^2}.$$

Интегрируем последнее уравнение по переменной u_0

$$\nu_k = -\frac{k-1}{M-1}\frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} + H(u_1,u_2). \tag{3.32}$$

Так как $\nu_{k,u_2} = H_{u_2}$, уравнение (3.30) переписывается в виде

$$H_{u_2} = (k-1)\frac{P'(u_2)Q'(u_1)}{(P(u_2)+Q(u_1))^2}.$$

Интегрируя последнее, получаем точное выражение для функции H

$$H = -(k-1)\left(\frac{Q'(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} + A(u_1)\right),$$

которое дает

$$\nu_k = -(k-1)\left(\frac{1}{M-1}\frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} + \frac{Q'(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} + A(u_1)\right). \tag{3.33}$$

Подставим найденные значения функций α и ν_k в уравнение (3.29)

$$\begin{gathered}
-\frac{(k-1)}{M-1}\left(\frac{P''(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} - \frac{P'^2(u_1)}{(P(u_1)+Q(u_0))^2}\right) - \\
-(k-1)\left(\frac{Q''(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} - \frac{Q'^2(u_1)}{(P(u_2)+Q(u_1))^2} + A'(u_1)\right) = \\
= (k-1)\left(\frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} + \frac{1}{M-1}\frac{Q'(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} - c_1(u_1)\right) \times \\
\times\left(\frac{1}{M-1}\frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} + \frac{Q'(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} + A(u_1)\right) - \\
-\frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{P''(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} + \frac{1}{M-1}\frac{Q''(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} - \right. \\
-\frac{1}{M-1}\frac{Q'^2(u_1)}{(P(u_2)+Q(u_1))^2} + \frac{1}{M-1}\frac{2Q'(u_1)P'(u_1)}{(P(u_1)+Q(u_0))(P(u_2)+Q(u_1))} + \\
+\frac{1}{(M-1)^2}\frac{Q'^2(u_1)}{(P(u_2)+Q(u_1))^2} - \\
\left. -c_1'(u_1) - 2c_1(u_1)\left(\frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u_0)} + \frac{1}{M-1}\frac{Q'(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)}\right) + c_1^2(u_1)\right).
\end{gathered} \tag{3.34}$$

Очевидно, что согласно предположению $\frac{\partial}{\partial u_1}\alpha(u_1,u_0,u_{-1}) \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial u_{-1}}\alpha(u_1,u_0,u_{-1}) \neq 0$ функции $P'(u_2)$ и $Q'(u_0)$ не обращаются в ноль. Следовательно, переменные

$$\frac{Q'^2(u_1)}{(P(u_2)+Q(u_1))^2}, \quad \frac{P'^2(u_1)}{(P(u_1)+Q(u_0))^2}, \quad \frac{P'(u_1)Q'(u_1)}{(P(u_1)+Q(u_0))(P(u_2)+Q(u_1))}$$

являются независимыми. Собирая коэффициенты при этих переменных в (3.34), получаем систему двух уравнений

$$\left(1-\frac{1}{M-1}\right)\left(1-\frac{k}{2(M-1)}\right) = 0, \quad 1+\frac{1}{(M-1)^2} = \frac{k}{M-1}. \tag{3.35}$$

Система (3.35) имеет два решения: $M = 0$, $k = -2$ и $M = 2$, $k = 2$. Так как k должно быть больше нуля, имеем $M = 2$, $k = 2$. Последние рассуждения завершают доказательство Теоремы 2.

Итак, мы доказали, что $M = 2$, $k = 2$. Разложения (3.10) и (3.21) принимают вид

$$W_2 = \lambda W_1 + \sigma Y_1 + \delta Y_0, \tag{3.36}$$

$$Z_8 = \lambda Z_7 + \mu Z_6 + \nu Z_5 + \rho Z_4 + \kappa Z_3 + \sigma Z_2 + \delta Z_1 + \eta Z_0. \tag{3.37}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Разложения (3.36), (3.37) имеют место тогда и только тогда, когда функции α, γ в уравнении (1.5) имеют вид:*

$$\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n}, \tag{3.38}$$

$$\gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = r'(u_n) - r(u_n)\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \tag{3.39}$$

где $r(u_n) = \frac{k_1}{2}u_n^2 + k_2 u_n + k_3$, где k_i – произвольные постоянные.

Доказательство. Рассмотрим соотношение (3.36). Используя соотношения (3.6), (3.7) и применяя тождество Якоби, получим

$$[D_x, W_2] = -(2a_0 + a_1)W_2 - Y_0(a_0 + 2a_1)W_1 + (2Y_0Y_1(a_0) - Y_1Y_0(a_0))Y_0 - Y_0Y_0(a_1)Y_1. \tag{3.40}$$

Очевидно, что только одно слагаемое в формуле (3.36) содержит оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial u_1}$, а именно σY_1, и только одно слагаемое содержит $\frac{\partial}{\partial u_0}$, а именно σY_0. Следовательно, $\sigma = 0$, $\delta = 0$, и разложение (3.36) принимает вид

$$W_2 = \lambda W_1.$$

Применяя оператор ad_{D_x} к обеим частям последнего соотношения, получим

$$\begin{aligned}&-(2a_0 + a_1)W_2 - Y_0(a_0 + 2a_1)W_1 + (2Y_0Y_1(a_0) - Y_1Y_0(a_0))Y_0 - Y_0Y_0(a_1)Y_1 = \\ &\qquad = D_x(\lambda)W_1 + \lambda\left(-(a_0 + a_1)W_1 + Y_1(a_0)Y_0 - Y_0(a_1)Y_1\right).\end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при операторах W_2, W_1, Y_1, Y_0, приходим к следующей системе:

$$D_x(\lambda) = -a_0\lambda - Y_0(a_0 + 2a_1), \tag{3.41}$$

$$-Y_0Y_0(a_1) = -\lambda Y_0(a_1), \tag{3.42}$$

$$2Y_0Y_1(a_0) - Y_1Y_0(a_0) = \lambda Y_1(a_0). \tag{3.43}$$

Исследуя первое уравнение полученной системы, получаем, что $\lambda = \lambda(u_0, u_1)$, и далее упрощая все уравнения, приходим к следующей системе:

$$\lambda_{u_0} = -\alpha_0\lambda - (\alpha_{0,u_0} + \alpha_0^2), \tag{3.44}$$

$$\lambda_{u_1} = -2\alpha_{1,u_0}, \tag{3.45}$$

$$\alpha_{1,u_0u_0} = \lambda\alpha_{1,u_0}, \quad \alpha_{0,u_0u_1} = \lambda\alpha_{0,u_1}. \tag{3.46}$$

$$\gamma_0\lambda + \gamma_{0,u_0} + \gamma_0\alpha_0 + 2\gamma_{1,u_0} = 0, \tag{3.47}$$

$$\gamma_{1,u_0u_0} = \lambda\gamma_{1,u_0}, \tag{3.48}$$

$$\gamma_{0,u_0u_1} + \gamma_0\alpha_{0,u_1} - \gamma_{0,u_1}\alpha_0 = \lambda\gamma_{0,u_1}. \tag{3.49}$$

Отметим сразу, что уравнения (3.44)–(3.46) будем использовать для уточнения функций α и λ, а уравнения (3.47)–(3.49) для определения функции γ, подставляя найденную функцию α.

Далее обратимся к разложению (3.37).

Полагая $k=2$ в формулах Леммы 5, получаем

$$[D_x, Z_6] = -(\alpha_0 u_{0,x} + 2\alpha_1 u_{1,x}) Z_6 + \cdots, \tag{3.50}$$

$$[D_x, Z_7] = -(\alpha_2 u_{2,x} + 2\alpha_1 u_{1,x}) Z_7 - (Y_1(\alpha_1 u_{1,x}) + 2Y_1(\alpha_2 u_{2,x})) Z_4 + \cdots, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}[D_x, Z_8] = &-(\alpha_0 u_{0,x} + 2\alpha_1 u_{1,x} + \alpha_2 u_{2,x}) Z_8 + Y_0(\alpha_1 u_{1,x}) Z_7 + Y_2(\alpha_1 u_{1,x}) Z_6 - \\ &- (Y_1(\alpha_1 u_{1,x}) + Y_1(\alpha_0 u_{0,x} + \alpha_2 u_{2,x}))\, Z_5 + \cdots .\end{aligned} \tag{3.52}$$

Далее применяем оператор ad_{D_x} к обеим частям соотношения (3.37) и упрощаем полученное равенство, используя (3.50), (3.51), (3.52). Сравнение коэффициентов при Z_7 и Z_6 дает $\lambda = 0$ и $\mu = 0$. Таким образом, формула (3.37) упрощается:

$$Z_8 = \nu Z_5 + \rho Z_4 + \kappa Z_3 + \sigma Z_2 + \delta Z_1 + \eta Z_0. \tag{3.53}$$

Справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}[D_x, Z_8] = &-(a_2 + 2a_1 + a_0) Z_8 + Y_0(a_1) Z_7 - Y_2(a_1) Z_6 - Y_1(a_2 + a_1 + a_0) Z_5 + \\ &+ Y_1 Y_0(a_1) Z_4 - Y_1 Y_2(a_1) Z_3 + (Y_1 Y_2 Y_0(a_1) + Z_5(a_1)) Z_1,\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$[D_x, Z_5] = -(a_0 + a_1 + a_2) Z_5 + Y_0(a_1) Z_4 - Y_2(a_1) Z_3 + Y_2 Y_0(a_1) Z_1. \tag{3.55}$$

Применим ad_{D_x} к (3.53), затем упростим согласно (3.54), (3.55), (3.53) и соберем коэффициенты при Z_5

$$-(a_2 + 2a_1 + a_0)\nu - Y_1(a_2 + a_1 + a_0) = D_x(\nu) - (a_2 + a_1 + a_0)\nu$$

или то же самое

$$D_x(\nu) = -a_1 \nu - Y_1(a_2 + a_1 + a_0). \tag{3.56}$$

Из уравнения (3.56) следует, что ν зависит от трех пременных $\nu = \nu(u, u_1, u_2)$. Таким образом, уравнение (3.56) сводится к системе уравнений:

$$\nu_u = -\alpha_{0,u_1}, \tag{3.57}$$

$$\nu_{u_1} = -\alpha_1 \nu - \alpha_{1,u_1} - \alpha_1^2, \tag{3.58}$$

$$\nu_{u_2} = -\alpha_{2,u_1}, \tag{3.59}$$

$$\gamma_1 \nu + \gamma_{2,u_1} + \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_{1,u_1} + \gamma_{0,u_1} = 0. \tag{3.60}$$

Итак, в результате исследования соотношений (3.36), (3.37) мы пришли к уравнениям (3.44)–(3.46) и (3.57)–(3.59), которые в точности совпадают с соответсвующими системами уравнений из работы [15] и, следовательно, получаем, что

$$\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n}.$$

Используя оставшиеся уравнения (3.47)–(3.49) и (3.60), находим γ:

$$\gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = r'(u_n) - r(u_n)\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}).$$

Нетрудно показать, что соотношения (3.36), (3.37) принимают вид:

$$W_2 = \lambda W_1, \quad \lambda = \frac{2}{u_1 - u_0},$$

$$Z_8 = \nu Z_5, \quad \nu = -\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{(u_1 - u_0)(u_2 - u_1)}.$$

□

Аналогично определяется

$$\beta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = \tilde{r}'(u_n) - \tilde{r}(u_n)\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \tag{3.61}$$

где $\tilde{r}(u_n) = \frac{\tilde{k}_1}{2} u_n^2 + \tilde{k}_2 u_n + \tilde{k}_3$, где $\tilde{k}_i$ – произвольные постоянные.

Следующий этап настоящей работы состоит в уточнении функции δ. Для этого мы строим новую последовательность на множестве кратных коммутаторов.

4. Уточнение функции δ

Напомним, что в силу специального вида исследуемой цепочки (1.5) оператор Y можно представить в виде (2.5):

$$Y=\sum_{i=0}^{N}u_{i,y}Y_i+R,$$

где оператор R определяется формулой (2.6). Рассмотрим следующую последовательность операторов в характеристической алгебре $\mathcal{L}(y,N)$:

$$\begin{gathered}Y_{-1},\,Y_0,\,Y_1,\,Y_{0,-1}=[Y_0,Y_{-1}]\,,\,Y_{1,0}=[Y_1,Y_0]\,,\\ R_0=[Y_0,R]\,,\,R_1=[Y_0,R_0]\,,\,R_2=[Y_0,R_1]\,,\,\ldots,\,R_{k+1}=[Y_0,R_k]\,.\end{gathered}\tag{4.1}$$

Справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[D_x,Y_{-1}]=-a_{-1}Y_{-1},\quad [D_x,Y_0]=-a_0Y_0,\quad [D_x,Y_1]=-a_1Y_1,\tag{4.2}$$

$$[D_x,Y_{1,0}]=-(a_0+a_1)Y_{1,0}-Y_1(a_0)Y_0+Y_0(a_1)Y_1,\tag{4.3}$$

$$[D_x,Y_{0,-1}]=-(a_{-1}+a_0)Y_{0,-1}-Y_0(a_{-1})Y_{-1}+Y_{-1}(a_0)Y_0,\tag{4.4}$$

$$[D_x,R]=-\sum_i h_iY_i,\tag{4.5}$$

где $a_i=\alpha_iu_{i,x}+\gamma_i$, $h_i=\beta_iu_{i,x}+\delta_i$. Применяя тождество Якоби и используя формулы (4.2)–(4.5), выводим:

$$\begin{aligned}&[D_x,R_0]=[D_x,[Y_0,R]]=-[Y_0,[R,D_x]]-[R,[D_x,Y_0]]=\\ &=-a_0R_0+h_1Y_{1,0}-h_{-1}Y_{0,-1}-Y_0(h_1)Y_1-Y_0(h_{-1})Y_{-1}+(R(a_0)-Y_0(h_0))Y_0,\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$[D_x,R_1]=-2a_0R_1-Y_0(a_0)R_0+\cdots,\tag{4.7}$$

$$[D_x,R_2]=-3a_0R_2-3Y_0(a_0)R_1-Y_0^2(a_0)R_0+\cdots,\tag{4.8}$$

$$[D_x,R_3]=-4a_0R_2-6Y_0(a_0)R_1-4Y_0^2(a_0)R_1-Y_0^3(a_0)R_0+\cdots,\tag{4.9}$$

где многоточием обозначена линейная комбинация операторов $Y_{1,0},Y_{0,-1},Y_1,Y_0,Y_{-1}$. По индукции можно доказать, что справедлива формула:

$$[D_x,R_n]=p_nR_n+q_nR_{n-1}+\cdots,\tag{4.10}$$

где

$$p_n=-(n+1)a_0,\quad q_n=-\frac{n^2+n}{2}Y_0(a_0),\tag{4.11}$$

а многоточием обозначена линейная комбинация операторов R_k порядка $k<n-1$ и операторов $Y_{1,0},Y_{0,-1},Y_1,Y_0,Y_{-1}$.

Далее мы рассмотрим два различных случая:

i) Оператор R_0 линейно выражается через операторы (4.1).

ii) Оператор R_0 линейно не выражается через операторы (4.1).

Сосредоточимся на случае i). Из формулы (4.6) следует, что это линейное разложение должно иметь вид

$$R_0=\lambda R+\mu Y_{1,0}+\tilde{\mu}Y_{0,-1}+\nu Y_1+\eta Y_0+\epsilon Y_{-1}.\tag{4.12}$$

Отметим, что операторы в правой части последнего равенства линейно независимы. Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям равенства (4.12) и упростим, используя (4.5), (4.3), (4.4), тогда получим

$$\begin{aligned} -a_0(\lambda R+\mu Y_{1,0}+\tilde{\mu}Y_{0,-1}+\cdots)+h_1Y_{1,0}-h_{-1}Y_{0,-1}+\cdots= \\ =D_x(\lambda)R+D_x(\mu)Y_{1,0}+\mu(-(a_0+a_1)Y_{1,0}+\cdots)+ \\ +D_x(\tilde{\mu})Y_{0,-1}+\tilde{\mu}(-(a_{-1}+a_0)Y_{0,-1}+\cdots). \quad (4.13)\end{aligned}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, представляющие собой линейную комбинацию операторов Y_{-1}, Y_0, Y_1. Собирая коэффициенты при операторах R, $Y_{1,0}$, $Y_{0,-1}$ соответственно, получаем систему уравнений:

$$D_x(\lambda)=-a_0\lambda, \quad (4.14)$$

$$D_x(\mu)=a_1\mu+h_1, \quad D_x(\tilde{\mu})=a_{-1}\tilde{\mu}-h_{-1}. \quad (4.15)$$

Распишем уравнение (4.14): $D_x(\lambda)=-(\alpha_0u_{0,x}+\gamma_0)\lambda$. Из последнего соотношения видно, что $\lambda=\lambda(u_0)$ и следовательно, оно распадается на два уравнения $\lambda'(u_0)=-\alpha_0\lambda(u_0)$, $\gamma_0\lambda=0$. Если $\lambda\neq 0$, то $\alpha_0=-(\log\lambda(u_0))'$, что противоречит изначальному предположению настоящей работы о том, что α_0 существенно зависит от u_{-1} и u_1. Следовательно, $\lambda=0$. Теперь исследуем уравнения (4.15):

$$D_x(\mu)=(\alpha_1u_{1,x}+\gamma_1)\mu+\beta_1u_{1,x}+\delta_1, \quad (4.16)$$

$$D_x(\tilde{\mu})=(\alpha_{-1}u_{-1,x}+\gamma_{-1})\tilde{\mu}-\beta_{-1}u_{-1,x}-\delta_{-1}. \quad (4.17)$$

Из уравнения (4.16) следует, что μ зависит только от переменной u_1, а из (4.17) следует, что $\tilde{\mu}$ зависит от u_{-1}. Теперь уравнения (4.16) и (4.17) сводятся, соответственно, к следующим системам уравнений:

$$\mu'(u_1)=\alpha_1\mu(u_1)+\beta_1, \quad \gamma_1\mu(u_1)+\delta_1=0, \quad (4.18)$$

$$\tilde{\mu}(u_{-1})=\alpha_{-1}\tilde{\mu}(u_{-1})-\beta_{-1}, \quad \gamma_{-1}\tilde{\mu}(u_{-1})-\delta_{-1}=0. \quad (4.19)$$

Сдвигая аргумент n на -1 и 1 в уравнениях (4.18) и (4.19), соответственно, получаем систему

$$\mu'(u_0)=\alpha_0\mu(u_0)+\beta_0, \quad \gamma_0\mu(u_0)+\delta_0=0, \quad (4.20)$$

$$\tilde{\mu}(u_0)=\alpha_0\tilde{\mu}(u_0)-\beta_0, \quad \gamma_0\tilde{\mu}(u_0)-\delta_0=0. \quad (4.21)$$

Исключая функции μ и $\tilde{\mu}$, приходим к дифференциальному уравнению на функцию δ_0:

$$\delta_{0,u_0}=\left(\frac{\gamma_{0,u_0}}{\gamma_0}+\alpha_0\right)\delta_0-\beta_0\gamma_0. \quad (4.22)$$

Решением уравнения (4.22) является фукнция

$$\begin{aligned}\delta_0(u_{-1},u_0,u_1)=\frac{1}{4}\frac{1}{(u_0-u_{-1})(u_0-u_1)}\times \\ \times\Big(k_1(u_0^2u_1-2u_0u_{-1}u_1+u_0^2u_{-1})+2k_2(u_0^2-u_{-1}u_1)+2k_3(-u_1+2u_0-u_{-1})\Big)\times \\ \times\Big(\tilde{k}_1(u_0u_1-u_{-1}u_1+u_{-1}u_0)+2\tilde{k}_2u_0+2\tilde{k}_3+4F_1(u_{-1},u_1)(u_0-u_{-1})(u_0-u_1)\Big). \quad (4.23)\end{aligned}$$

Здесь k_1, k_2, k_3 и $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_3$ – константы, фигурирующие в описании функций (3.39) и (3.61), функцию $F_1(u_{-1},u_1)$ требуется найти. Подставляя (4.23) во второе из уравнений (4.20) $0=\gamma_0\mu(u_0)+\delta_0$ получаем, что $F_1(u_{-1},u_1)=\frac{1}{2}\tilde{k}_1$, и при этом

$$\mu(u_0)=\frac{1}{2}\tilde{k}_1u_0^2+\tilde{k}_2u_0+\tilde{k}_3$$

Из второго уравнения (4.21) $\gamma_0\tilde{\mu}(u_0)-\delta_0=0$ получаем, что

$$\tilde{\mu(u_0)}=-\frac{1}{2}\tilde{k}_1u_0^2-\tilde{k}_2u_0-\tilde{k}_3.$$

Далее, в равенстве (4.13) собираем коэффициенты при операторах Y_1, Y_{-1}. Полученные уравнения превращаются в тождества при найденных выше функциях α, β, γ, δ, μ, $\tilde\mu$ и не дают дополнительных условий на искомые функции. Выпишем уравнение, которое получается в результате сравнения коэффициентов при операторе Y_0 в (4.13):

$$D_x(\eta) = R(a_0) - Y_0(h_0) + \mu Y_1(a_0) - \tilde\mu Y_{-1}(a_0).$$

Вычисляя каждое слагаемое и упрощая последнее равенство, получаем

$$D_x(\eta) = \big(-\beta_{0,u_0} + \mu\alpha_{0,u_1} - \tilde\mu\alpha_{0,u_{-1}}\big)u_{0,x} + \delta_0\alpha_0 - \delta_{0,u_0} - \gamma_0\beta_0 + \mu\gamma_{0,u_1} - \tilde\mu\gamma_{0,u_{-1}}.$$

Ясно, что η зависит только от u_0. Следовательно, последнее уравнение сводится к системе двух уравнений:

$$\eta'(u_0) = -\beta_{0,u_0} + \mu\alpha_{0,u_1} - \tilde\mu\alpha_{0,u_{-1}}, \tag{4.24}$$

$$\delta_0\alpha_0 - \delta_{0,u_0} - \gamma_0\beta_0 + \mu\gamma_{0,u_1} - \tilde\mu\gamma_{0,u_{-1}} = 0. \tag{4.25}$$

Прямым вычислением получаем, что правая часть уравнения (4.24) тождественно равна нулю.

Исследуя уравнение (4.25), получаем дополнительные условия на константы k_i и $\tilde k_i$:

$$k_1 = \frac{\tilde k_1}{\tilde k_2}k_2, \quad k_3 = \frac{\tilde k_3}{\tilde k_2}k_2. \tag{4.26}$$

Доказано, что если имеет место разложение (4.12), то оно имеет вид:

$$R_0 = \mu Y_{1,0} + \tilde\mu Y_{0,-1}. \tag{4.27}$$

При этом мы полностью определяем искомые коэффициенты квазилинейной цепочки

$$u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x}u_{n,y} + \beta_n u_{n,x} + \gamma_n u_{n,y} + \delta_n. \tag{4.28}$$

Для них получаем явные выражения

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n},\\
\beta_n &= \beta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = r'(u_n) - r(u_n)\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}),\\
\gamma_n &= \gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = \varepsilon(r'(u_n) - r(u_n)\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})),\\
\delta_n &= \delta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = -\varepsilon r(u_n)(r'(u_n) - r(u_n)\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})),
\end{aligned}$$

где $r(u_n) = \frac{c_1}{2}u_n^2 + c_2u_n + c_3$ некоторый полином не выше второй степени с произвольными коэффициентами. Граничные условия, сводящие цепочку к интегрируемой системе гиперболических уравнений, задаются в виде

$$u_{-1} = \lambda, \quad u_{N+1} = \lambda, \tag{4.29}$$

где λ удовлетворяет уравнению $r(\lambda) = 0$. В вырожденном случае, когда $r(u_n) = c_3$, граничные условия берутся в виде

$$u_{-1} = c_3(\varepsilon x + y) + c_4, \quad u_{N+1} = c_3(\varepsilon x + y) + c_5, \tag{4.30}$$

где c_4, c_5 — произвольные постоянные.

Исследуем случай ii). Допустим, что некоторый элемент R_n, $n > 0$ последовательности (4.1) линейно выражается через предыдущие элементы:

$$R_n = \lambda R_{n-1} + \cdots, \tag{4.31}$$

но элементы R_k, $k < n$ линейно не выражается через предыдущие R_j, $j < k$, $Y_{1,0}, Y_{0,-1}, Y_1, Y_0, Y_{-1}$. Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям соотношения (4.31):

$$p_n(\lambda R_{n-1} + \cdots) + q_nR_{n-1} + \cdots = D_x(\lambda)R_{n-1} + \lambda(p_{n-1}R_{n-1} + \cdots).$$

Собираем в полученном равенстве коэффициенты при операторе R_{n-1}:

$$D_x(\lambda) = \lambda(p_n - p_{n-1}) + q_n.$$

Подставляем явные выражения для p_n, p_{n-1}, q_n:

$$D_x(\lambda) = -a_0\lambda - \frac{n^2+n}{2}Y_0(a_0).$$

Подставляем явное выражение для a_0 и вычисляем значение выражения $Y_0(a_0)$, получаем

$$D_x(\lambda) = -(\alpha_0 u_{0,x} + \gamma_0)\lambda - \frac{n^2+n}{2}\left((\alpha_{0,u_0} + \alpha_0^2)u_{0,x} + \gamma_{0,u_0} + \gamma_0\alpha_0\right) \tag{4.32}$$

Из последнего равенства следует, что λ зависит от u_0. Тогда уравнение распадается на систему двух уравнений

$$\lambda'(u_0) = -\alpha_0\lambda - \frac{n^2+n}{2}(\alpha_{0,u_0} + \alpha_0^2), \tag{4.33}$$

$$\gamma_0\lambda + \frac{n^2+n}{2}(\gamma_{0,u_0} + \gamma_0\alpha_0) = 0. \tag{4.34}$$

Распишем уравнение (4.33):

$$\lambda'(u_0) = \frac{-\lambda(u_0)(2u_0 - u_1 - u_{-1}) - (n^2+n)}{(u_0 - u_{-1})(u_0 - u_1)} \tag{4.35}$$

или

$$\lambda'(u_0)(u_0^2 - u_0u_1 - u_{-1}u_0 + u_1u_{-1}) = -\lambda(u_0)(2u_0 - u_1 - u_{-1}) - (n^2+n). \tag{4.36}$$

В силу независимости переменных u_{-1}, u_0, u_1 из последнего равенства немедленно следует, что $\lambda = 0$ и $n^2+n = 0$. Откуда $n = 0$ или $n = -1$, что противоречит предположению $n > 0$. Отсюда следует, что случай ii) не реализуется.

Приведем доказательство Теоремы 1 из Введения. В зависимости от выбора значений параметров c_1, c_2, c_3 возможны три существенно разных варианта цепочки (4.28). Остановимся подробно на этих вариантах.

1. Если $c_1 = c_2 = 0$, то преобразованием сдвига $u \to u - c_3(\varepsilon x + y)$ цепочка (4.28) сводится к известной цепочке Ферапонтова-Шабата-Ямилова (см. [27, 28])

$$u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}. \tag{4.37}$$

2. Если $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, то преобразованиями сдвига $u \to u - \frac{c_3}{c_2}$ и растяжения $x \to \frac{x}{\varepsilon c_2}$, $y \to \frac{y}{c_2}$ получаем цепочку

$$u_{n,xy} = \alpha_n(u_{n,x}u_{n,y} - u_n(u_{n,x} + u_{n,y}) + u_n^2) + u_{n,x} + u_{n,y} - u_n. \tag{4.38}$$

3. При $c_1 \neq 0$ преобразованиями сдвига $u \to u - \frac{c_2}{c_1}$ и растяжения $x \to \frac{2}{\varepsilon c_1}x$, $y \to \frac{2}{c_1}y$ цепочку (4.28) можно привести к виду

$$u_{n,xy} = \alpha_n(u_{n,x}u_{n,y} - s_n(u_{n,x} + u_{n,y}) + s_n^2) + s_n'(u_{n,x} + u_{n,y} - s_n), \tag{4.39}$$

где $s_n = u_n^2 + C$, C – произвольная постоянная.

Теорема 4. *Цепочка* (4.28)*, найденная в результате классификации, является интегрируемой в смысле Определения 1, сформулированного во Введении.*

Введем специальные обозначения для кратных коммутаторов операторов $\{Y_i\}$

$$Y_{i_k,\dots,i_0} = [Y_{i_k}, Y_{i_{k-1},\dots,i_0}]. \tag{4.40}$$

Структура алгебры Ли, порожденной операторами $\{Y_i\}$ может быть исследована методом, развитым в нашей предыдущей работе [15]. Можно доказать, что любой элемент этой алгебры представляется в виде линейной комбинации следующих операторов

$$Y_i,\ Y_{i+1,i},\ Y_{i+2,i+1,i}, \dots. \tag{4.41}$$

Из формулы (2.5) следует, что алгебра $\mathcal{L}(y, N)$, соответствующая системе (2.1), является расширением указанной алгебры, полученным добавлением еще одного образующего, а именно, оператора R.

Напомним, что в работе [15] был детально исследован частный случай цепочки (4.28). А именно, была доказана следующая теорема:

Теорема 5. *Цепочка*

$$u_{n,xy} = \left(\frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n}\right) u_{n,x} u_{n,y} \tag{4.42}$$

является интегрируемой по Определению 1, сформулированному во Введении.

Для доказательства Теоремы 5 на множестве кратных коммутаторов операторов $Y_0, ..., Y_N$, соответствующих цепочке (4.42), был построен базис

$$\{Y_i\}_{i=0}^{N}, \quad \{Y_{i+1,i}\}_{i=0}^{N-1}, \quad \{Y_{i+2,i+1,i}\}_{i=0}^{N-2}, \quad \dots, Y_{N,N-1,\dots,0}. \tag{4.43}$$

Доказательство того, что на множестве кратных коммутаторов операторов $Y_0, ..., Y_N$, соответствующих полученной в настоящей работе цепочке (4.28), существует базис, состоящий из операторов, построенных из них по формулам (4.43), является почти дословным повторением доказательства Теоремы 5.2 работы [15] (см. Appendix), подразумевая под a_i функцию $a_i = \alpha_i u_{i,x} + \gamma_i$. Указанное доказательство является громоздким, поэтому здесь мы его не приводим.

Для того чтобы доказать Теорему 4, мы рассматриваем алгебру Ли $\mathcal{L}(y, N)$, порожденную операторами $Y_0, ..., Y_N, R$ и доказываем, что в этой алгебре существует конечный базис

$$R, \quad \{Y_i\}_{i=0}^{N}, \quad \{Y_{i+1,i}\}_{i=0}^{N-1}, \quad \{Y_{i+2,i+1,i}\}_{i=0}^{N-2}, \quad \dots, Y_{N,N-1,\dots,0}. \tag{4.44}$$

Принимая во внимание факты, приведенные в предыдущем абзаце, ясно, что остается доказать, что любой кратный коммутатор оператора R с операторами (4.43) линейно выражается через элементы базиса (4.44).

Доказательство. При доказательстве теоремы мы рассматриваем урезанные цепочки, т.е. конечные системы гиперболических уравнений (2.1), полученные из исходной цепочки наложением условий обрыва. Отметим, что при переходе от бесконечной цепочки к урезанной коммутационные соотношения вблизи точек обрыва меняются.

Доказательство Теоремы 4 проведем по индукции. Обоснуем базу индукции. Для первого шага доказательства нам понадобятся следующие формулы:

$$\big[D_x, \bar{R}_0\big] = -a_0 \bar{R}_0 + h_1 Y_{1,0} - Y_0(h_1) Y_1 + \big(R(a_0) - Y_0(h_0)\big) Y_0, \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}\big[D_x, \bar{R}_N\big] &= -a_N \bar{R}_N - h_{N-1}\left[Y_N, Y_{N-1}\right] - \\ &\quad - Y_N(h_{N-1}) Y_{N-1} + \big(R(a_N) - Y_N(h_N)\big) Y_N,\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}\big[D_x, \bar{R}_k\big] &= -a_k \bar{R}_k - h_{k-1}\left[Y_k, Y_{k-1}\right] + h_{k+1}\left[Y_{k+1}, Y_k\right] - \\ &\quad - Y_k(h_{k-1}) Y_{k-1} + \big(R(a_k) - Y_k(h_k)\big) Y_k - Y_k(h_{k+1}) Y_{k+1}.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Здесь $\bar{R}_j = [Y_j, R]$, $j = 0, 1 \dots, N$.

Покажем, что выполняется равенство

$$\bar{R}_0 = \lambda^{(0)} R + \mu^{(0)} Y_{1,0} + \nu^{(0)} Y_1 + \eta^{(0)} Y_0. \tag{4.48}$$

Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям соотношения (4.48) и упростим в силу формул (4.2), (4.3), (4.5), (4.45), получим

$$\begin{aligned} &-a_0(\lambda^{(0)}R+\mu^{(0)}Y_{1,0}+\cdots)+h_1Y_{1,0}+\cdots=\\ &\qquad=D_x(\lambda^{(0)})R+D_x(\mu^{(0)})Y_{1,0}+\mu^{(0)}(-(a_1+a_0)Y_{1,0}+\cdots). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, не содержащие операторы R и $Y_{1,0}$ (т.е. слагаемые фактически представляющие собой линейную комбинацию операторов Y_1, Y_0). Собирая в (4.49) коэффициенты при операторах R и $Y_{1,0}$, получаем систему уравнений

$$D_x(\lambda^{(0)})=-a_0\lambda^{(0)}, \tag{4.50}$$

$$D_x(\mu^{(0)})=a_1\mu^{(0)}+h_1. \tag{4.51}$$

Уравнение (4.50) совпадает с уравнением (4.14) при $i=0$, следовательно, $\lambda^{(0)}=0$. Уравнение (4.51) совпадает с первым уравнением (4.15) при $i=0$, тогда $\mu^{(0)}=\mu$. Нетрудно показать, что $\nu^{(0)}=\eta^{(0)}=0$. Итак, мы доказали, что разложение (4.48) выполняется и оно имеет вид

$$\bar{R}_0=\mu^{(0)}Y_{1,0}. \tag{4.52}$$

Покажем, что выполняется равенство

$$\bar{R}_N=\lambda^{(N)}R+\tilde{\mu}^{(N)}Y_{N,N-1}+\eta^{(N)}Y_N+\epsilon^{(N)}Y_{N-1}. \tag{4.53}$$

Применим ad_{D_x} к обеим частям соотношения (4.53):

$$\begin{aligned} &-a_N(\lambda^{(N)}R+\tilde{\mu}^{(N)}Y_{N,N-1}+\cdots)-h_{N-1}Y_{N,N-1}+\cdots=\\ &\qquad=D_x(\lambda^{(N)})R+D_x(\tilde{\mu}^{(N)})Y_{N,N-1}+\tilde{\mu}^{(N)}(-(a_N+a_{N-1})Y_{N,N-1}+\cdots). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, не содержащие операторы R и $Y_{N,N-1}$ (фактически представляющие собой линейную комбинацию операторов Y_N, Y_{N-1}). Собирая коэффициенты при R и $Y_{N,N-1}$, получаем систему:

$$D_x(\lambda^{(N)})=-a_N\lambda^{(N)}, \tag{4.55}$$

$$D_x(\tilde{\mu}^{(N)})=a_{N-1}\tilde{\mu}^{(N)}-h_{N-1}. \tag{4.56}$$

Уравнение (4.55) совпадает с уравнением (4.14) при $i=N$, следовательно, $\lambda^{(N)}=0$. Уравнение (4.56) совпадает со вторым уравнением (4.15) при $i=N$, значит $\tilde{\mu}^{(N)}=D_n^N\tilde{\mu}=\tilde{\mu}(u_{N-1})$. Нетрудно показать, что $\eta^{(N)}=\epsilon^{(N)}=0$. Итак, мы доказали, что разложение (4.53) также выполняется и принимает форму:

$$\bar{R}_N=\tilde{\mu}^{(N)}Y_{N,N-1}. \tag{4.57}$$

Пусть $0<k<N$. Покажем, что выполняется равенство

$$\bar{R}_k=\lambda^{(k)}R+\mu^{(k)}Y_{k+1,k}+\tilde{\mu}^{(k)}Y_{k,k-1}+\nu^{(k)}Y_{k+1}+\eta^{(k)}Y_k+\epsilon^{(k)}Y_{k-1}. \tag{4.58}$$

Применим оператор ad_{D_x} к обеим частям соотношения (4.58):

$$\begin{aligned} &-a_k(\lambda^{(k)}R+\mu^{(k)}Y_{k+1,k}+\tilde{\mu}^{(k)}Y_{k,k-1}+\cdots)-h_{k-1}Y_{k,k-1}+h_{k+1}Y_{k+1,k}+\cdots=\\ &\qquad=D_x(\lambda^{(k)})R+D_x(\mu^{(k)})Y_{k+1,k}+D_x(\tilde{\mu}^{(k)})Y_{k,k-1}+\\ &\qquad+\mu^{(k)}(-(a_{k+1}+a_k)Y_{k+1,k}+\cdots)+\tilde{\mu}^{(k)}(-(a_k+a_{k-1})Y_{k,k-1}+\cdots). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Многоточием обозначены слагаемые, не содержащие операторы R, $Y_{k+1,k}$, $Y_{k,k-1}$. Собирая коэффициенты при этих операторах в (4.59), получаем систему

$$D_x(\lambda^{(k)}) = -a_k\lambda^{(k)}, \tag{4.60}$$

$$D_x(\mu^{(k)}) = a_{k+1}\mu^{(k)} + h_{k+1}, \tag{4.61}$$

$$D_x(\tilde{\mu}^{(k)}) = a_{k-1}\tilde{\mu}^{(k)} - h_{k-1}. \tag{4.62}$$

Уравнение (4.60) совпадает с уравнением (4.14) при $i = k$. Поэтому получаем, что $\lambda^{(k)} = 0$. Уравнение (4.61) совпадает с первым уравнением (4.15) при $i = k$, а уравнение (4.62) – со вторым уравнением (4.15) при $i = k$. Следовательно, $\mu^{(k)} = D_n^k(\mu(u_1)) = \mu(u_{k+1})$, $\tilde{\mu}^{(k)} = D_n^k(\tilde{\mu}(u_{-1})) = \tilde{\mu}(u_{k-1})$. Нетрудно показать, что $\nu^{(k)} = \eta^{(k)} = \epsilon^{(k)} = 0$. Итак, мы доказали, что разложение (4.58) имеет вид:

$$\bar{R}_k = \mu^{(k)}Y_{k+1,k} + \tilde{\mu}^{(k)}Y_{k,k-1}. \tag{4.63}$$

Далее, вычислим коммутатор $[Y_{i+1,i}, R]$ для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Используем тождество Якоби:

$$\begin{aligned}
&[Y_{i+1,i}, R] = -[R, Y_{i+1,i}] = -[R, [Y_{i+1}, Y_i]] = \\
&= [Y_{i+1}, [Y_i, R]] + [Y_i, [R, Y_{i+1}]] = \\
&= \left[Y_{i+1}, \mu^{(i)}Y_{i+1,i} + \tilde{\mu}^{(i)}Y_{i,i-1}\right] - \left[Y_i, \mu^{(i+1)}Y_{i+2,i+1} + \tilde{\mu}^{(i+1)}Y_{i+1,i}\right] = \\
&= \Lambda^{(i)}Y_{i+2,i+1,i} + M^{(i)}Y_{i+1,i,i-1} + \kappa^{(i)}Y_{i+2,i+1} + \eta^{(i)}Y_{i+1,i} + \zeta^{(i)}Y_{i,i-1},
\end{aligned}$$

где $\Lambda^{(i)}, M^{(i)}, \kappa^{(i)}, \eta^{(i)}, \zeta^{(i)}$ – некоторые функции, зависящие от динамических переменных. При этом, $\zeta^{(0)} = 0$, $M^{(0)} = 0$, $\Lambda^{N-1} = 0$, $\kappa^{N-1} = 0$.

Теперь обоснуем индуктивный переход. Предположим, что при заданном M, $0 \leqslant k < M \leqslant N-1$ справделива формула:

$$\begin{aligned}
&[Y_{M,M-1,\dots,k}, R] = \Lambda Y_{M+1,M,M-1,\dots,k} + MY_{M,M-1,\dots,k,k-1} + \\
&+\nu Y_{M,M-1,\dots,k} + \varepsilon Y_{M+1,M,M-1,\dots,k+1} + \eta Y_{M-1,\dots,k,k-1} + \\
&+\zeta Y_{M-1,M-2,\dots,k} + \theta Y_{M,M-1,\dots,k+1} + \xi Y_{M-2,M-2,\dots,k-1} + \dots + \\
&+ \dots + \kappa Y_{M+1,M} + \varphi Y_{M,M-1} + \dots + \chi Y_{k,k-1}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

и покажем, что аналогичное представление имеет место и при $M+1$. Применяя тождество Якоби, получим, что справедливо разложение:

$$\begin{aligned}
&[Y_{M+1,M,M-1,\dots,k}, R] = -[R, [Y_{M+1}, Y_{M,M-1,\dots,k}]] = \\
&= [Y_{M+1}, [Y_{M,M-1,\dots,k}, R]] + [Y_{M,M-1,\dots,k}, [R, Y_{M+1}]] = \\
&= [Y_{M+1}, [Y_{M,M-1,\dots,k}, R]] - [Y_{M,M-1,\dots,k}, R_{M+1}].
\end{aligned}$$

Подставляем в последнюю формулу разложение (4.64) и в зависимости от M разложение (4.63), (4.52) или (4.57), и далее раскладываем коммутаторы, используя свойство линейности. Последнее завершает доказательство Теоремы 4. $\square$

Заключение

В работе исследуется задача об интегрируемой классификации двумеризованных цепочек типа (1.1). Для цепочек специального вида (1.5), (1.6) получено полное описание интегрируемых случаев. Под интегрируемостью здесь понимается наличие у цепочки редукций в виде систем гиперболических уравнений сколь угодно высокого порядка, интегрируемых по Дарбу. В полученном списке, наряду с известными, есть и новые примеры (см. цепочки ii) и iii) в Теореме 1).

Используемый для классификации алгоритм является сравнительно новым, апробирование этого алгоритма – одна из целей работы. Он основан на понятии характеристической алгебры, введенной ранее для исследования систем гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными (см., например, работы [17], [20] и ссылки в них). Хорошо известно, что характеристические алгебры по обоим направлениям для интегрируемой по Дарбу системы имеют конечную размерность. В настоящей работе мы использовали это понятие для классификации 1+2 - мерных уравнений.

Как показывают примеры (см. [31]–[34]) характеристические алгебры гиперболических систем интегрируемых при помощи метода обратной задачи рассеяния являются алгебрами медленного роста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, *On the integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems*// Commun. Math. Phys. **248**. 2004. P. 187–206.
2. E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, S.P. Tsarev, *On a class of three-dimensional integrable Lagrangians* // Commun. Math. Phys. **261**. 2006. P. 225–243.
3. A.V. Odesskii, V.V. Sokolov, *Integrable (2+1)–dimensional systems of hydrodynamic type* // Theor. Math. Phys. **163**. 2010. P. 549–586.
4. L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko, *Grassmannians $Gr(N-1, N+1)$, closed differential $N-1$ forms and N-dimensional integrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor. **46**. 2013. 085201.
5. M.V. Pavlov, Z. Popowicz, *On Integrability of a Special Class of Two-Component (2+1)-Dimensional Hydrodynamic-Type Systems* // SIGMA. **5**. 2009. 011, 10 p.
6. A.K. Pogrebkov, *Commutator identities on associative algebras and the integrability of nonlinear evolution equations* // Theor. Math. Phys. **154**:3. 2008. P. 405–417.
7. M. Mañas, L.M. Alonso, *Álvarez-Fernández C., The multicomponent 2D Toda hierarchy: discrete flows and string equations* // Inverse Problems. **25**. 2009. 065007.
8. V.E. Zakharov, S.V. Manakov, *Construction of higher-dimensional nonlinear integrable systems and of their solutions* // Functional Analysis and Its Applications. **19**:2. 1985. P. 89–101.
9. I.S. Krasil'shchik, A. Sergyeyev, O.I. Morozov, *Infinitely many nonlocal conservation laws for the ABC equation with $A+B+C\neq 0$* // Calc. Var. PDEs. **55**:5. 2016. Paper No. 123
10. V.E. Adler, A.B. Shabat and R.I. Yamilov, *Symmetry approach to the integrability problem* // Theor. Math. Phys. **125**. 2000. P. 1603–1661 (Engl. Transl.)
11. A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov, *The symmetry approach to classification of integrable equations. In V.E. Zakharov (eds) What Is Integrability?.* Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg. 1991. P. 115–184.
12. A.V. Mikhailov, R.I. Yamilov *Towards classification of (2+1)-dimensional integrable equations. Integrability conditions: I* // J. Phys. A: Math. Gen. **31**. 1998. P. 6707–6715.
13. Е.В. Ферапонтов, К.Р. Хуснутдинова, М.В. Павлов, *Классификация интегрируемых (2+1)-мерных квазилинейных иерархий* // ТМФ. **144**:1. 2005. С. 35–43; Theoret. and Math. Phys. **144**:1. 2005. P. 907–915.
14. I.T. Habibullin, *Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+ 1)-dimensional lattices* // Physica Scripta. **87**:6. 2013. 065005.
15. I.T. Habibullin, M.N. Poptsova, *Classification of a Subclass of Two-Dimensional Lattices via Characteristic Lie Rings* // SIGMA. **13**. 2017. 073, 26 p.
16. А.В. Жибер, Ф.Х. Мукминов, *Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1991. С. 14–32.
17. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат, *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012. 376 с.
18. A.B. Shabat, *Higher symmetries of two-dimensional lattices* // Phys. Lett. A **200**:2. 1995. P. 121–133.
19. I.T. Habibullin, A. Pekcan, *Characteristic Lie algebra and classification of semidiscrete models* // Theor. Math. Phys. **151**:3. 2007. P. 781–790.

20. A.V. Zhiber, R.D. Murtazina, I.T. Habibullin, A.B. Shabat, *Characteristic Lie rings and integrable models in mathematical physics* // Ufa Math. J. **4**:3. 2012. P. 17–85.
21. A.V. Zhiber, V.V. Sokolov, *Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type* // Russ. Math. Surv. **56**. 2001. P. 61–101.
22. S.V. Smirnov, *Darboux integrability of discrete two-dimensional Toda lattices* // Theor. Math. Phys. **182**:2. 2015. P. 189–210.
23. S.V. Smirnov, *Semidiscrete Toda lattices* // Theor. Math. Phys. **172**:3. 2012. P. 1217–1231.
24. K. Zheltukhin, N. Zheltukhina, E. Bilen, *On a class of Darboux-integrable semidiscrete equations* // Advances in Difference Equations. **2017**:182. 2017.
25. K. Zheltukhin, N. Zheltukhina, *Semi-discrete hyperbolic equations admitting five dimensional characteristic x-ring* // J. Nonlinear Math. Phys. **23**. 2016. P. 351–367.
26. G. Gubbiotti, C. Scimiterna, R.I. Yamilov, *Darboux integrability of trapezoidal H4 and H6 families of lattice equations II: General Solutions.* 2017. arXiv:1704.05805
27. E.V. Ferapontov, *Laplace transformations of hydrodynamic-type systems in Riemann invariants* // Theor. Math. Phys. **110**:1. 1997. P. 68–77.
28. A.B. Shabat, R.I. Yamilov, *To a transformation theory of two-dimensional integrable systems* // Phys. Lett. A **227**:1-2. 1997. P. 15–23 .
29. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**:45. 2006. P. 541–623.
30. G. Rinehart, *Differential forms for general commutative algebras.* // Trans. Amer.Math. Soc. 108. 1963. P. 195–222.
31. A.V. Zhiber, R.D. Murtazina, *On the characteristic Lie algebras for equations* $u_{xy} = f(u, u_x)$ // J. Math.Sci. **151**:4. 2008. P. 3112–3122.
32. И.Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, *Алгебраический метод классификации S-интегрируемых дискретных моделей* // ТМФ. **167**:3. 2011. P. 407–419.
33. A.U. Sakieva, *The characteristic Lie ring of the Zhiber-Shabat-Tzitzeica equation* // Ufa Math. J. **4**:3. 2012. P. 155–160.
34. D. Millionshchikov, *Lie Algebras of Slow Growth and Klein-Gordon PDE* // Algebr. Represent. Theor. 2018. https://doi.org/10.1007/s10468-018-9794-4.

Мария Николаевна Попцова,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mnpoptsova@gmail.com

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия,
Башкирский государственный университет,
ул.Заки Валиди, 32, физико-математический корпус
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com