ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 3 (2018). С. 44-59.

УДК 517.98

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ПОКРЫТОЙ КРОШЕНЫМ ЛЬДОМ

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Д.О. ЦВЕТКОВ

Аннотация. Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной системы. Отметим, что в зарубежных публикациях такие жидкости часто называют жидкостями с инерционными свободными поверхностями. Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой теории операторных матриц. С этой целью вводятся гильбертовы пространства и некоторые их подпространства, а также вспомогательные краевые задачи. Исходная краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов, соответствующих результирующей системе уравнений, доказана теорема о сильной разрешимости задачи Коши, полученная на конечном временном интервале. На этой основе найдены достаточные условия существования сильного (по временной переменной) решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, крошеный лед, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Mathematics Subject Classifcation: 35D35

1. Введение

Важной составляющей общей задачи динамики тела с полостью, содержащей жидкость, является задача о движении жидкости в неподвижном сосуде. Упомянем коротко о тех задачах, которые имеют непосредственное отношение к тематике данной работы.

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложения в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1]–[6] и работы [7], [8], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Так, в океанах эти силы порождают внутренние инерционные волны большой амплитуды,

N.D. Kopachevsiy, D.O. Tsvetkov, Small motions of ideal stratified liquid with a free surface totally covered by a crumbled ice.

Поступила 29 июня 2017 г.

которые могут привести к катастрофам. В танкерах, заполненных нефтью, могут возникнуть колебания, приводящие к неустойчивым движениям корабля.

Ледяной покров является важным компонентом гидрологического режима замерзающих морей и океанов. Наличие плавающего льда на поверхности морей и океанов существенным образом влияет на характер их поведения. Рассмотрение таких проблем является одним из важных разделов океанологии, практическая эффективность которого несомненна. Близкая к задаче динамики жидкости в областях, покрытых крошеным льдом, которая называется задачей о флотации, изучалась в работах [9], [10], а также в диссертации [11].

2. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ, полностью покрытой крошеным льдом. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ – липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \tag{1}$$

$$N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0.$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля-Брента, или частотой плавучести. Физически $N(x_3)$ равна частоте колебаний, с которой частица жидкости, находящаяся на уровне $x_3 = \text{const}$, будет колебаться в стратифицированной жидкости, если сместится с этого уровня.

Рассмотрим малые (линейные) движения стратифицированной жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u}$ поле скорости жидкости в Ω. Тогда движения гидросистемы будет описываться следующим уравнением (см. [12], с.73):

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\widehat{\rho}^{-1}\cdot\nabla P + \vec{F} \quad (\text{ в } \Omega\,), \tag{2}$$

где $\widehat{\rho}(t,x)$, $P(t,x)$ и $\vec{F}(t,x)$ – это полные поля плотности, давления в жидкости и поле массовых внешних сил, соответственно.

Кроме того, требуется добавить уравнение неразрывности или закон сохранения вещества. Он выражает тот очевидный факт, что масса жидкости в объеме, охватывающем все время одни и те же частицы, сохраняется (см. [13], с. 89):

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\widehat{\rho}\vec{u}) = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,). \tag{3}$$

Определим статическое давление в жидкости. Если система находится в равновесии и на нее действует лишь сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, то $\vec{F} = \vec{g}$ и из (2) при $\vec{u} = \vec{0}$ получим, что

$$\nabla P_0 = -\rho_0(x_3)g\vec{e}_3.$$

Поэтому статические давление $P_0(x)$ в жидкости равно

$$P_0(x) = P_0(x_3) = p_a - g\int_0^{x_3}\rho_0(\zeta)d\zeta, \tag{4}$$

где p_a — внешнее постоянное давление.

Рассматривая задачу о малых движениях системы, представим поля $P(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x)$ и $\vec{F}(t,x)$ в виде

$$P(t,x) = P_0(x) + p(t,x), \quad \widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(x_3) + \rho(t,x),$$
$$\vec{F}(t,x) = \vec{f}(t,x) - g\vec{e}_3, \tag{5}$$

где $p(t,x)$ — отклонение поля давления от равновесного поля $P_0(x_3)$, $\rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних массовых сил.

Подставим представления (5) в уравнения (2), (3):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0(x_3)+\rho(t,x)}\nabla(P_0(x_3)+p(t,x)) + \vec{f}(t,x) - g\vec{e}_3 \quad (\text{ в } \Omega\,), \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0(x_3)+\rho(t,x)) + \operatorname{div}\Big((\rho_0(x_3)+\rho(t,x))\vec{u}\Big) =$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} + \nabla\rho\cdot\vec{u} + (\rho_0+\rho)\mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,). \tag{7}$$

Учитывая, что плотность с течением времени не меняется, т.е.

$$\frac{d\widehat{\rho}}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} + \nabla\rho\cdot\vec{u} = 0,$$

после линеаризации (6), (7) получим:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3) + \vec{f} \quad (\text{ в } \Omega\,), \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,). \tag{9}$$

Так как рассматриваются движения жидкости в жестком сосуде, то на его твердой стенке S для идеальной жидкости должно выполняться условие непротекания:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{ на } S\,), \tag{10}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к области Ω.

Перейдем к определению кинематического условия на равновесной поверхности Γ. Будем искать отклонение движущейся поверхности $\Gamma(t)$ в виде:

$$\Gamma(t): \quad x_3 = \zeta = \zeta(t,\hat{x}), \quad \hat{x} := (x_1,x_2)\in\Gamma.$$

В этом случае линеаризованное кинематическое условие для частиц жидкости, находящихся на $\Gamma(t)$, имеет вид:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} \quad (\text{ на } \Gamma\,). \tag{11}$$

Записывая второй закон Ньютона для частиц крошеного льда и линеаризуя его, получим динамическое условие (см. [9]):

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{12}$$

где ρ_2 – поверхностная плотность крошеного льда. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной гидродинамической системы.

Таким образом, линейная постановка задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),\\
&\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),\\
&\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\,\text{на}\,S\,), \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,), \quad \int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0,\\
&p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,),\\
&\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (\,x\in\Omega\,), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Последние три условия – это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0$ есть условие сохранения объема.

Отметим, что для классического решения задачи (13) имеет место закон баланса полной энергии:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Bigg[&\Bigg(\int\limits_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}|^2\,d\Omega + \rho_2\int\limits_\Gamma\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 d\Gamma\Bigg) + \\
&+\Bigg(g^2\int\limits_\Omega\big[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\big]^{-1}|\rho|^2\,d\Omega + g\rho_0(0)\int\limits_\Gamma|\zeta|^2\,d\Gamma\Bigg)\Bigg] = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{f}\cdot\vec{u}\,d\Omega.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Левая часть представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (первая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии крошеного льда. Полная потенциальная энергия (вторая скобка) равна сумме потенциальной энергии, обусловленной наличием сил плавучести и потенциальной энергией, обусловленной колебаниями свободной поверхности. Правая часть есть мощность внешних сил.

3. Исключение поля плотности. Использование поля малых смещений жидкости

В начально-краевой задаче (13) можно исключить одну искомую функцию – поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанных с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$
\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,).
\tag{15}
$$

Тогда вместо (8) и (9) придем к связи

$$
\begin{aligned}
&\rho(t,x) = -\nabla\rho_0\cdot\vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0'(x_3)v_3(t,x) + f_0(x),\\
&f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0'(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),\\
&\psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - gf_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (13) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\ &\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\, S), \quad p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma), \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \\ &v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma). \end{aligned} \tag{18}$$

Начально-краевая задача (18) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (18) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (13) можно найти по формулам (15) и (16).

4. Проектирование уравнений движения на ортогональные пространства

Начально-краевую задачу (18) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (18) на ортогональные подпространства (см. [15]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{19}$$

Как следует из (1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (19) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ множества гладких функций

$$\{\,\vec{v}\in\vec{C}^1(\Omega) :\, \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в }\Omega),\ v_n = 0 \ (\text{на }\ \partial\Omega)\,\}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\, \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n = 0 \ (\text{на }\ S),$$
$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \ (\text{в }\ \Omega),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\,\}.$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\, \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \ (\text{на}\,\Gamma)\,\}.$$

Отметим, что здесь $v_n = \rho_0^{-1}\partial p/\partial n$ — функционал из пространства $\widetilde{H}_S^{-1/2} = (H_S^{1/2})^*$, состоящий из функций, продолжимых нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ на всю $\partial\Omega$, при этом $H^{1/2}(\partial\Omega)\subset L_2(\partial\Omega)\subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [14], гл. 3).

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0), \tag{20}$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (19) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ (см. [15], с. 106).

Будем считать $\vec{u}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (18), ортогонального разложения (20) имеем

$$\vec{v}(t,x)\in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=:\vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered}\vec{v}(t,x)=\vec{w}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x),\ \vec{w}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x)=\rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x),\\ \rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).\end{gathered}\tag{21}$$

Обозначим через $P_0,\ P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (21) в первое уравнение (18) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0,\tag{22}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)+\rho_0^{-1}\nabla p_1+P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{h,S}\psi_0,\tag{23}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_2+P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma}\psi_0.\tag{24}$$

Из последнего соотношения (24) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p\to p_1$, так как $p=p_1+p_2,\ p_2=0$ (на Γ).

Для перехода от (22), (23) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\Psi\,,\qquad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\eta\,.\tag{25}$$

Тогда (23) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+p_1+\Psi+\eta-F=c(t)\quad(\text{в}\,\Omega\,),\tag{26}$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (26) на Γ и воспользуемся, в силу (22) – (24), равенством

$$\begin{aligned}p_1&=g\rho_0(0)v_3+\rho_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)+\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)=\\&=g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)=g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_2\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\quad(\text{на}\,\Gamma\,);\end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\rho_2\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma\,).\tag{27}$$

Это соотношение вместе с (22) дает два уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (25), а также ограничения, следующие из (22) – (24). Таким образом, начально-краевую задачу (18) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\Big[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\Big] = P_0\psi_0 \quad (\text{в}\,\Omega\,),\\
&\operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega\,), \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на }\partial\Omega\,),\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_2\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma\,),\\
&\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в }\Omega\,), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на }S\,),\\
&\int_\Gamma \Phi\,d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,d\Gamma = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}w(0,x) = P_0\vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \big[\big(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\big)\cdot\vec{n}\big]_\Gamma,\\
&\vec{w}(0,x) = P_0\vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,).
\end{aligned} \tag{28}$$

Отметим, что отклонение $v_3|_\Gamma = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\int_\Gamma v_3\,d\Gamma = \int_\Gamma\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)d\Gamma = 0 \implies \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,d\Gamma = 0, \tag{29}$$

так как $w_3|_\Gamma = 0$, $\rho_0^{-1}|_\Gamma = \text{const}$.

5. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Условие (29) является необходимым условием разрешимости следующей задачи.

Вспомогательная задача I (задача Неймана).

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в }\Omega\,), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на }S\,),\\
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = \psi \quad (\text{на }\Gamma\,), \quad \int_\Gamma \psi\,d\Gamma = 0.
\end{gathered} \tag{30}$$

Введем в пространстве $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ его оснащение в виде $H_+\subset H_0\subset H_-$, где $H_+ = H^{1/2}(\Gamma)\cap H_0 =: H_\Gamma^{1/2}$, $H_- = (H_+)^* =: \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Здесь через $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ с центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [14], гл. 3).

Отметим, что с учетом (14), скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ имеет вид:

$$(\eta,\zeta)_0 := \rho_0(0)\int_\Gamma \eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\,d\Gamma. \tag{31}$$

Лемма 2. *При любом $\psi\in H_- = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ задача (30) в области Ω с липшицевой (кусочно-гладкой) границей $\partial\Omega$ имеет единственное обобщенное решение $\Phi\in H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, причем*

$$\|\Phi\|_{H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)} \leqslant c_1\|\psi\|_{\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}}. \tag{32}$$

Здесь $H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ *– подпространство квазигармонических функций, удовлетворяющих условию Неймана на* S*, пространства* $H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)$ *с квадратом нормы*

$$\|\Phi\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)} := \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}\,|\nabla\Phi|^2\ d\Omega, \quad \int\limits_\Gamma \Phi\ d\Gamma = 0.$$

Для обобщенного решения $\Phi(x)$ *задачи* (30) *имеет место тождество*

$$(\Phi,\Psi)_{H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)} = (\psi,\Psi|_\Gamma)_{H_0}, \quad \forall\Psi\in H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0). \tag{33}$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [15], стр. 46.

Вспомогательная задача II (задача Неймана-Зарембы).

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi)=0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на } S),$$
$$\rho_0^{-1}(0)\Phi=\varphi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \varphi\,d\Gamma = 0. \tag{34}$$

Лемма 3. *При любом* $\varphi\in H_+ = H^{1/2}_\Gamma$ *задача* (34) *имеет единственное обобщенное решение* $\Phi\in H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$*, причем*

$$\|\Phi\|_{H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)} \leqslant c_2\,\|\varphi\|_{H^{1/2}_\Gamma}. \tag{35}$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [15], стр. 45.

Согласно теореме Гальярдо (см. [16]) след функции $\Phi(x)\in H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ на границе $\partial\Omega$ принадлежит $H^{1/2}(\partial\Omega)$, поэтому в $H^{1/2}_\Gamma = H_+$ норму можно выбрать в одной из эквивалентных форм таким образом, чтобы

$$\|\Phi\|_{H^1_{h,S}(\Omega)} = \|\varphi\|_{H^{1/2}_\Gamma}, \qquad \forall\ \varphi\in H^{1/2}_\Gamma, \tag{36}$$

где $\Phi(x)$ – решение задачи (34) .

Будем считать, что $\psi = \left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma$ есть заданная функция из пространства $\widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma$. Тогда, рассматривая задачу Неймана с заданной ψ, получим по лемме 2, что

$$\Phi(x) = T\psi\in H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$

где $T:\widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma\to H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ – ограниченный линейный оператор, норма которого не превышает константу $c_1>0$ из (32).

Введем теперь оператор следа γ_Γ: для любой $\Phi(x)\in H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ по определению

$$\gamma_\Gamma\Phi := \Phi|_\Gamma.$$

Отметим, что оператор γ_Γ ограниченно действует из $H^1(\Omega,\rho_0)$ (а потому и из подпространства $H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)$) в $H_+ = H^{1/2}_\Gamma$ (см., например, [16]). Отсюда получаем, что

$$\gamma_\Gamma\Phi = \Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma T\psi = \gamma_\Gamma T\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma =: C\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \tag{37}$$

где оператор $C=\gamma_\Gamma T:\widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma = H_-\to H^{1/2}_\Gamma = H_+$ является линейным ограниченным оператором.

Лемма 4. *Сужение оператора* C *на* $H_0\subset H_-$ *является линейным компактным самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве* H_0.

Доказательство. Если $\psi \in H_0$, то $C\psi = \gamma_\Gamma T\psi \in H_+$. Так как пространство $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в пространство H_0, а C ограниченно действует из H_0 в H_+, то оператор $C : H_0 \to H_0$ компактен.

Для доказательства свойства симметрии (самосопряженности) и положительности оператора C будем считать, что в тождестве (33) $\Psi \in H^1_{h,S}(\Omega, \rho_0) \subset H^1_\Gamma(\Omega)$, причем $\Psi(x)$ также является решением вспомогательной задачи (30) при заданной функции $v \in H_0$; тогда

$$\begin{aligned} \Phi &= T\psi, \quad \psi = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \quad \gamma_\Gamma\Phi = C\psi, \\ \Psi &= Tv, \quad v = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\right)_\Gamma, \quad \gamma_\Gamma\Psi = \Psi|_\Gamma = Cv, \end{aligned} \tag{38}$$

Из этих формул и из (33) получаем

$$(\psi, Cv)_{H_0} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\overline{\nabla\Psi}\,d\Omega = (C\psi, v)_{H_0}, \quad \forall w, v \in H_0, \tag{39}$$

откуда следует, что $C = C^*$. Полагая здесь $v = \psi$, $\Psi = \Phi$, имеем

$$(C\psi, \psi)_{H_0} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1}\left|\nabla\Phi\right|^2\,d\Omega = \|\Phi\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)} \geq 0. \tag{40}$$

Если $(C\psi, \psi)_{H_0} = 0$, то $\Phi \equiv \Phi_0 = const$. Тогда из условия нормировки функции Φ

$$\int\limits_\Gamma \Phi_0\,d\Gamma = 0$$

получаем, что $\Phi \equiv 0$, а потому $\psi = \left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma = 0$.

Таким образом, оператор C положителен в H_0. □

Замечание. Следствием доказанной леммы является такое утверждение: оператор $C : H_0 \to H_0$ имеет обратный оператор C^{-1}, который является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в H_0 и заданным на области определения $\mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C)$, плотной в H_0.

Замечание. Из (38), (40) следует, что

$$\left(C^{-1}\varphi, \varphi\right)_{H_0} = \|\Phi\|^2_{H^1_{h,S}(\Omega,\rho_0)}, \quad \gamma_\Gamma\Phi = \varphi \in \mathcal{D}\left(C^{-1}\right), \tag{41}$$

где Φ – решение задачи (34). Отсюда получаем, что при выборе нормы в $H_\Gamma^{1/2} = H_+$ в виде (36) оператор $C^{-1/2}$ изометрически действует из $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ в $H_0 = H$:

$$\left\|C^{-1/2}\varphi\right\|^2_{H_0} = \|\varphi\|^2_{H_\Gamma^{1/2}}, \quad \forall\varphi \in H_+. \tag{42}$$

Таким образом, оператор $C^{-1/2}$ переводит $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ в H_0, а оператор $C^{1/2}$ — соответственно H_0 в $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ (изометрическим образом). Как следует из общей теории оснащенных гильбертовых пространств, расширение оператора $C^{-1/2}$ (которое будем обозначать так же) с $\mathcal{D}\left(C^{-1/2}\right) = H_+$ на H_0 является изометрическим оператором, переводящим все H_0 на все $H_- = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Соответственно оператор $C^{1/2}$ (после расширения на H_-) переводит изометрически все H_- на все H_0.

Согласно выше приведенным построениям (см. (37)), перепишем систему уравнений (22) и (27) вместе, проектируя дополнительно (27) на H_0:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\right] + P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[C + \rho_2 I\right]\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma + g\rho_0\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma + P_{H_0}\left(\Psi + \eta\right) = P_{H_0}F. \end{aligned} \tag{43}$$

Осуществим в (43), учитывая (30), замену:

$$\psi = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma = C^{-1/2}y, \quad y \in H_0. \tag{44}$$

Будем считать, что $P_{H_0}F \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$, и применим к второму уравнению (43) оператор $C^{-1/2}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right] + P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[I + \rho_2 C^{-1}\right]y + g\rho_0 C^{-1}y + C^{-1/2}P_{H_0}\left(\Psi + \eta\right) = C^{-1/2}P_{H_0}F. \end{aligned} \tag{45}$$

Здесь через $U : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ обозначен оператор, который посредством решения задачи (30) ставит в соответствие элементу $\psi \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &B_{11}\vec{w} := P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \quad B_{12}y := P_0\left[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right], \\ &B_{21}\vec{w} := C^{-1/2}P_{H_0}\Psi, \quad \rho_0^{-1}\nabla\Psi = P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right], \\ &B_{22}y := C^{-1/2}P_{H_0}\eta, \quad \rho_0^{-1}\nabla\eta = P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right]. \end{aligned} \tag{46}$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt.

Начально-краевая задача (18) распадается на тривиальное соотношение (24) и задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка (неполного, то есть не содержащего слагаемого с первой производной) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\mathcal{X} + (\mathcal{C} + \mathcal{B})\,\mathcal{X} = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \qquad \mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}^1, \tag{47}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I + \rho_2 C^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g\rho_0 C^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ C^{-1/2}P_{H_0}F \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Лемма 5. *Оператор-матрица $\mathcal{B}$ из* (48) *обладает свойствами $\mathcal{O} \leqslant \mathcal{B} \leqslant N_0^2\mathcal{I}$, где N_0^2 – константа из* (1), *$\mathcal{O}$ и $\mathcal{I}$ – нулевой и единичный операторы в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$.*

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{w}\\ y\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \\
&= (B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{12}y,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{21}\vec{w},y)_{H_0} + (B_{22}y,y)_{H_0}.
\end{aligned}
$$

С учетом определений (46), (19), (31), а также формулы Грина для оператора Лапласа (см., например, [15] с. 102), имеем:

$$
(B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \left(P_0\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right],\vec{w}\right)_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \int\limits_\Omega N^2(x_3)\cdot\rho_0(x_3)|w_3|^2\,d\Omega,
$$

$$
\begin{aligned}
(B_{12}y,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} &= \left(P_0\left[N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\right],\vec{w}\right)_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = \\
&= \int\limits_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)w_3\,d\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(B_{21}\vec{w},y)_{H_0} &= \left(C^{-1/2}P_{H_0}\Psi,y\right)_{H_0} = \left(P_{H_0}\Psi,C^{-1/2}y\right)_{H_0} = \\
&= \int\limits_\Gamma \rho_0(0)P_{H_0}\Psi\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma d\Gamma = \\
&= \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Psi\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega = \\
&= \int\limits_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)w_3\,d\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(B_{22}y,y)_{H_0} &= \left(C^{-1/2}P_{H_0}\eta,y\right)_{H_0} = \left(P_{H_0}\eta,C^{-1/2}y\right)_{H_0} = \\
&= \int\limits_\Gamma \rho_0(0)P_{H_0}\eta\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma d\Gamma = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\eta\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega = \\
&= \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\cdot N^2(x_3)\left((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega = \\
&= \int\limits_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega,
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем, с одной стороны, используя (1) и (21):

$$
(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} = \int\limits_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega \geq N^2_{\min}\int\limits_\Omega \rho_0(x_3)|v_3|^2\,d\Omega \geq 0\,.
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} &\leqslant N_0^2\cdot\int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega \leqslant N_0^2\cdot\int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\left|\vec{v}\right|^2\,d\Omega = \\
&= N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)}\right) =
\end{aligned}
$$

$$= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \int\limits_\Omega \rho_0(x_3) \cdot \rho_0^{-1}\nabla\Phi \cdot \rho_0^{-1}\nabla\Phi \, d\Omega \right) =$$

$$= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} - \int\limits_\Omega \Phi \cdot \mathrm{div}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} (\Phi)\,|_\Gamma \cdot \left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi \cdot \vec{n}\right)\, dS \right) =$$

$$= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \int\limits_\Gamma (\Phi)\,|_\Gamma \cdot \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma d\Gamma \right) =$$

$$= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (C^{1/2}y, C^{-1/2}y)_{H_0} \right) = N_0^2 \left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \|y\|^2_{H_0} \right) = N_0^2 \|\mathcal{X}\|^2_{\mathcal{H}}.$$

□

Определение 1. *Назовем функцию $\mathcal{X}(t)$, заданную на отрезке $[0,T]$, сильным решением задачи (47) со значениями в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H_0$, если выполнены следующие условия:*
1°. $\mathcal{X}(t) \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{D}(C^{-1})$;
2°. $\mathcal{B}\mathcal{X}(t) \in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$, $\mathcal{C}\mathcal{X}(t) \in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$;
3°. $\mathcal{A}\mathcal{X}(t) \in C^2\left([0,T];\mathcal{H}\right)$;
4°. *выполнено уравнение и начальные условия из* (47).

Теорема 1. *Пусть в задаче* (47) *выполнены условия*

$$\mathcal{X}^0 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H_\Gamma^{1/2}, \quad \mathcal{X}^1 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H_\Gamma^{1/2}, \quad \mathcal{F} \in C\left([0,T];\mathcal{H}\right). \tag{50}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Сделаем в задаче (47) замену $C^{-1/2}y = z$ и подействуем оператором $\mathrm{diag}\left(I; C^{1/2}\right)$ к обеим частям уравнения (47), в результате приходим к следующей задаче Коши

$$\mathcal{A}_1 \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{X}_1 + \mathcal{C}_B\mathcal{X}_1 = \mathcal{F}_1, \qquad \mathcal{X}_1(0) = \mathcal{X}_1^0, \qquad \mathcal{X}_1'(0) = \mathcal{X}_1^1, \tag{51}$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C + \rho_2 I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}C^{1/2} \\ C^{1/2}B_{21} & g\rho_0 I + C^{1/2}B_{22}C^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ C^{-1/2}y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{F}. \tag{53}$$

Из построений, приведенных выше (леммы 4, 5), следует, что

$$0 << \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad 0 \leqslant \mathcal{C}_B = \mathcal{C}_B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Тогда для сильной разрешимости задачи Коши (51) достаточно потребовать, чтобы

$$\mathcal{X}_1^0 \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{X}_1^1 \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}_1 \in C\left([0,T];\mathcal{H}\right).$$

Доказательство этого факта см. [17], стр. 44.

Таким образом, с учетом (53), получим условия (50) разрешимости задачи (47). Например,

$$\mathcal{X}_1^0 = \begin{pmatrix} \vec{w}^0 \\ C^{-1/2}y^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H_0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{X}^0 = \begin{pmatrix} \vec{w}^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \mathcal{D}(C^{-1/2}) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H_\Gamma^{1/2}.$$

□

Исходя из формулировок задач (13), (18) дадим (согласованные между собой) определения так называемых сильных по переменной t решений этих задач.

Определение 2. *Сильным (по переменной t) решением задачи* (13) *на промежутке* $[0,T]$ *назовем набор функций* $\vec{u}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, $\rho\,(t,x)$ *и* $\zeta\,(t,\hat{x})$, *для которых выполнены следующие условия:*

1°. $\vec{u}\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\left([0,T]\,;\vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\right)$,

$\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\mathfrak{L}_2\,(\Omega)\right)$, *где* $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ *– гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением*

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2\int\limits_{\Omega}\left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega$$

и при любом $t\in[0,T]$ *справедливо первое уравнение* (13);

2°. $u_n = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} \in C\left([0,T]\,;H_0\right)$;

3°. *выполнено граничное условие на* Γ*:*

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;H_0\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в H_0.

4°. *выполнены начальные условия* (13).

Определение 3. *Сильным (по переменной t) решением задачи* (18) *на промежутке* $[0,T]$ *назовем набор функций* $\vec{v}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, *для которых выполнены следующие условия:*

1°. $\vec{v}\,(t) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\left([0,T]\,;\vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\right)$ *и при любом* $t\in[0,T]$ *справедливо первое уравнение* (18);

2°. *выполнено граничное условие на* Γ*:*

$$p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;H_0\right),\quad v_3 = \vec{v}\cdot\vec{e}_3,$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в H_0.

3° *выполнены связи* (15) *и* (16),

4°. *выполнены начальные условия* (18).

Определение 4. *Сильным (по переменной t) решением задачи* (28) *на промежутке* $[0,T]$ *назовем такие функции* $\vec{w}(t,x)$ *из* $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ *и* $\Phi\,(t,x)$ *со значениями в* $H^1_\Gamma\,(\Omega,\rho_0)$, *для которых выполнены следующие условия:*

1°. $\vec{w}\,(t) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\right)$;

2°. $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma \in C^2\left([0,T]\,;H_0\right)$, $\Phi_\Gamma \in C^2\left([0,T]\,;H^{1/2}_\Gamma\right)$, *для* $\forall t\in[0,T]$;

3°. *выполнены соотношения*

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0 \quad (\,в\,\Omega\,), \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_2\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\,на\,\Gamma\,), \tag{55}$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями соответственно со значениями в $\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)$ *и* H_0, *причем* $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in C^2\left([0,T]\,;\vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)\right)$;

4°. *выполнены начальные условия*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \left[(P_{h,S}\vec{u}^0(x))\cdot\vec{n}\right]_\Gamma \in H_0,$$

$$\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\zeta(0,\hat{x})\in H_0;$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}(0,x))=P_0\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0);$$
$$\vec{w}(0,x)=P_0\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\quad (w_3(0,\hat{x}))_\Gamma=0.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0\in\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho^0\in\mathfrak{L}_2(\Omega),\quad \zeta^0\in H_0=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\},$$
$$\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H_0,\quad f(t)\in C\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right).$$

Тогда каждая из задач (13), (18) *и* (28) *имеет единственное сильное по t решение.*

Доказательство. Отметим, что при выборе норм в $H_\Gamma^{1/2}$ в виде (36), (42) и свойств изометрии оператора $C^{-1}:H_\Gamma^{1/2}=\mathcal{D}(C^{-1})\to\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ следующие утверждения очевидны

$$\left\{\rho_0^{-1}\nabla\Phi\in C^k\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)\right\}\Leftrightarrow\left\{\Phi|_\Gamma\in C^k\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right)\right\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left\{\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma\in C^k\left([0,T];\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}\right)\right\},k=0,1,2,...\qquad(56)$$

Доказательство теоремы проведем по этапам, переходя последовательно от задачи (47) к (28), затем от (28) к (18) и от (18) к (13).

От задачи (47) *к* (28). Пусть выполнены условия (50) для функций $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{F}$ из теоремы о разрешимости задачи (47). Тогда

1. Для функции $\vec{w}(t,x)$ справедливы:

$$\left(\vec{w}^0\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\quad \vec{w}^1\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((w_3(0,\hat{x}))_\Gamma=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}(0,x))=P_0\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0).\right)$$

Кроме того, $\vec{w}(t)\in C^2\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right)$.

2. Если задача (47) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ и компонента $y\in H_\Gamma^{1/2}$, с учетом (37) и (44), имеем

$$\Phi|_\Gamma=C\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma\in C^2\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right),\quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma\in C^2([0,T];H_0).\qquad(57)$$

Отсюда следует, что для функции $\Phi=\Phi(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (28), причем в краевом условии на Γ все функции принадлежат пространству $C([0,T];H_0)$. Из (56) следует, что

$$\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in C^2\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega)\right).$$

Кроме того, в силу (57)

$$\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,x)\right)_\Gamma=\zeta^0(\hat{x})=C^{-1/2}y^0\in H_0,$$
$$C^{-1/2}y^1=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma\in H_0,$$

Поэтому по лемме 2 можно получить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x)=P_{h,S}\vec{u}^0\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0).\qquad(58)$$

Значит, согласно определению 4, функции $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi\,(t,x)$ является сильным (по t) решением задачи (28) на отрезке $[0,T]$.

От задачи (28) *к* (18). Убедимся теперь, что из доказанных фактов следует существование сильного (по t) решения задачи (18). Следуя обратному ходу преобразований (см. (21)), введем по сильному решению $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi\,(t,x)$ задачи (28) функции $\vec{v}\,(t,x)$ и $p\,(t,x)$:

$$\vec{v}(t,x) = \vec{w}(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right),$$

$$\text{так как } \vec{w}(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\right), \quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)\right),$$

$$p_1|_\Gamma = g\rho_0(0)v_3|_\Gamma + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_3|_\Gamma = g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma + \\ + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma \in C\left([0,T]\,;H_0\right),$$

Следовательно, $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in \left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)$, и с учетом (24)

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x) \in \left([0,T];\vec{G}(\Omega,\rho_0)\right),$$

Начальные условия задачи (28) порождают начальные условия задачи (18):

$$v_3(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \in H_0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{w} + \rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0).$$

От задачи (18) *к* (13). Опираясь на доказанные факты выше, учитывая связи (15), (16), легко проверить, что при условиях теоремы задача (13) имеет сильное (по t) решение в смысле определения 2.

В заключение отметим, что

$$\mathcal{F} = \left(P_0\psi_0, C^{-1/2}P_{H_0}F_f\right)^t \in C\left([0,T];\mathcal{H}\right) \iff$$

$$\iff \quad P_0\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right), \quad C^{-1/2}P_{H_0}F_f \in C\left([0,T];H_0\right) \iff$$

$$\iff \quad P_0\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right), \quad P_{H_0}F_f \in C\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right) \iff$$

$$\iff \quad P_0\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right), \quad P_{h,S}\psi_0 = \rho_0^{-1}\nabla F \in C\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right).$$

С учетом отделенного тривиального соотношения (24), получаем

$$\psi_0 \in C\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right).$$

Последнее верно, тогда и только тогда, когда (см. (17)) $f(t) \in C\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right)$. □

Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и уточнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краусс В.К. *Внутренние волны.* Л.: Гидрометеоиздат. 1968. 272 с.
2. Тернер Дж. *Эффекты плавучести в жидкостях.* М.: Мир. 1977. 431 с.
3. Каменкович В.М. *Основы динамики океана.* Л.: Гидрометеоиздат. 1973. 240 с.
4. Миропольский Ю.З. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане.* Л.: Гидрометеоиздат. 1981. 302 с.
5. Габов С.А., Свешников А.Г. *Задачи динамики стратифицированных жидкостей.* М.: Наука. 1986. 288 с.

6. Габов С.А., Свешников А.Г. *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн.* М.: Наука. 1990. 341 с.
7. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т.26, № 5. 1986. С. 734–755.
8. Kopachevsky N.D., Tsvetkov D.O. *Oscillations of stratificated fluids* // Journal of Math Sciences (Springer). Vol. 164, № 4. 2010. P. 574–602.
9. Габов С.А. *Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией* // Дифференциальные уравнения. Т. 24, №1. 1988. С. 16–21.
10. Габов С.А. Свешников А.Г. *Математические задачи динамики флотирующей жидкости* // Итоги науки и техники, сер. Мат. анализ. Т. 28. 1990. С. 3–86.
11. Солдатов М.А. *Математические аспекты теории колебания жидкости в бассейне, частично покрытым льдом.* Диссертация на соиск. уч. степ. кандидата физ. мат. наук. Харьков. 2003. 207 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука. 1990. 341 с.
13. Бреховский Л.М., Гончаров В.В. *Введение в механику сплошных сред.* М.: Наука. 1982. 336с.
14. Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения.* Симферополь: ООО «Форма» . 2016 . 280 с.
15. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* М.:Наука. 1989. 416 с.
16. GAGLIARDO E. *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. Vol. 27. 1957. P. 284–305.
17. Копачевский Н.Д. *Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций.* Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.» . 2012. 152 с.

Николай Дмитриевич Копачевский
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. акад. Вернадского, 4,
295000, Симферополь, Россия
E-mail: kopachevsky@list.ru

Денис Олегович Цветков
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. акад. Вернадского, 4,
295000, Симферополь, Россия
E-mail: tsvetdo@gmail.com