УДК 517.927

МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

А.Г. БАСКАКОВ, Н.Б. УСКОВА

Аннотация. Изучается смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией. Она записывается с помощью дифференциального оператора с инволюцией, действующего в пространстве суммируемых с квадратом модуля на конечном промежутке функций. Строится преобразование подобия этого оператора в оператор, являющийся ортогональной прямой суммой оператора конечного ранга и операторов ранга 1. Методом исследования является метод подобных операторов. Теорема о подобии служит основанием для построения групп операторов, генератором которой является исходный оператор. Выписываются асимптотические формулы для групп операторов. Построенная группа позволяет ввести понятие слабого решения, а также описать слабые решения рассматриваемой задачи.

Она служит для обоснования метода Фурье. Устанавливается почти периодичность ограниченных слабых решений. Доказательство почти периодичности основывается на полученном асимптотическом представлении спектра дифференциального оператора с инволюцией.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, смешанная задача, группа операторов, дифференциальный оператор с инволюцией.

Mathematics Subject Classification: 34L15, 34B09, 47E05

1. Введение и основные результаты

Изучается смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} - v(s)u(t,\omega - s), \\ u(t,0) = u(t,\omega), \\ u(0,s) = \varphi(s), \\ t \in \mathcal{J}, \quad s \in [0,\omega], \end{cases} \tag{1}$$

где символом $\mathcal{J}$ обозначается один из промежутков вида $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,\beta]$, $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\infty)$. Всюду предполагается, что рассматриваемый промежуток содержит точку нуль.

A.G. Baskakov, N.B. Uskova, Fourier method for first order differential equations with involution and for groups of operators.

© Баскаков А.Г., Ускова Н.Б. 2018.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проектной части госзадания (проект 1.3464.2017/4.6). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00197).

Поступила 29 июня 2017 г.

Наряду с однородной задачей (1) рассматривается соответствующая неоднородная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} - v(s)u(t,\omega - s) + f(t,s), \\ u(t,0) = u(t,\omega), \\ u(0,s) = \varphi(s), \\ t \in \mathcal{J}, \quad s \in [0,\omega]. \end{cases} \tag{2}$$

Для постановки задачи введем в рассмотрение следующие функциональные пространства. Символом $L_2 = L_2[0,\omega]$ обозначено гильбертово пространство измеримых по Лебегу на $[0,\omega]$ со значениями в $\mathbb{C}$ суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение в L_2 задается формулой

$$(x,y) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)\overline{y(s)}\,ds, \quad x, y \in L_2,$$

и норма порождается этим скалярным произведением.

Пространство L_2 изометрически изоморфно гильбертову пространству $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ периодических периода ω, определенных на всей оси $\mathbb{R}$ суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$ комплексных функций. В дальнейшем каждая функция $x \in L_2$ будет отождествляться с ее периодическим периода ω продолжением на $\mathbb{R}$.

Через $W_2^1 = W_2^1[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из L_2 с производными из L_2 и скалярным произведением $(x,y)_{W_2^1} = (x,y) + (x',y')$, x, $y \in W_2^1$.

Далее символом $\mathrm{End}\,\mathcal{H}$ обозначена банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, с нормой $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$, $X \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$. Введем в рассмотрение двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из алгебры $\mathrm{End}\,\mathcal{H}$. Через $\|X\|_2$ обозначим норму оператора Гильберта-Шмидта $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т. е. $\|X\|_2 = (\mathrm{tr}\,(XX^*))^{1/2}$. Здесь $\mathrm{tr}\,(XX^*)$ — след оператора XX^*, принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов из $\mathrm{End}\,\mathcal{H}$ (см. [1]) с нормой $\|X\|_1 = \mathrm{tr}\,(XX^*) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} s_n$, где (s_n) — последовательность s-чисел оператора X. Формула $(X,Y) = \mathrm{tr}\,(XY^*)$, X, $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, задает скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

В статье предполагается, что потенциал v принадлежит пространству L_2. В дальнейшем, символом $C(\mathcal{J},L_2)$ обозначим линейное пространство функций $u : \mathcal{J} \times [0,\omega] \to \mathbb{C}$ со следующими свойствами. При фиксированном $t \in \mathcal{J}$ функция $s \mapsto u(t,s)$ принадлежит пространству L_2. Кроме того, предполагается непрерывность функции

$$\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2, \quad \widetilde{u}(t)(s) = u(t,s), \quad t \in \mathcal{J}, \quad s \in [0,\omega].$$

Если $\mathcal{J}$ — конечный промежуток, то пространство $C(\mathcal{J},L_2)$ является банаховым. В этом случае в качестве нормы берется величина $\|u\|_\infty = \max\limits_{t\in\mathcal{J}} \|\widetilde{u}(t)\|_2$. Функцию $\widetilde{u}$ назовем ассоциированной с функцией u, и они будут отождествляться.

Всюду в рассматриваемой неоднородной задаче (2) функция $f : \mathcal{J}\times[0,\omega] \to \mathbb{C}$ считается принадлежащей пространству $C(\mathcal{J},L_2)$.

Отметим серию работ [2]–[5], в которых смешанная задача (1) рассматривалась с гладким потенциалом $v : [0,\omega] \to \mathbb{C}$. В этих работах резольвентным методом (с помощью контурного интегрирования) рассматривалась задача обоснования метода Фурье для однородной задачи (1). Также изучалась асимптотика собственных значений и равносходимость спектральных разложений для дифференциального оператора L, определяемого задачей (1). Мы определим этот оператор несколько позже.

Дифференциальные операторы второго порядка с инволюцией изучались в статьях[6]–[8]. В работе [8] приведен полный библиографический обзор результатов по равносходимости спектральных разложений для операторов первого и второго порядка с инволюцией.

Качественный анализ решений краевых задач для уравнений первого и второго порядка с инволюцией приводился в [9]–[13]. Свойства базисности корневых функций рассматривались в [14]. Оператор, порожденный дифференциальным выражением второго порядка с инволюцией при производной, изучался в [15], [16].

Спектральные свойства оператора L (асимптотика собственных значений и оценки равносходимости спектральных разложений) для системы дифференциальных уравнений с инволюцией были получены методом подобных операторов в [17]. В данной работе методом исследования также является метод подобных операторов. Отметим также статьи [18]–[22], в которых развивался метод подобных операторов.

Операторы с инволюцией возникают в теории фильтрации, теории прогнозирования и при изучении субгармонических колебаний [23]–[26].

Задачи (1) и (2) в гильбертовом пространстве L_2 записываются соответственно в виде

$$\widetilde{u}'_t = L\widetilde{u}, \quad \widetilde{u}(0) = \varphi, \tag{3}$$

$$\widetilde{u}'_t = L\widetilde{u} + \widetilde{f}, \quad \widetilde{u}(0) = \varphi. \tag{4}$$

Оператор $L : D(L) \subset L_2 \to L_2$, из уравнений (3), (4), задается формулой

$$(Ly)(s) = \frac{dy(s)}{ds} - v(s)y(\omega - s), \quad s \in [0, \omega]. \tag{5}$$

Его область определения $D(L)$ задается периодическими краевыми условиями

$$D(L) = \{y \in W_2^1 : y(0) = y(\omega)\}. \tag{6}$$

Сформулируем определения, связанные с понятием решений рассматриваемых задач Коши (1), (2).

Определение 1. *([27]) Классическим решением задачи (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $u : \mathcal{J} \times [0, \omega] \to \mathbb{C}$, принадлежащая пространству $C(\mathcal{J}, L_2)$, такая, что ассоциированная с ней функция $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2$ является непрерывно дифференцируемой, для любого $t \in \mathcal{J}$ удовлетворяет условию $\widetilde{u}(t) \in D(L)$ и уравнению (4).*

Определение 2. *([27, § 3.1]) Функция $u \in C(\mathcal{J}, L_2)$ называется слабым решением (mild solution) задачи (4), если $\int_0^t \widetilde{u}(s)\, ds \in D(L)$ для любого $t \in \mathcal{J}$ и*

$$\widetilde{u}(t) = \varphi + L\int_0^t \widetilde{u}(s)\, ds + \int_0^t \widetilde{f}(s)\, ds, \quad t \in \mathcal{J},$$

где интегралы Римана рассматриваются для непрерывных функций, определенных на $\mathcal{J}$ со значением в гильбертовом пространстве L_2.

Из определения 1 естественным образом следует

Определение 3. *Классическим решением задачи (1), где $\varphi \in W_2^1$, называется функция $u : \mathcal{J} \times [0, \omega] \to \mathbb{C}$, принадлежащая пространству $C(\mathcal{J}, L_2)$, такая, что ассоциированная с ней функция $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2$ является непрерывно-дифференцируемой и удовлетворяет задаче (1).*

Определение 4. *Функция $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2$ называется слабым решением (mild solution) задачи (1), если она является равномерным пределом (на каждом конечном промежутке из $\mathcal{J}$) классических решений $(\widetilde{u}_n)$, $n \geqslant 1$, для которых $\widetilde{u}_n(0) = \varphi_n \in W_2^1$, $n \geqslant 1$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.*

Определение 5. *Говорят, что задача (1) равномерно корректна, если для любого начального условия $\varphi \in L_2$ существует единственное слабое решение $x \in C(\mathcal{J}, L_2)$, удовлетворяющее условию $\widetilde{x}(0) = \varphi$.*

Близкое определение корректной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с постоянным операторным коэффициентом дано в монографии [28, Гл. II, § 3]. Отметим, что определение равномерно корректной разрешимости задачи (1) эквивалентно тому, что оператор L является генератором сильно непрерывной группы операторов.

Решающую роль в данной статье для обоснования метода Фурье для уравнения с инволюцией будет иметь использование теории полугрупп операторов.

Теорема 1. *Задача (1) равномерно корректна. Дифференциальный оператор L является генератором некоторой сильно непрерывной группы операторов*

$$T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2.$$

Каждое классическое решение $u \in C(\mathcal{J}, L_2)$ задачи (1) задается формулой

$$u(t,s) = (T(t)\varphi)(s), \quad s \in [0,\omega], \quad t \in \mathcal{J}, \tag{7}$$

где $\varphi \in W_2^1$ и $\varphi(0) = \varphi(\omega)$. Каждое слабое решение записывается в виде (7), где $\varphi \in L_2$.

Благодаря применению метода подобных операторов, теорема 1 далее будет существенно усилена (теоремы 6 – 8). Следует отметить, что теорема 1 (по крайней мере для ограниченной функции v) может быть получена на основе общих теорем о возмущенных полугруппах (группах) операторов (см. [29], [30]).

Замечание 1. *Из* [27, Proposition 3.1.16] *следует, что любое слабое решение $u \in C(\mathcal{J}, L_2)$ задачи (2), записанной в виде (4), допускает представление*

$$\widetilde{u}(t) = T(t-t_0)\widetilde{u}(t_0) - \int_{t_0}^{t} T(t-\tau)\widetilde{f}(\tau)\, d\tau, \quad t, t_0 \in \mathcal{J}, \tag{8}$$

где $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2$ — группа операторов из теоремы 1, генератором которой является оператор L.

Из замечания 1 вытекает, что следующее определение классического решения эквивалентно определению 1.

Определение 6. *Классическим решением задачи (2) называется функция $u \in C(\mathcal{J}, L_2)$, удовлетворяющая равенству (8) (интегральному уравнению), такая, что $\widetilde{u}(t) \in D(L) \subset W_2^1$.*

Таким образом, для классического решения выполняется равенство (4).

Теорема 2. *Задача Коши (2) имеет единственное слабое решение $x \in C(\mathcal{J}, L_2)$ такое, что ассоциированная с ним функция $\widetilde{x}$ представима в виде*

$$\widetilde{x}(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-\tau)\widetilde{f}(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathcal{J}.$$

Утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1 и определения 6.

В дальнейшем в статье систематически используются приводимые ниже определение и свойства подобных операторов.

Определение 7. *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются* подобными, *если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ такой, что*

$$A_1 U x = U A_2 x, \quad x \in D(A_2), \quad U D(A_2) = D(A_1).$$

Оператор U называется оператором преобразования *оператора A_1 в A_2.*

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Соответствующее утверждение удобно формулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i, $i = 1, 2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|\mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|\widetilde{\mathcal{H}}_k$, $k = 1, 2$, при этом $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т. е. $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Im} P$ — образ проектора P, $\mathcal{H}_2 = \operatorname{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\widetilde{P} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}.$$

3) если a — собственный вектор оператора A_2, отвечающий собственному значению λ_0, то $b = Ua$ — собственный вектор оператора A_1, отвечающий тому же собственному значению λ_0.

4) если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной полугруппы (группы) операторов $T_2 : \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ (класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной полугруппы (группы) операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{J}, \quad T_1 : \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathcal{H},$$

где $\mathbb{J}$ совпадает с одним из множеств $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактное гильбертово пространство, причем оно представимо в виде прямой суммы взаимно ортогональных ненулевых замкнутых подпространств $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n, \tag{9}$$

где $\mathcal{H}_i$ ортогонально $\mathcal{H}_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, $x_n \in \mathcal{H}_n$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^2$. Такое представление пространства $\mathcal{H}$ ведет к существованию разложения единицы системой ортопроекторов $\{\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{Z}\}$. При этом проекторы $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, обладают следующими свойствами:

1) $\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$;

3) ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_n x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{P}_n x\|^2$;

3') из равенств $\mathcal{P}_k x = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ следует, что вектор x нулевой;

4) $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im}\mathcal{P}_k$, $x_k = \mathcal{P}_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что свойства 3) и 3') эквивалентны.

Определение 8. *Линейный оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $\mathcal{A}_n \in \operatorname{End}\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, относительно разложения (9), при этом используется запись*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_n, \tag{10}$$

если

1) $\mathcal{H}_n \subset D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{A}_k x_k\|^2 < \infty, x_k = \mathcal{P}_k x, k \in \mathbb{Z}\}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;

2) каждое подпространство $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, есть сужение оператора $\mathcal{A}$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3) $\mathcal{A}x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_k x_k$, $x \in D(\mathcal{A})$, *где* $x_k = \mathcal{P}_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим включение спектров $\sigma(\mathcal{A}_k) \subset \sigma(\mathcal{A})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если не делать дополнительных ограничений, то $\sigma(\mathcal{A})$ может не совпадать с объединением спектров $\sigma(\mathcal{A}_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, и даже с замыканием объединения.

Определение 9. *Разложение гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *вида*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} U\mathcal{H}_k, \tag{11}$$

где U *— обратимый оператор из* $\operatorname{End}\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{H}$ *есть ортогональная прямая сумма подпространств* $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, *вида (9) назовем квазиортогональным или* U*-ортогональным. Если оператор* U *представим в виде* $U = I + W$, *где* $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, *то квазиортогональное разложение пространства* $\mathcal{H}$ *назовем разложением Рисса.*

Отметим, что U-ортогональное разложение (11) пространства $\mathcal{H}$ является ортогональным, если в $\mathcal{H}$ ввести эквивалентное скалярное произведение вида

$$(x, y)_* = (Ux, Uy), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Определение 10. *Будем говорить, что линейный замкнутый оператор* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *является квазиортогональной (*U*-ортогональной) прямой суммой ограниченных операторов* $\widetilde{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, *относительно квазиортогонального разложения пространства* $\mathcal{H}$ *вида (11), если* $\widetilde{A}_k = UA_kU^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, *для некоторого обратимого оператора* $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$. *При этом используется запись*

$$A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{A}_k.$$

Вернемся к рассмотрению оператора L, определенного формулами (5), (6). Представим его в виде $L = L_0 - V$, где $L_0 : D(L_0) = D(L) \subset L_2 \to L_2$ — оператор дифференцирования $L_0 = \frac{d}{ds}$ и

$$(Vy)(s) = v(s)y(\omega - s). \tag{12}$$

Оператор V определен корректно ввиду включения $D(L_0) \subset D(V)$. Оператор L_0 далее будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор V — возмущения.

Рассмотрим невозмущенный оператор L_0 и опишем его спектральные свойства. Спектр $\sigma(L_0)$ оператора L_0 представим в виде

$$\sigma(L_0) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k,$$

где $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $\lambda_k = \frac{i2\pi k}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$, — простые изолированные собственные значения. Соответствующими собственными векторами являются функции $e_k(s) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}$, $s \in [0, \omega]$, $k \in \mathbb{Z}$, образующие в пространстве L_2 ортонормированный базис (с учетом введенного в L_2 скалярного произведения). Соответствующий спектральный проектор $\mathcal{P}_n = P(\sigma_n, L_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, (проектор Рисса) определяется формулой

$$(\mathcal{P}_n x)(s) = \frac{1}{\omega}\left(\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}\,d\tau\right)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s} = \widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s}, \ x \in L_2, \ s \in [0, \omega]. \tag{13}$$

Здесь $\widehat{x}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициент Фурье периодической функции $x \in L_2$, определенный формулой

$$\widehat{x}(n) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}\,d\tau.$$

Отметим, что невозмущенный оператор $L_0 = \frac{d}{ds}$ есть ортогональная прямая сумма операторов $(L_0)_k = L_0|\mathcal{H}_k = \frac{i2\pi k}{\omega}I_k$, где I_k обозначает тождественный оператор в одномерном подпространстве $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im}\mathcal{P}_k$. т. е. $L_0 = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}(L_0)_k$. При этом все операторы $(L_0)_k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют ранг 1 и представимы в виде $(L_0)_k = \lambda_k I_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\mathcal{P}_{(k)} = \sum\limits_{|i|\leqslant k} \mathcal{P}_i$, $k \geqslant 0$. Тогда оператор L_0 также есть ортогональная прямая сумма операторов

$$L_0 = (L_0)_{(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|j|>k}(L_0)_j\Big) = (L_0)_{(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|j|>k} i\frac{2\pi j}{\omega} I_j\Big), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $(L_0)_{(k)}$ — сужение оператора $L_0 = \frac{d}{ds}$ на подпространство $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im}\mathcal{P}_{(k)}$ относительно представления пространства L_2 в виде

$$L_2 = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|j|>k} \mathcal{H}_j\Big). \tag{14}$$

Отметим, что $(L_0)_{(k)} = \bigoplus\limits_{|j|\leqslant k} \frac{i2\pi j}{\omega} I_j$ относительно ортогонального разложения $\mathcal{H}_{(k)} = \bigoplus\limits_{|j|\leqslant k} \mathcal{H}_j$.

В основе всех приводимых в статье результатов и оценок лежит

Теорема 3. *Существует такое число $k \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, что оператор $L = L_0 - V$ подобен оператору $L_0 - V_0$, где оператор V_0 принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеет место равенство*

$$LU = U(L_0 - V_0),$$

и подпространства $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im}\mathcal{P}_{(k)}$ и $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im}\mathcal{P}_j$, $|j| > k$, являются инвариантными относительно операторов V_0, L_0. Более того, оператор L есть U-ортогональная прямая сумма вида

$$L = U(L_0 - \big(V_{0(k)} \oplus \bigoplus_{|j|>k} V_{0j}\big))U^{-1}$$

относительно разложения Рисса (U-ортогонального разложения) пространства $\mathcal{H} = U\mathcal{H}_{(k)} \oplus \bigoplus\limits_{|j|>k} U\mathcal{H}_j$. Обратимый оператор преобразования U из $\operatorname{End} L_2$ представим в виде $U = I + W$, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Конкретный вид операторов U и V_0 будет выписан в параграфах 3, 4, 5.

Теорема 4. *Спектр оператора L представим в виде*

$$\sigma(L) = \widetilde{\sigma}_{(k)} \cup \Big(\bigcup_{|j|>k} \widetilde{\sigma}_j\Big),$$

где множество $\widetilde{\sigma}_{(k)}$ содержит не более $2k+1$ собственных значений, множества $\widetilde{\sigma}_j$, $|j| > k$, одноточечны и $\widetilde{\sigma}_j = \{\widetilde{\lambda}_j\}$, $\widetilde{\lambda}_j = i\frac{2\pi j}{\omega} - b_j$, причем $\sum\limits_{|j|>k} |b_j|^2 < \infty$.

Соответствующие собственные векторы $\widetilde{e}_n$ образуют в пространстве L_2 базис Бари (в частности, базис Рисса) и имеет место оценка

$$\|\widetilde{e}_n - e_n\| = b_{1n}, \quad |n| > m,$$

где $\sum\limits_{|n|>m} b_{1n}^2 < \infty$.

В работе [5] приводятся уточненные формулы собственных значений и собственных векторов оператора L в случае гладкого на отрезке $[0,1]$ потенциала v такого, что $v(0) = v(1)$.

В статье [17] были получены оценки взвешенных средних собственных значений из множеств σ_n, $|n| > m$, и оценки отклонений $\operatorname{dist}(i\frac{2\pi j}{\omega}, \widetilde{\sigma}_j)$.

Отметим, что излагаемые в данной работе свойства дифференциальных операторов с инволюцией существенно отличаются от спектральных свойств дифференциальных операторов [31], [32].

Следующая теорема формулируется в условиях теорем 3 и 4 с введенными в теореме 4 обозначениями.

Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}_{(k)} = P(\widetilde{\sigma}_{(k)}, L)$, $k \geqslant 0$, $\widetilde{\mathcal{P}}_n = P(\widetilde{\lambda}_n, L)$, $|n| > m$, — спектральные проекторы, построенные по спектральным множествам $\widetilde{\sigma}_{(k)}$ и $\widetilde{\sigma}_j$, $|j| > k$, соответственно.

Теорема 5. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\mathcal{P}}_{(k)} + \sum_{|j|=k+1}^{n} \widetilde{\mathcal{P}}_j - \mathcal{P}_{(k)} - \sum_{|j|=k+1}^{n} \mathcal{P}_j\|_2 = 0.$$

Следующая теорема существенно усиливает результат теоремы 1.

Теорема 6. *Дифференциальный оператор L является генератором сильно непрерывной группы операторов*

$$T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2.$$

Группа $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2$ подобна группе $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2$, которая допускает ортогональное разложение вида

$$\widetilde{T}(t) = \bigoplus_{j=-\infty}^{-k-1} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega} - b_j)I_j t} \oplus e^{B_{(k)}t} \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega} - b_j)I_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

относительно разложения пространства L_2 вида (14), для некоторого целого $k \geqslant 0$, причем $T(t) = U\widetilde{T}(t)U^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Более того, оператор преобразования $U \in \operatorname{End} L_2$ группы $\widetilde{T}$ в группу T представим в виде $U = I + W$, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператор $B_{(k)}$ принадлежит $\operatorname{End} \mathcal{H}_{(k)}$ и $\sum_{|j|>k} |b_j|^2 < \infty$.

Таким образом, группа операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, допускает U-ортогональное разложение относительно U-ортогонального разложения пространства L_2 вида (11). Число k из теоремы 6 будет определено далее в § 4, теореме 16.

Пусть $\psi = U^{-1}\varphi$ и функция ψ раскладывается в ряд Фурье $\psi(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s}$, $s \in [0, \omega]$. Очевидно, что $\mathcal{P}_j\psi = \widehat{\psi}(j)e_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Определение 11. *Представление группы операторов (слабых решений) вида*

$$\begin{aligned} T(t)\varphi = U\widetilde{T}(t)U^{-1}\varphi = \sum_{j=-\infty}^{-k-1} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega} - b_j)t} U\mathcal{P}_j\psi + \\ + Ue^{B_{(k)}t}\mathcal{P}_{(k)}\psi + \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega} - b_j)t} U\mathcal{P}_j\psi \end{aligned} \tag{16}$$

назовем рядом Фурье слабого решения $u(t, s) = (T(t)\varphi)(s)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0, \omega]$, $\varphi \in L_2$, задачи (1).

Непосредственно из представления (15) теоремы 6 получаем, что имеет место

Теорема 7. *Группа $\widetilde{T}$ допускает представление вида*

$$\widetilde{T}(t) = e^{B_{(k)}t}\mathcal{P}_{(k)} + \sum_{|j|\geqslant k+1} e^{(i\frac{2\pi j}{\omega} - b_j)t}\mathcal{P}_j.$$

Рассмотрим последовательности чисел $\beta_l = \|\mathcal{P}_l W\|_2$, $\alpha_l = \sup_{|j|\geqslant l} |b_j|$, $l \in \mathbb{Z}$. Они обладают свойствами: $\lim_{l\to\infty} a_l = 0$ и (β_l) — суммируемая с квадратом последовательность.

Из представления решения в виде (16) следует

Теорема 8. *Для любой функции $\varphi \in L_2$ имеют место оценки*

$$\|T(t)\varphi - Ue^{B_{(k)}t}\mathcal{P}_{(k)}\psi - \sum_{k\leqslant|j|\leqslant N} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega}-b_j)t}U\mathcal{P}_j\psi(j)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{|j|\geqslant N+1} e^{2b_j|t|}(|\widehat{\psi}(j)|^2 + \beta_j^2\|\psi\|^2)\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{\alpha_{N+1}|t|}\Big(\sum_{|j|\geqslant N+1}(|\widehat{\psi}(j)|^2 + \beta_j^2\|\psi\|^2)\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad t\in\mathbb{R},$$

для $N > k$ и некоторой постоянной $C > 0$.

Наличие группы операторов T позволяет корректно определить оператор $\frac{d}{dt} - L$ в ряде функциональных пространств. Символом $C_b = C_b(\mathcal{J}, L_2)$ обозначено банахово пространство непрерывных ограниченных на $\mathcal{J}$ функций со значениями в L_2 и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathcal{J}}\|x(t)\|_2$, $x \in C_b$. Из теоремы 4 следует, что $\sigma(L)\cap i\mathbb{R}$ есть не более чем счетное множество, не имеющее конечных предельных точек. Поэтому непосредственно из [33] следует

Теорема 9. *Каждое слабое ограниченное решение $\widetilde{u} \in C_b$ задачи (1) является почти периодической функцией Бора (см.* [34]*).*

Далее и до конца параграфа предполагается, что $\mathcal{J}$ совпадает с одним из множеств $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$.

Определение 12 ([35], [36])**.** *Функция $x_0 \in C_b$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $\lim\limits_{|s|\to\infty}\|x_0(t+s) - x_0(s)\|_2 = 0$.*

Определение 13 ([35], [36])**.** *Равномерно непрерывная функция $x \in C_b$ называется почти периодической на бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать (обобщенный) тригонометрический многочлен вида $\varphi_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathcal{J}$, где x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — медленно меняющиеся на бесконечности функции и λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — вещественные числа, такой, что*

$$\sup_{t\in\mathcal{J}}\|x(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Символом $C_0 = C_0(\mathcal{J}, L_2)$ обозначим пространство функций, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty}\|x(t)\|_2 = 0$, $x \in C_0$. Непосредственно из статьи [35, Теорема 6.3] следует

Теорема 10. *Пусть $\widetilde{u} \in C_0$ — слабое решение неоднородной задачи (2) и $\widetilde{f} \in C_0$. Тогда $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2$ является почти периодической на бесконечности.*

2. Метод подобных операторов

Отметим, что метод подобных операторов обычно используется в спектральном анализе различных классов дифференциальных (см. [37] – [40]) и разностных (см. [41], [42]) операторов. В изложении метода мы будем опираться на работы [21], [22].

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения, действующий в комплексном (абстрактном) гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Введем в рассмотрение линейное пространство $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$, и подчиненных оператору $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Будем говорить, что оператор $B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ подчинен оператору A, если $D(B) \supset D(A)$ и конечна величина

$\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$. Эта величина принимается за норму оператора $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Таким образом, $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ — банахово пространство.

Рассмотрим возмущенный абстрактный оператор $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, и спектральные свойства линейного замкнутого оператора A известны.

Определим трансформатор (т. е. линейный оператор в пространствах операторов; терминология М.Г. Крейна) $\mathrm{ad}_A : D(\mathrm{ad}_A) \subset \mathrm{End}\,\mathcal{H} \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ формулой

$$\mathrm{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\mathrm{ad}_A),$$

с областью определения $D(\mathrm{ad}_A)$, состоящей из операторов $X \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$, обладающих свойствами:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $\mathrm{ad}_A X : D(A) \to \mathcal{H}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{H}$ и полагается $\mathrm{ad}_A X = Y$ (такое расширение единственно).

Наиболее важным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки.

Определение 14 ([21], [22]). *Пусть $\mathcal{M}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\Gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ — трансформаторы. Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем* допустимой тройкой *для оператора A, а $\mathcal{M}$ —* пространством допустимых возмущений*, если:*

1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leqslant C\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$;

2) J и Γ — ограниченные линейные операторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеют место равенства

$$(\mathrm{ad}_A \Gamma X)x = (X - JX)x, \quad x \in D(A), \quad X \in \mathcal{M},$$

и $\Gamma X \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ — единственное решение уравнения

$$\mathrm{ad}_A Y = AY - YA = X - JX,$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

5) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$;

6) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon$.

Теперь зафиксируем некоторую допустимую тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A.

Теорема 11 ([21], [22]). *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ тройка и B — некоторый оператор из $\mathcal{M}$. Тогда, если*

$$4\|J\|\|B\|_*\gamma < 1, \tag{17}$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{18}$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций, положив $X_0 = 0$, $X_1 = B, \ldots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$. Отображение $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_* \leqslant 3\|B\|_*\}$.

Из леммы 1 и теоремы 11 следует (далее используются обозначения теоремы 11)

Теорема 12 ([22]). *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, оператор $B \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию (17) и оператор $A - JX_*$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$. Тогда оператор $A - B$ является генератором группы операторов $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, определенной равенствами:*

$$T(t) = (I + \Gamma X_*)\widetilde{T}(t)(I + \Gamma X_*)^{-1}, \quad t \geqslant 0,$$

где X_* — решение уравнения (18).

Часто бывает сложно построить пространство допустимых возмущений, содержащее рассматриваемое возмущение. В таком случае осуществляется предварительное преобразование подобия исследуемого оператора в оператор, возмущение которого принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathcal{M}$ из некоторой допустимой тройки $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$. Такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

Предположение 1 ([22]). *Для оператора $C \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ существуют операторы ΓC, $JC \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, удовлетворяющие условиям:*

1) $\Gamma C \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ и $\|\Gamma C\| < 1$;
2) $(\Gamma C)D(A) \subset D(A)$;
3) $C\Gamma C$, $(\Gamma C)JC \in \mathcal{M}$;
4) $A(\Gamma C)x - (\Gamma C)Ax = Cx - (JC)x$, $x \in D(A)$;
5) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|C(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 13 ([22]). *При выполнении условий предположения 1 оператор $A - C$ подобен оператору $A - JC - C_0$, где $C_0 = (I + \Gamma C)^{-1}(C\Gamma C - (\Gamma C)JC)$, причем имеет место равенство*

$$(A - C)(I + \Gamma C) = (I + \Gamma C)(A - JC - C_0).$$

Пусть невозмущенный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является кососамосопряженным оператором, и его спектр $\sigma(A)$ допускает представление вида

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k,$$

где Δ_k, $k \in \mathbb{Z}$, — компактные взаимно непересекающиеся множества. Пусть P_k, $k \in \mathbb{Z}$, — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_k, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда система проекторов $\{P_k, k \in \mathbb{Z}\}$ и система подпространств $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют свойствам, перечисленным после леммы 1.

Зафиксируем теперь допустимую для оператора A тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$, в которой трансформатор $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ определен корректно с помощью формулы

$$JX = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k X P_k, \quad X \in \mathcal{M}.$$

Таким образом, каждый из операторов JX, $X \in \mathcal{M}$, является ортогональной прямой суммой операторов $X_k = P_k X|\mathcal{H}_k$, $X_k \in \operatorname{End}\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Более того (что очень важно), таким же свойством обладает оператор $A - JX$, причем

$$A - JX = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (A_k - X_k), \tag{19}$$

где $A_k = A|\mathcal{H}_k$ — сужение оператора A на $\mathcal{H}_k$.

Теорема 14. *В условиях теоремы 12 оператор $A - B$, где $B \in \mathcal{M}$, подобен оператору $A - JX_*$, $X_* \in \mathcal{M}$, являющемуся ортогональной прямой суммой операторов (19), где $X = X_*$, относительно ортогонального разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (9), где $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Оператор $A - B$ является квазиортогональной прямой суммой ограниченных операторов относительно квазиортогонального разложения пространства H вида (9), где U — оператор преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$.*

Обозначим оператор $A - JX_*$ через A_0. Для операторов A_0 вида (19) имеет место следующая

Лемма 2. *Для того чтобы оператор A_0 вида (19) был генератором некоторой сильно непрерывной группы $T_0 : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sup_{|t|\leqslant b}\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|e^{A_{0,n}t}\|_{\operatorname{End}\mathcal{H}_n} = C(b) < c < \infty, \tag{20}$$

где $b \geqslant 1$. Если условие (20) выполнено, то операторы $T_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, представимы в виде ортогональной прямой суммы

$$T_0(t) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} e^{A_{0,n}t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

относительно разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (9).

Доказательство. Если выполнено условие (20), то формула

$$T_0(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{A_{0,n}t}P_n x, \quad t \in \mathbb{R},$$

определяет ограниченный оператор, что следует из равенства Парсеваля и оценки

$$\|T_0(t)x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|e^{A_{0,n}t}P_n x\|^2 \leqslant C^2(b)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|P_n x\|^2 = C^2(b)\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}, \quad |t| \leqslant b.$$

Непосредственно проверяется, что операторы $T_0(t) \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, образуют группу операторов. Ввиду того, что она сильно непрерывна на плотном подпространстве векторов, представимых в виде $x = \sum\limits_{|n|\leqslant m} P_n x$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то она сильно непрерывна на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана. □

Таким образом, построение группы операторов, для исходного оператора сводится к построению группы операторов для оператора, являющегося прямой ортогональной суммой операторов относительно разложения (19) с использованием леммы 2.

3. Первое преобразование подобия

Далее в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ в методе подобных операторов будем использовать пространство $\mathfrak{S}_2(L_2)$, а в качестве системы проекторов $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, — систему спектральных проекторов невозмущенного оператора L_0 (см. формулу (13)).

Здесь и далее символом $\mathcal{H}$ будет обозначаться гильбертово пространство L_2.

Далее будут использоваться матрицы операторов двух видов: операторные и числовые. Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие операторную матрицу $X \sim (X_{ij})$, где $X_{ij} = \mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и проекторы $\mathcal{P}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, определены формулой (13).

Числовая матрица $X \sim (x_{ij})$ состоит из элементов x_{ij}, $i, j \in \mathbb{Z}$, которые определяются формулой $x_{ij} = (Xe_j, e_i)$, и в качестве базиса e_i, $i \in \mathbb{Z}$, берутся собственные нормированные векторы невозмущенного оператора L_0.

Далее будут использоваться следующие свойства идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (см. [1]):

1) Оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда его матрица $x_{kn} = (Xg_n, g_k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$, является матрицей Гильберта-Шмидта для некоторого ортонормированного базиса $\{g_k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{k,n\in\mathbb{Z}} |x_{kn}|^2$.

2) Произведение XY операторов $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является ядерным оператором и $\|XY\|_1 \leqslant \|X\|_2\|Y\|_2$.

3) Пусть $\{Q_n, n \geqslant 0\}$ — система ортопроекторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$, образующая разложение единицы, тогда $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} \|Q_n X Q_m\|_2^2$.

4) Пусть оператор $X : D(X) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ (и, следовательно, имеет плотную в $\mathcal{H}$ область определения $D(X)$). Если конечна величина $\sum\limits_{n,k\in\mathbb{Z}} |(Xe_n, e_k)|^2$, для некоторого ортонормированного базиса $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ со свойством $e_k \in D(X)$, $k \in \mathbb{Z}$, то оператор X допускает единственное расширение на $\mathcal{H}$. Оно является оператором Гильберта-Шмидта и будет обозначаться тем же символом X.

Понятие операторной матрицы естественным образом расширяется и на операторы, подчиненные оператору L_0 (не обязательно ограниченные).

Каждому оператору $X : D(A) \subset L_2 \to L_2$, $X \in \mathfrak{L}_{L_0}(\mathcal{H})$, поставим в соответствие операторную матрицу (X_{ij}), $i, j \in \mathbb{Z}$, составленную из ограниченных операторов $X_{ij} = \mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

Заметим также, что в рассматриваемом случае ($\dim \operatorname{Im} P_j = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}$):

$$X_{ij}x = (P_i X P_j)x = (XP_j x, e_i)e_i = (Xe_i, e_j)(x, e_j)e_i = (x_{ij})\widehat{x}(j)e_i, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Оператор V, определенный формулой (12), подчинен оператору L_0 и имеет матрицу (V_{kn}) относительно разложения единицы $(\mathcal{P}_k, k \in \mathbb{Z})$, элементы которой определяются формулами

$$(V_{ln}x)(s) = (Ve_l, e_n)\widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} v(\tau)e^{-i\frac{2\pi l}{\omega}(\omega-\tau)}\,d\tau \cdot \widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s} =$$
$$= \widehat{v}(l+n)\widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s}.$$

Таким образом, операторная матрица оператора V имеет вид:

$$V \sim \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \widehat{v}(-2) & \widehat{v}(-1) & \widehat{v}(0) & \widehat{v}(1) & \dots \\ \dots & \widehat{v}(-1) & \widehat{v}(0) & \widehat{v}(1) & \widehat{v}(2) & \dots \\ \dots & \widehat{v}(0) & \widehat{v}(1) & \widehat{v}(2) & \widehat{v}(3) & \dots \\ \dots & \widehat{v}(1) & \widehat{v}(2) & \widehat{v}(3) & \widehat{v}(4) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Далее через $\mathcal{P}_{(m)}$ обозначается проектор $\mathcal{P}_{(m)} = \sum\limits_{|i|\leqslant m} \mathcal{P}_i$. Введем в рассмотрение операторы $J_m V$, $\Gamma_m V$, $m \geqslant 0$, формулами:

$$JV = J_0 V = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_i V \mathcal{P}_i,$$

$$J_m V = \mathcal{P}_{(m)} V \mathcal{P}_{(m)} + \sum_{|i|>m} \mathcal{P}_i V \mathcal{P}_i, \quad m \geqslant 0,$$

$$\Gamma V = \Gamma_0 V = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \widetilde{V}_n, \qquad \widetilde{V}_n = \sum_{k-j=n} \frac{\mathcal{P}_k V \mathcal{P}_j}{k-j},$$

$$\Gamma_m V = \Gamma V - \mathcal{P}_{(m)}(\Gamma V)\mathcal{P}_{(m)}.$$

Матрицы операторов JV и ΓV относительно разложения единицы $(\mathcal{P}_k, k \in \mathbb{Z})$ имеют вид:

$$JV \sim \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \widehat{v}(-2) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \widehat{v}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \widehat{v}(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\Gamma V \sim \frac{\omega}{2\pi i}\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -\widehat{v}(-1) & -\frac{1}{2}\widehat{v}(0) & -\frac{1}{3}\widehat{v}(1) & \dots \\ \dots & \widehat{v}(-1) & 0 & -\widehat{v}(1) & -\frac{1}{2}\widehat{v}(2) & \dots \\ \dots & \frac{1}{2}\widehat{v}(0) & \widehat{v}(1) & 0 & -\widehat{v}(3) & \dots \\ \dots & \frac{1}{3}\widehat{v}(1) & \frac{1}{2}\widehat{v}(2) & \widehat{v}(3) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения операторов J_mV и Γ_mV, $m \geqslant 0$, следует, что они принадлежат $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Они определены корректно, т. е. ряды, определяющие эти операторы, сходятся $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для предварительного преобразования подобия нам потребуются еще операторы $Z_m = V\Gamma_mV$, $m \geqslant 0$. Элементы операторной матрицы оператора $Z = V\Gamma V$ определяются формулой

$$Z_{ij} = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq j}\frac{\widehat{v}(i+k)\widehat{v}(k+j)}{j-k}, \quad i,j \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 3. *Операторы J_mV, Γ_mV и $V\Gamma_mV$, $m \geqslant 0$, являются операторами из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Осталось показать, что $Z \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Его принадлежность пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует из приводимого в [17], [21] интегрального представления оператора $Z = V\Gamma V$ вида

$$(Zy)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\Big(\frac{s-\tau}{2}\Big)\widehat{v}\Big(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\Big)v(s)y(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

где функция f определена следующим образом $f(s) = i\Big(s - \frac{\omega}{2}\Big)$. □

Пусть $L_\infty([0,\omega],\mathbb{C})$ — банахово пространство (классов) функций, существенно ограниченных на $[0,\omega]$ функций со значениями в $\mathbb{C}$ и нормой $\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup\limits_{s\in[0,\omega]}\|x(s)\|$.

Лемма 4. *Операторы Γ_mV, $m \in \mathbb{Z}_+$, обладают свойствами:*
1) $(\Gamma_mV)D(L_0) \subset D(L_0)$;
2) $L_0(\Gamma_mV)x - (\Gamma_mV)L_0x = (V - J_mV)x$, $x \in D(L_0)$;
3) Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$ такое, что $\|V(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2 < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$. Рассмотрим последовательность проекторов $Q_{(n)} = \sum\limits_{|j|\leqslant n} P_j$, $n \geqslant 0$. Для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ имеют место равенства (проверяемые на базисных векторах):

$$\begin{aligned} Q_{(n)}L_0(\Gamma_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y = Q_{(n)}(\Gamma_mV)L_0(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y+ \\ + Q_{(n)}(V-J_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y = Q_{(n)}\mathcal{L}y, \end{aligned}$$

где оператор $\mathcal{L}$ представим в виде

$$\mathcal{L}y = (\Gamma_mV)L_0(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y + (V-J_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y.$$

Так как оператор $\mathcal{L}$ является оператором из $\operatorname{End}\mathcal{H}$, то последовательность операторов из правой части сходится к оператору $\mathcal{L}$ по норме пространства $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Из замкнутости оператора L_0 следует, что $\Gamma_mVx \in D(L_0)$ при $x \in D(L_0)$ и имеет место равенство

$$(\Gamma_mV)L_0(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1} = L_0(\Gamma_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1} + (V-J_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}.$$

Таким образом, выполнены свойства 1) и 2).

Осталось проверить свойство 3). Пусть $Y = V(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}$, $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$. В этом представлении оператора Y мы рассматриваем его как произведение двух операторов $(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $V_\infty : L_\infty([0,\omega],\mathbb{C}) \to L_2$, $(V_\infty x)(s) = (Vx)(s)$, $s \in [0,\omega]$, $x \in L_\infty([0,\omega],\mathbb{C})$. Ясно, что $\|V\|_\infty = \|v\|_{L_2}$. Осталось доказать, что $\|(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon/\|v\|_{L_2}$

для числа λ_ε вида $\lambda_\varepsilon = k$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ и выбранного $\varepsilon > 0$. Для любой функции $x \in \mathcal{H}$ имеет место представление

$$(L_0 - kI)^{-1}x = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{x}(l)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s}}{\frac{i2\pi l}{\omega} - k}.$$

Поэтому

$$\|(L_0 - kI)^{-1}x\|_{L_2} \leqslant \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 + \left(\frac{2\pi l}{\omega}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon\|x\|_2}{\|V\|_{L_2}}$$

для достаточно большого k.

Следовательно, доказано свойство $\|(L_0 - kI)^{-1}x\|_2 \leqslant \varepsilon/\|v\|_{L_2}$. Таким образом $\|V(L_0 - kI)^{-1}\| \leqslant \|v\|_{L_2}\|(L_0 - kI)^{-1}\| < \varepsilon$. Лемма доказана. □

В следующей теореме (основном результате этого параграфа) будет использоваться

Лемма 5. $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Gamma_m V\|_2 = \lim\limits_{m\to\infty} \|\Gamma V - P_{(m)}(\Gamma V)P_{(m)}\| = 0.$

Доказательство. Поскольку оператор ΓV является оператором Гильберта-Шмидта, то непосредственно из определения последовательности ортопроекторов $P_{(m)}$, $m \geqslant 0$, следует утверждение леммы. □

Из полученных утверждений относительно последовательности операторов $J_m V$, $\Gamma_m V$, $m \geqslant 0$, и теоремы 13 следует, что имеет место

Теорема 15. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\|\Gamma_m V\|_2 < 1$ (т. е. оператор $I + \Gamma_m V$ обратим), и оператор $L_0 - V$ подобен оператору $L_0 - \widetilde{V}$, где*

$$\widetilde{V} = J_m V + (I + \Gamma_m V)^{-1}(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{P}), \tag{22}$$

причем имеет место равенство

$$(L_0 - V)(I + \Gamma_m V) = (I + \Gamma_m V)(L_0 - \widetilde{V}).$$

Оператор $\widetilde{V}$ представим в виде

$$\widetilde{V} = J_m V + V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V + C = JV + V\Gamma V - (\Gamma V)JV + C_1, \tag{23}$$

где C, $C_1 \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Осталось доказать формулу (23). Из представления

$$\begin{aligned}(I + \Gamma_m V)^{-1}(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V) = (I + \Gamma_m V)^{-1}(\Gamma_m V)(V\Gamma_m V-\\ - (\Gamma_m V)J_m V) + V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V\end{aligned}$$

и того, что произведение двух операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть оператор из $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, вытекает первая часть равенства (23). Так как операторы $V\Gamma_m V - V\Gamma V$, $J_m V - JV$, $\Gamma_m V - \Gamma V$ имеют конечный ранг, то они принадлежат $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и имеет место вторая часть формулы (23). Теорема доказана. □

4. Построение трансформаторов J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$

Из теоремы 15 следует, что исследуемый дифференциальный оператор с инволюцией подобен оператору $L_0 - \widetilde{V}$, где оператор $\widetilde{V}$, определенный формулой (22), принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В дальнейшем (см. § 5) к оператору $L_0 - \widetilde{V}$ будет применяться метод подобных операторов (см. теорему 3). При этом будет существенно использоваться последовательности трансформаторов

$$J_k, \Gamma_k : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad k \geqslant 0.$$

Эти трансформаторы определим следующими формулами для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$:

$$\begin{gathered} JX = JX_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_n X \mathcal{P}_n, \\ J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{|j|>k} \mathcal{P}_j X \mathcal{P}_j, \quad k \geqslant 1, \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \Gamma X = \Gamma_0 X = \tfrac{\omega}{2\pi i} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \widetilde{X}_n, \text{где} \quad \widetilde{X}_n = \tfrac{1}{n} \sum_{p-j=n} X_{pj}, \\ \Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)}(\Gamma X)P_{(k)}, \quad k \geqslant 1. \end{gathered} \tag{25}$$

В этих формулах $X_{pj} = \mathcal{P}_p X \mathcal{P}_j$, $p, j \in \mathbb{Z}$, — матричные элементы оператора X.

Трансформаторы J_k, $\Gamma_k \in \operatorname{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$, $k \geqslant 0$, определены корректно, все выписанные ряды сходятся в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определение 15. *Оператор* $X_k = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i-j=k}} X_{ij}$, $k \in \mathbb{Z}$, *называется k-ой диагональю операторной матрицы оператора* $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Замечание 2. *Для n-ой диагонали X_n оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место формулы*

$$\|X_n\|_2^2 = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i-j=n}} \|X_{ij}\|^2,$$

причем

$$\|X\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2.$$

В статьях [17], [21] для определения трансформаторов J и Γ, действующих в $\operatorname{End}\mathcal{H}$, использовался другой подход, основанный на применении теории представлений. Для его описания отметим, что оператор дифференцирования $L_0 = \frac{d}{ds}$ является генератором ω- периодической группы $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_{2,\omega}$, $(S(t)x)(s) = x(s+t)$, t, $s \in \mathbb{R}$, $x \in L_{2,\omega}$. Эта группа представима в виде

$$S(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t} P_n x.$$

Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие ω-периодическую, сильно непрерывную операторозначную функцию

$$t \mapsto S(t)XS(-t) : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}.$$

При этом возникает изометрическое периода ω представление

$$\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\operatorname{End}\mathcal{H}), \quad \widetilde{S}(t) = S(t)XS(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для функции $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\operatorname{End}\mathcal{H})$ рассмотрим ее ряд Фурье

$$\widetilde{S}(t)x \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n x e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где операторы X_n имеют вид

$$X_n x = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega S(t)XS(-t)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}\,dt, \quad x \in \mathcal{H}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ называется рядом Фурье оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ относительно группы операторов $\widetilde{S}$, а операторы X_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициентами Фурье этого оператора (см. [43], [44]). Важно отметить, что X_n — n-ая диагональ оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ в смысле определения 15.

Замечание 3. *Группу изометрий $\widetilde{S}$ можно рассматривать относительно инвариантного для этой группы подпространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В этом случае коэффициенты Фурье X_n, $n \in \mathbb{Z}$, также являются операторами, принадлежащими $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Отметим, что, следуя работам [17] и [21], трансформаторы J и Γ можно было определить формулами

$$(JX)x = X_0 x = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} S(\tau)XS(-\tau)x\,d\tau, \quad x \in \mathcal{H},$$

$$(\Gamma X)x = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(\tau)S(\tau)XS(-\tau)x\,d\tau, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{26}$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ есть ω-периодическая функция, $f(s) = i\Big(s - \frac{\omega}{2}\Big)$, $s \in [0, \omega]$, имеющая ряд Фурье вида $f(s) \sim \sum\limits_{n \neq 0} \frac{\omega}{2\pi n} e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s}$.

Важно заметить, что определение трансформаторов J и Γ интегральным представлением совпадает с их определением на матричных элементах формулами (24) и (25).

Из представления трансформатора $\Gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ формулой (26) следует

Лемма 6. *Оператор ΓV принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и является интегральным оператором вида*

$$(\Gamma V)x(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\Big(\frac{\omega - s - \tau}{2}\Big)v\Big(\frac{\omega + s - \tau}{2}\Big)x(\tau)\,d\tau, \quad x \in L_2.$$

Причем $(\Gamma V)x \in L_\infty([0, \omega], H)$, $x \in L_2$.

5. Второе преобразование подобия

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется другое пространство допустимых возмущений $\mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Для его описания для любого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\left\{\Big(\sum_{\substack{|k| \geqslant n\\ k \in \mathbb{Z}}} \|\mathcal{P}_k X\|_2^2\Big)^{\frac{1}{4}}, \Big(\sum_{\substack{|k| \geqslant n\\ k \in \mathbb{Z}}} \|X\mathcal{P}_k\|_2^2\Big)^{\frac{1}{4}}\right\}, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Последовательность $(\alpha_n(X))$, $n \in \mathbb{Z}$, обладает следующими свойствами:
1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;
2) $\lim\limits_{|n| \to \infty} \alpha_n(X) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
3) $\alpha_n(X) \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
4) $\alpha_n(X) \geqslant \alpha_{n+1}(X)$, $n \geqslant 0$;
5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq X$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$;
6) конечна величина

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|X\mathcal{P}_n\|_2^2 + \|\mathcal{P}_n X\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}.$$

В качестве возмущения оператора L_0 будет выступать оператор $\widetilde{V}$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, определенной формулой (22) в теореме 15. Без ограничения общности можно в дальнейшем считать, что $P_{(n)}\widetilde{V}P_{(n)} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В противном случае оператор $L_0 - \widetilde{V}$ есть ортогональная сумма оператора конечного ранга $(L_0 - \widetilde{V})|_{\mathcal{H}_{(n)}}$ для некоторого $n \geqslant 0$ и оператора $L_0|_{\mathcal{H}^{(n)}}$, где $\mathcal{H}^{(n)} = I - \mathcal{H}_{(n)}$.

Итак, далее рассматривается оператор $L_0 - \widetilde{V}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор F_X, определяемый формулой
$$F_X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(X)\mathcal{P}_n.$$
Отметим, что $F_X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ есть функция от самосопряженного оператора L_0 вида $F_X = f_X(L_0)$, где $f_X : \sigma(L_0) \to \mathbb{R}_+$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|F_X\|_\infty = \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Для упрощения дальнейшей записи оператор $F_{\widetilde{V}}$ обозначим через F.

Введем множество операторов $\mathcal{M}$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представление вида
$$X = X_l F, \quad X = F X_r,$$
где X_l, $X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Положим $\|X\|_{\mathcal{M}} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Очевидно, что $\|X\|_2 \leqslant \|X\|_{\mathcal{M}}$, $X \in \mathcal{M}$.

Свойство $\operatorname{Ker} F = 0$ (см. свойство 5 последовательности $\alpha_n(X)$) позволяет заключить, что введенное множество операторов $\mathcal{M}$ является банаховым пространством.

Очевидно, что для любого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место представление
$$X = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} X\mathcal{P}_n\Big) F_X = F_X \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} \mathcal{P}_n X\Big).$$
Поэтому возмущение $\widetilde{V}$ принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Поскольку $\mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то трансформаторы J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, определены и для операторов из $\mathcal{M}$. Более того, подпространство $\mathcal{M}$ инвариантно относительно J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, и
$$J_k(X_l F) = (J_k X_l)F, \quad J_k(F X_r) = F(J_k X_r),$$
$$\Gamma_k(X_l F) = (\Gamma_k X_l)F, \quad \Gamma_k(F X_r) = F(\Gamma_k X_r),$$
где X_r, $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для оценки норм $\|\Gamma_k(XF)\|_2$ и $\|\Gamma_k(FX)\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, рассмотрим две последовательности (α'_n), $n \in \mathbb{N}$, и $(\widetilde{\alpha}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, определенные формулами
$$\alpha'_n = \max_{\substack{|i|\geqslant n\\ |j|<n}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i-j|}, \quad \widetilde{\alpha}_n = \frac{\omega}{2\pi}(2\alpha_n + \alpha'_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Последовательности (α'_n) и $(\widetilde{\alpha}_n)$ принадлежат пространству $c_0(N)$ сходящихся к нулю последовательностей.

Следующая лемма является аналогом леммы 3 из [21].

Лемма 7. *Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место оценки:*
$$\max\{\|\Gamma_k(XF)\|_2, \|\Gamma_k(FX)\|_2\} \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_2.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}^{(k)} = I - \mathcal{P}_{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, дополнительный к $\mathcal{P}_{(k)}$ проектор. Тогда $\|F\mathcal{P}^{(k)}\|_\infty = \|\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \mathcal{P}_n \mathcal{P}^{(k)}\|_\infty \leqslant \alpha_{k+1}$. Из определения трансформатора Γ_k следует оценка
$$\|\Gamma_k(XF)\|_2 = \|\Gamma_k(XF\mathcal{P}^{(k)}) + \Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}XF\mathcal{P}_{(k)})\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\omega}{2\pi}\alpha_{k+1}\|X\|_2 + \|\Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}XF\mathcal{P}_{(k)})\|_2.$$
Представим оператор $\Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}XF\mathcal{P}_{(k)})$ в виде
$$\Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}XF\mathcal{P}_{(k)}) = \Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}FX\mathcal{P}_{(k)}) + \Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}(XF - FX)\mathcal{P}_{(k)}).$$
При этом последний оператор имеет операторную матрицу $(\mathcal{P}_i Z_{(k)} \mathcal{P}_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, где $Z_{(k)} = \Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)}(XF - FX)\mathcal{P}_{(k)})$, составленную из элементов вида
$$\mathcal{P}_i Z_{(k)} \mathcal{P}_j = \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\alpha_i - \alpha_j}{i-j}\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j,$$

где $|i| \geqslant k+1$, $|j| \leqslant k$, и $\mathcal{P}_i Z_{(k)} \mathcal{P}_j = 0$ в остальных случаях. Таким образом,

$$\|\Gamma_k(\mathcal{P}^{(k)} X F \mathcal{P}_{(k)})\|_2 \leqslant \frac{\omega}{2\pi}\alpha_{k+1}\|X\|_2 + \frac{\omega}{2\pi} \max_{\substack{|i|\geqslant k+1\\ |j|\leqslant k}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i-j|}\|X\|_2 =$$
$$= \frac{\omega}{2\pi}(\alpha_{k+1} + \alpha'_{k+1})\|X\|_2 = \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_2.$$

Аналогичным образом и той же величиной оценивается норма $\Gamma_k(FX)$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Тройка $(\mathcal{M}, J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора L_0 при любом $k \geqslant 0$ и постоянная $\gamma = \gamma_k$ из определения 14 допускает оценку*

$$\gamma_k \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Выше было установлено, что введенное пространство допустимых возмущений $\mathcal{M}$ является банаховым пространством. Из вложения $\mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $\mathcal{M}$ вложено в $\mathfrak{L}_{L_0}(\mathcal{H})$, так как любой ограниченный оператор является подчиненным невозмущенному оператору L_0. Поэтому свойство 1) определения 14 выполнено.

Выполнение свойств 2) и 5) следует из построения трансформаторов J_k, Γ_k, $k \geqslant 0$, и леммы 5.

Свойства 3) и 6) проверяются так же, как были установлены соответствующие свойства в лемме 4.

Перейдем к доказательству свойства 4). Пусть $X = X_l F \in \mathcal{M}$, $Y = Y_l F \in \mathcal{M}$, где X_l, $Y_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_k Y = Z_l F$, где $Z_l = X_l \Gamma_k(FY_l)$. Из леммы 5 следует, что

$$\|Z_l\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X_l\|_2\|Y_l\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_{\mathcal{M}}\|Y\|_{\mathcal{M}}.$$

Пусть теперь $X = FX_r$, $Y = FY_r$, $X_r, Y_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_k Y = FZ_r$, где $Z_r = X_r\Gamma_k(FY_r)$, и опять же из леммы 5 следует, что

$$\|Z_r\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X_r\|_2\|Y_r\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_{\mathcal{M}}\|Y\|_{\mathcal{M}}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для нормы оператора $(\Gamma_k X)Y$. Лемма доказана. □

Теорема 16. *Пусть целое число $k \geqslant m$ такое, что выполнено условие*

$$4\widetilde{\alpha}_{k+1}\|\widetilde{V}\|_{\mathcal{M}} < 1.$$

Тогда оператор $L_0 - \widetilde{V}$ подобен оператору $L_0 - J_k X_* = L_0 - V_0$, где оператор $X_* \in \mathcal{M}$ есть решение нелинейного операторного уравнения (18) из теоремы 11 с трансформаторами $J = J_k$ и $\Gamma = \Gamma_k$, определенными формулами (24), (25) и $B = \widetilde{V}$. Более того, оператор V_0 есть ортогональная прямая сумма

$$V_0 = V_{0(k)} \oplus \bigoplus_{|i|>k} V_{0i}$$

относительно представления пространства L_2 вида

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \bigoplus_{|i|>k} \mathcal{H}_i,$$

где $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$, $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i$, $|i| > k$, и проекторы $P_{(k)}$, P_i, $|i| > k$, есть спектральные проекторы невозмущенного оператора L_0 и определяются формулами (13). Оператором преобразования оператора $L_0 - \widetilde{V}$, $\widetilde{V} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, в $L_0 - V_0$ является оператор $I + \Gamma_k X$, где $X \in \mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\Gamma_k X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Утверждение теоремы 16 следует теорем 11, 14, лемм 7, 8 и свойства $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{\alpha}_k = 0$, что гарантирует выполнение условия (17) теоремы 11.

6. Доказательство теорем 3, 4, 5

Из теорем 15 и 16 следует теорема 3, приведенная в § 1. Особо отметим, что оператор U из теоремы 3 имеет вид

$$U = U_{mk} = (I + \Gamma_m V)(I + \Gamma_k X_*) = I + W_{mk}, \tag{28}$$

где оператор $W_{mk} = \Gamma_m V + \Gamma_k X_* + (\Gamma_m V)(\Gamma_k X_*)$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Перейдем к оценкам собственных значений и спектральных проекторов. Из теоремы 16 и леммы 1 следует

Теорема 17. *Спектр оператора L совпадает со спектром оператора*

$$L_0 - V_0 = L_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \bigoplus_{|j|>k} P_j X_* P_j.$$

Более того, имеет место равенство

$$\sigma(L) = \sigma(L_{(k)}) \cup \Big(\bigcup_{|j|>k} \sigma(L_j) \Big) = \sigma(L_{(k)}) \cup \Big\{ i\frac{2\pi j}{\omega} + x_{*jj}, |j| > k \Big\},$$

где $L_{(k)}$ — сужение оператора $L_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)}$ на $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$ и L_j — сужение оператора $L_0 - P_j X_* P_j$ на $\operatorname{Im} P_j$, $|j| > k$, и x_{*jj}, $|j| > k$, — диагональные элементы числовой матрицы оператора X_*.

Непосредственно из теоремы 17 следует теорема 4. В теореме 4 учтено, что для любого ограниченного оператора его спектральный радиус не превосходит нормы, и последовательность (x_{*jj}), $|j| > k$, суммируема с квадратом, так как $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Все утверждения относительно собственных векторов следуют из леммы 1 и представления обратимого оператора преобразования (28) в виде $U = I + \Gamma_{km} X_*$, где $\Gamma_{km} X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Доказательство теоремы 5. Все рассуждения проводятся в условиях теоремы 3. Зафиксируем числа k, $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что выполнены условия теорем 15, 16. Пусть $\mathcal{P}_n = P(\{\lambda_n\}, L_0)$, $\lambda_n = \{\frac{i2\pi n}{\omega}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_{(m)} = \sum\limits_{|n|\leqslant m} \mathcal{P}_n$, $\widetilde{\mathcal{P}}_{(m)} = U_{km} \mathcal{P}_{(m)} U_{km}^{-1}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_n = U_{km} \mathcal{P}_n U_{km}^{-1}$. В соответствии с леммой 1 проекторы $\widetilde{\mathcal{P}}_{(m)}$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ есть спектральные проекторы оператора L. Обозначим символом $\mathcal{P}(\Omega)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ соответственно следующие проекторы

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sum_{n\in\Omega} \mathcal{P}_n, \quad \widetilde{\mathcal{P}}(\Omega) = \sum_{n\in\Omega} \widetilde{\mathcal{P}}_n = \sum_{n\in\Omega} U_{km} \mathcal{P}_n U_{km}^{-1}, \quad \Omega = \mathbb{Z} \setminus \{-m, \ldots, m\}.$$

Отметим, что $\mathcal{P}(\Omega)$ есть спектральный проектор, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_n, n \in \Omega\}$ оператора L_0.

Для любого $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим величину

$$\alpha(\Omega, X) = \max_{n\in\Omega} \alpha_n(X), \quad \Omega \subset \mathbb{Z},$$

где последовательность α_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяется формулой (27).

Пусть $X \in \mathcal{M}$, т. е. $X = X_l F_X = F_X X_r$, где X_l, $X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оценим норму

$$\|\mathcal{P}(\Omega) X\|_2 = \|\mathcal{P}(\Omega) F_X X_r\|_2 = \Big\| \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(X) \mathcal{P}_n \Big) X_r \Big\|_2 \leqslant \alpha(\Omega, X) \|X\|_2.$$

Аналогично получается оценка для оператора $X\mathcal{P}(\Omega)$. Следовательно,

$$\max\{\|\mathcal{P}(\Omega) X\|_2, \|X \mathcal{P}(\Omega)\|_2\} \leqslant \|X\|_{\mathcal{M}} \alpha(\Omega, X).$$

Перейдем к оценке величин $\|\mathcal{P}(\Omega)\Gamma_m X\|_2$, $\|\Gamma_m X\mathcal{P}(\Omega)\|_2$:

$$\|\mathcal{P}(\Omega)\Gamma_m X\|_2^2 = \sum_{\substack{i\in\Omega, j\in\mathbb{Z}\\ i\neq j}} \frac{\|\mathcal{P}_i\mathcal{P}(\Omega)X\mathcal{P}_j\|_2^2}{|\lambda_i-\lambda_j|^2} \leqslant \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \sum_{i\in\Omega}\|\mathcal{P}_i X\|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \alpha^4(\Omega, X)\|X\|_2^2.$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{P}(\Omega)\Gamma_m X\|_2 \leqslant \frac{\omega}{2\pi}\alpha^2(\Omega, X)\|X\|_2.$$

Аналогично и той же величиной оценивается величина $\|\Gamma_m X\mathcal{P}(\Omega)\|_2$. Отметим, что из определения последовательности α и построения пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ следуют равенства $\|F\mathcal{P}(\Omega)\| = \|\mathcal{P}(\Omega)F\| = \alpha(\Omega, B)$. Поэтому $\alpha(\Omega, X) \leqslant \|X\|_{\mathcal{M}}\alpha(\Omega, B)$.

Также из определения последовательности α_n, $n\in\mathbb{Z}$, вытекают следующие свойства:

1) Если $X = \sum\limits_{l\geqslant 1} X_l$, где $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то этот ряд сходится абсолютно и

$$\|X\|_2\alpha_n(X) \leqslant \sum_{l\geqslant 1}\|X_l\|_2\alpha_n(X_l).$$

2) Если $X = X_1\cdot\ldots\cdot X_l$, $X_j\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $1\leqslant j\leqslant l$, то

$$\|X\|_2\alpha_n(X) \leqslant (\alpha_n(X_1)+\cdots+\alpha_n(X_l))\bigcap_{j=1}^{l}\|X_j\|_2.$$

Перейдем к оценке нормы разности $\widetilde{\mathcal{P}}(\Omega) - \mathcal{P}(\Omega)$, где $\Omega\subset\mathbb{Z}\backslash\{-m,\ldots,m\}$. Напомним, что оператор U из теоремы 3, осуществляющий преобразование подобия, представим в виде $U_{mk} = I + W_{mk}$, где $W_{mk} = \Gamma_m V + \Gamma_k X_* + (\Gamma_m V)(\Gamma_k X_*)$. Из леммы 1 следует равенство

$$\widetilde{\mathcal{P}}(\Omega) - \mathcal{P}(\Omega) = (W_{mk}\mathcal{P}(\Omega) - \mathcal{P}(\Omega)W_{mk})(I+W_{mk})^{-1}.$$

Тогда

$$\|\mathcal{P}(\Omega)W_{mk}\|_2 \leqslant \|\mathcal{P}(\Omega)(\Gamma_m V)\|_2 + \|\mathcal{P}(\Omega)(\Gamma_k X_*)\|_2 +$$
$$+\|\mathcal{P}(\Omega)(\Gamma_m V)(\Gamma_k X_*)\|_2 \leqslant \|\mathcal{P}(\Omega)(\Gamma V)\|_2 + \|\mathcal{P}(\Omega)(\Gamma X_*)\|_2 +$$
$$+\|\mathcal{P}(\Omega)(\Gamma V)(\Gamma X_*)\|_2 \leqslant C_1(\alpha(\Omega,\Gamma V) + \alpha^2(\Omega, X_*)) \leqslant C_2(\alpha(\Omega,\Gamma V)+\alpha^2(\Omega, V)).$$

Отметим, что константы C_1 и C_2 не зависят от Ω. Аналогичной величиной оценивается норма $\|W_{mk}\mathcal{P}(\Omega)\|_2$.

Оператор $(I+W_{mk})^{-1}$ представим в виде $(I+W_{mk})^{-1} = I + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j W_{mk}^j$, поэтому

$$\|(I+W_{mk})^{-1} - I\|_2 \leqslant \frac{\|W_{mk}\|_2}{1-\|W_{mk}\|_2}.$$

В итоге получаем

$$\|\widetilde{\mathcal{P}}(\Omega) - \mathcal{P}(\Omega)\|_2 \leqslant C_3(\alpha(\Omega,\Gamma V) + \alpha^2(\Omega, V)), \tag{29}$$

где константа C_3 не зависит от Ω.

Отметим, что в пространстве $\mathcal{H}$ есть два разложения единицы

$$I = \sum_{|i|>k}\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{(k)}, \quad I = \sum_{|i|>k}\widetilde{\mathcal{P}}_i + \widetilde{\mathcal{P}}_{(k)}.$$

Утверждение теоремы 5 немедленно вытекает из оценки (29), если в качестве Ω рассмотреть множество $\Omega = \{n\in\mathbb{Z}, |n|>N\}$, где N — достаточно большое натуральное число, и свойства 2) последовательности $\{\alpha_n\}$.

Следствие 1. *Оператор L является спектральным оператором скалярного типа (см.* [45]*).*

7. Доказательство теорем 1, 6, 8

Для построения группы операторов $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2$, генератором которой является исследуемый дифференциальный оператор с инволюцией $L : W_2^1 \subset L_2 \to L_2$, используем теорему 3 и ее более подробный вариант — теорему 16. Из теоремы 16, теорем 3, 12 и леммы 2 следует, что группа операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является $U = U_{mk}$-ортогональной прямой суммой

$$T(t) = U\Big(\bigoplus_{j=-\infty}^{-k-1} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega}+x_{*jj})t} \oplus e^{X_{*(m)}t} \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega}+x_{*jj})t}\Big)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

относительно U-ортогонального разложения

$$L_2 = \mathcal{H} = \bigoplus_{j=-\infty}^{-k-1} U\mathcal{H}_j \oplus U\mathcal{H}_{(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{j=k+1}^{\infty} U\mathcal{H}_j \Big).$$

Отметим, что числа m, $k \in \mathbb{Z}_+$, определены в теоремах 15 и 16 соответственно. При этом оператор U_{mk} представим в виде (28), т. е. $U_{mk} = I + W_{mk}$, где $W_{mk} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Таким образом, построена группа $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2$, генератором которой является оператор $L = L_0 - V$. Утверждение теоремы 1 о представлении классических и слабых решений задачи (1) следует из общей теории полугрупп операторов (см. [29], [30], [45]). Из доказанного представления (30) следует утверждение теоремы 6, где $b_j = x_{jj}$, $|j| \geqslant m+1$, $B_{(k)} = X_*$. Отметим, что из теорем 3, 16 вытекает свойство $\sum\limits_{|j|\geqslant m+1} |b_j|^2 < \infty$.

Для доказательства теоремы 8 используем представление (30) группы T и равенство Парсеваля. Производимые оценки фактически помещены в формулировку теоремы 8.

В заключении отметим, что результаты данной работы частично анонсированы в [46] и [47]. В [48] исследование проведено в русле данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965. 448 с.
2. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. *Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51., № 12. С. 2233–2246.
3. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. *Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией* // Доклады РАН. 2011. Т. 441., № 2. С. 151–154.
4. Бурлуцкая М.Ш. *О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54., № 1. С. 3–12.
5. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. *Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2014. Т. 14., № 1. С. 10–20.
6. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. *Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51., № 7. С. 990–996.
7. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. *Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution* // Electr. J. Differ. Equat. 2015. V. 278. P. 1–9.
8. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. *Базисность Рисса системы корневых функций для оператора второго порядка с инволюцией* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53., № 1. С. 35–48.

9. Wiener J., Aftabizadeh A.R. *Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument* // Intern. J. Math. Math. Sci. 1985. V. 8., № 1. P. 151-163.
10. Piao D. *Periodic and almost periodic solutions for differential equations with reflection of the argument* // Nonlinear Anal. 2004. V. 57., № 4. P. 633-637.
11. Cabada A., Tojo F.A.F. *Existence results for a linear equations with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions* // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412., № 1. P. 529-546.
12. Cabada A., Tojo F.A.F. *Solutions and Green's function of the first order linear equation with reflection and initial conditions* // Boundary Value Problems. 2014. V. 99. P. 1-16.
13. Watkins W. *Asymptotic properties of differential equations with involutions* // Int. J. Pure. Appl. Math. 2008. V. 44., № 4. P. 485-492.
14. Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M. *Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution* // Abstr. Appl. Anal. 2012. article ID 590781. 5 pp.
15. Kopzhassarova A.A., Sarsenbi A.M. *Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution* // Abstr. Appl. Anal. 2012. article ID 576843. 6 pp.
16. Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. *Критерий базисности системы собственных функций оператора краткого дифференцирования с инволюцией* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48., № 8. С. 1126–1132.
17. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Yu. *Spectral analysis of a differential operator with an involution* // J. Evolut. Equat. 2017. V. 17. P. 669-684.
18. Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов* // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24., № 1. С. 21–39.
19. Баскаков А.Г. *Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50., № 3. С. 435–457.
20. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 54., № 4. С. 3–32.
21. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом* // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75., № 3. С. 3–28.
22. Баскаков А.Г., Поляков Д.М. *Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом* // Матем сб. 2017. Т. 208., № 1. С. 3–47.
23. Kalman R.E., Bucy R.S. *New results in linear filtering and prediction theory* // Trans. ASMI. Ser. D.J. Basic Eng. 1961. V. 86. P. 95–108.
24. Przeworska-Rolewicz D. *Equations with transformed argument: Algebraic approach.* Amsterdam. Warsawa. 1973. 354 p.
25. Плисс В.А. *Нелокальные проблемы теории колебаний.* М.: Наука. 1964. 367 с.
26. Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations.* New York. 1996. 412 p.
27. Arendt W., Betty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser/Springer Basel AG. Basel. 2011. 412 p.
28. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука. 1967. 464 с.
29. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* Издательство иностранной литературы. М. 1962. 830 с.
30. Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equation.* Springer-Verlag. New-York. 2000. 586 p.
31. Баскаков А.Г., Диденко В.Б. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51., № 3. С. 323–341.
32. Баскаков А.Г., Кабанцова Л.Ю., Коструб И.Д., Смагина Т.И. *Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53., № 1. С. 10–19.
33. Баскаков А.Г. *Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений* // Матем. заметки. 1978. Т. 24., № 2. С. 195–206.

34. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* М.: Издательство МГУ. 1978. 204 с.
35. Баскаков А.Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* // УМН. 2013. Т. 68., № 1(409). С. 77–128.
36. Баскаков А.Г. *Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве* // Матем. заметки. 2015. Т. 98., № 2. С. 174–190.
37. Баскаков А.Г. *Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений* // Матем. сб. 2015. Т. 205., № 8. С. 23–62.
38. Поляков Д.М. *Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями* // Алгебра и Анализ. 2015. Т. 27., № 5. С. 117–152.
39. Ускова Н.Б. *О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом* // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7., № 3. С. 88–99.
40. Ускова Н.Б. *О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52., № 5. С. 557–567.
41. Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б. *Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2016. Т. 16., № 4. С. 395–402.
42. Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б. *Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом* // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 673–689.
43. Баскаков А.Г. *Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61., № 6. С. 3–26.
44. Baskakov A.G., Krishtal I.A. *Memory estimation of inverse operators* // J. Funct. Anal. 2014. V. 267. P. 2551–2605.
45. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* Т. I. М.: Издательство иностранной литературы. 1962. 896 с.
46. Баскаков А.Г., Ускова Н.Б. *Обобщенный метод Фурье для систем дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 2. С. 276–280.
47. Баскаков А.Г., Ускова Н.Б. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 9. С. 1287–1291.
48. A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova *Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group* // Operators and Matrices. 2018. V. 12, № 3. P. 723–756.

Анатолий Григорьевич Баскаков,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1.
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Наталья Борисовна Ускова,
Воронежский государственный технический университет,
Московский пр-т, д. 14.
394016, г. Воронеж, Россия
E-mail: nat-uskova@mail.ru