

УДК 517.957

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ГРАНИЦЕ

Е.И. ГАЛАХОВ, О.А. САЛИЕВА

Аннотация. Рассматривается проблема отсутствия положительных решений для некоторых нелинейных эллиптических неравенств в ограниченной области. При этом главные части исследуемых неравенств представляют собой операторы $p(x)$ -Лапласа с переменными показателями степени. Младшие члены рассматриваемых неравенств могут зависеть как от значений искомой функции, так и от ее градиента. Предполагается, что коэффициенты младших членов обладают сингулярностями на границе. Насколько известно авторам, ранее условия отсутствия решений для неравенств с переменными показателями степени не рассматривались.

Получены достаточные условия отсутствия положительных решений в терминах показателя степени $p(x)$, порядка сингулярности и других параметров задачи. Для доказательства полученных условий используется авторская модификация метода нелинейной емкости, предложенного С.И. Похожаевым. Метод основан на специальном выборе пробных функций в слабой постановке задачи и на алгебраических преобразованиях полученных выражений. Это позволяет получить асимптотически оптимальные априорные оценки решений, приводящие к противоречию при определенном выборе параметров, из чего и делается вывод об отсутствии решений в этой ситуации. Приведено обобщение полученных результатов на случай нелинейных систем с аналогичными условиями на операторы и коэффициенты.

Ключевые слова: эллиптические неравенства, переменные показатели степени, отсутствие решений, сингулярные коэффициенты.

Mathematics Subject Classification: 35J60, 35K55, 35R55

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема достаточных условий отсутствия решений нелинейных эллиптических уравнений, неравенств и их систем рассматривалась многими авторами.

Для оператора Лапласа с точечной сингулярностью внутри области первые результаты в этой области были получены Х. Брезисом и Х. Кабре [1] с помощью принципа сравнения.

Для операторов высоких порядков, не удовлетворяющих принципу сравнения, С.И. Похожаевым [9] был предложен метод нелинейной емкости. Позднее он был развит в совместных работах с Э. Митидиери и другими авторами (см. монографию [8] и ссылки в ней). Этот метод позволил получить ряд новых точных достаточных условий неразрешимости нелинейных неравенств в частных производных в различных функциональных классах. Метод основан на получении асимптотически оптимальных априорных оценок

E.I. GALAKHOV, O.A. SALIEVA, UNSOLVABILITY CONDITIONS FOR SOME INEQUALITIES AND SYSTEMS WITH FUNCTIONAL PARAMETERS AND SINGULAR COEFFICIENTS ON BOUNDARY.

© Галахов Е.И., Салиева О.А. 2018.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Соглашение 05.Y09.21.0013 от 19 мая 2017).

Поступила 28 декабря 2016 г.

путем алгебраического анализа интегральной формы рассматриваемого неравенства при специальном выборе пробных функций. Приложения этого метода к различным типам эллиптических неравенств и систем можно найти, например, в [2, 3, 4, 7].

В настоящей работе используется модификация метода нелинейной емкости для получения достаточных условий отсутствия решений для некоторых нелинейных эллиптических неравенств в ограниченной области с переменными показателями степени и коэффициентами, обладающими сингулярностью на границе. Насколько нам известно, ранее условия отсутствия решений для неравенств с переменными показателями степени не рассматривались.

Для доказательства результатов об отсутствии решений методом нелинейной емкости строятся пробные функции с различной геометрической структурой, учитывающей специфический характер рассматриваемой задачи. Наши первые результаты в этом направлении были опубликованы в [5, 6].

Оставшаяся часть статьи состоит из двух параграфов. В §2 мы получаем результаты об отсутствии решений для скалярных нелинейных эллиптических неравенств, а в §3 – для систем таких неравенств.

Замечание об обозначениях. Здесь и далее буква c обозначает различные положительные константы, которые могут зависеть от параметров рассматриваемых задач.

2. СКАЛЯРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p(x)-2}Du) \geq \rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)}|Du|^{s(x)}, & x \in \Omega, \\ u(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где Ω – ограниченная область с гладкой границей, $p(x), q(x), s(x) \in C(\Omega)$ – функции с положительной точной нижней гранью, $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решения задачи (1) будут пониматься в слабом смысле (распределений) в соответствии со следующим определением.

Определение 2.1. Неотрицательная функция $u \in W_{\operatorname{loc}}^{1,p(x)}(\Omega)$ называется слабым решением (в смысле распределений) задачи (1), если $\rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)}|Du|^{s(x)} \in L_{\operatorname{loc}}^1(\Omega)$ и для любой неотрицательной пробной функции $\psi \in C_0^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} |Du|^{p(x)-2}(Du, D\psi) dx \geq \int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)}|Du|^{s(x)}\psi dx. \quad (2)$$

Замечание 2.1. Аналогично [8] можно показать, что если такое решение существует и строго положительно в Ω , то (2) выполняется и для пробных функций вида $\psi = u^\gamma \varphi$ с $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Если u обращается в ноль где-либо в Ω и $\gamma < 0$, можно использовать пробные функции $\psi = (u + \delta)^\gamma \varphi$ и устремить $\delta \rightarrow 0_+$, что приводит к таким же результатам, как и в предыдущем случае. Поэтому далее мы будем предполагать, что $u > 0$, если оно существует.

Введем обозначение

$$\Omega_{k\eta} = \{x \in \Omega : \rho(x) \geq k\eta\} \quad (\eta > 0, k = 1, 2).$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \Omega} p(x) &> 1, \\ \inf_{x \in \Omega} (q(x) - p(x)) &> 1. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} b_\gamma(x) &= \frac{p(x)(q(x) + \gamma) - s(x)(\gamma - 1)}{q(x) + s(x) - p(x) + 1}, \\ c_\gamma(x) &= \frac{p(x) + \gamma - 1}{q(x) + s(x) - p(x) + 1}, \\ D(\gamma, \eta) &= \int_{\Omega_\eta \setminus \Omega_{2\eta}} \eta^{b_\gamma(x)} \rho^{-\alpha c_\gamma(x)} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда имеет место

Теорема 2.1. Пусть существует $\gamma_0 < 0$ такое, что для $\gamma \in (\gamma_0, 0)$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0_+} D(\gamma, \eta) = 0. \quad (4)$$

Тогда неравенство (1) не имеет нетривиальных решений.

Пример 2.1. Пусть $\Omega = B_1(0)$, $p(x) \equiv p = \text{const}$, $q(x) \equiv q = \text{const}$, $s(x) \equiv 0$. Тогда $\rho(x) = 1 - |x|$, и неравенство (1) принимает вид

$$-\Delta_p u \geq u^q (1 - |x|)^{-\alpha} \quad (x \in B_1(0)), \quad (5)$$

а условие (4) выполняется в точности при $\alpha \geq q + 1$. Легко видеть, что при нарушении этого условия (т.е. при $\alpha < q + 1$) неравенство (5) имеет решение вида $C(1 - |x|)^{\frac{\alpha-p}{q-p+1}}$ с соответствующей константой $C = C(p, q, \alpha) > 0$, т.е. полученное условие отсутствия решений неравенства (5) является оптимальным.

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальное решение u неравенства (1). Введем семейство функций $\varphi_\eta \in C_0^1(\Omega; [0, 1])$ вида $\varphi_\eta(x) = \xi_\eta^\lambda(x)$ с

$$\xi_\eta(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega_{2\eta}), \\ 0 & (x \notin \Omega_\eta), \end{cases} \quad (6)$$

$$|D\xi_\eta(x)| \leq c\eta^{-1} \quad (x \in \Omega) \quad (7)$$

и достаточно большим $\lambda > 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x) u^{q(x)+\gamma} |Du|^{s(x)} \varphi_\eta dx \leq \int_{\Omega} (|Du|^{p(x)-2} Du, D(u^\gamma \varphi_\eta)) dx = \\ & = \gamma \int_{\Omega} u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta dx + \int_{\Omega} u^\gamma |Du|^{p(x)-2} (Du, D\varphi_\eta) dx \leq \\ & \leq \gamma \int_{\Omega} u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta dx + \int_{\Omega} u^\gamma |Du|^{p(x)-1} |D\varphi_\eta| dx, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x) u^{q(x)+\gamma} |Du|^{s(x)} \varphi_\eta dx + |\gamma| \int_{\Omega} u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta dx \leq \int_{\Omega} u^\gamma |Du|^{p(x)-1} |D\varphi_\eta| dx.$$

Представляя подынтегральную функцию в правой части этого неравенства в виде

$$2^{-\frac{y(x)}{s(x)}} u^{\frac{(q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)}} |Du|^{y(x)} \rho^{-\frac{\alpha y(x)}{s(x)}} \varphi_\eta^{\frac{y(x)}{s(x)}} \cdot 2^{\frac{y(x)}{s(x)}} u^{\frac{\gamma s(x) - (q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)}} |Du|^{p(x)-1-y(x)} |D\varphi_\eta| \cdot \rho^{\frac{\alpha y(x)}{s(x)}} \varphi_\eta^{-\frac{y(x)}{s(x)}},$$

где $y(x)$ будет выбрано ниже, и применяя параметрическое неравенство Юнга с показателем $s(x)/y(x)$ (далее будет показано, что $s(x)/y(x) > 1$ при соответствующем выборе

$y(x)$), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x) u^{q(x)+\gamma} |Du|^{s(x)} \varphi_{\eta} dx + |\gamma| \int_{\Omega} u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_{\eta} dx \leq \\ & \leq c \int_{\Omega} u^{\frac{\gamma s(x) - (q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)-y(x)}} |Du|^{\frac{(p(x)-1-y(x))s(x)}{s(x)-y(x)}} |D\varphi_{\eta}|^{\frac{s(x)}{s(x)-y(x)}} \cdot \rho^{\frac{\alpha y(x)}{s(x)-y(x)}} \varphi_{\eta}^{-\frac{y(x)}{s(x)-y(x)}} dx. \end{aligned}$$

Применим неравенство Юнга с показателем $z(x)$ еще раз:

$$\begin{aligned} & c \int_{\Omega} u^{\frac{\gamma s(x) - (q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)-y(x)}} |Du|^{\frac{(p(x)-1-y(x))s(x)}{s(x)-y(x)}} |D\varphi_{\eta}|^{\frac{s(x)}{s(x)-y(x)}} \cdot \rho^{\frac{\alpha y(x)}{s(x)-y(x)}} \varphi_{\eta}^{-\frac{y(x)}{s(x)-y(x)}} dx \leq \\ & \leq \frac{|\gamma|}{2} \int_{\Omega} u^{\frac{(\gamma s(x) - (q(x)+\gamma)y(x))z(x)}{s(x)-y(x)}} |Du|^{\frac{(p(x)-1-y(x))s(x)z(x)}{s(x)-y(x)}} \varphi_{\eta} dx + \\ & + c \int_{\Omega} |D\varphi_{\eta}|^{\frac{s(x)z'(x)}{s(x)-y(x)}} \cdot \rho^{\frac{\alpha y(x)z'(x)}{s(x)-y(x)}} \varphi_{\eta}^{1-\frac{s(x)z'(x)}{s(x)-y(x)}} dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{z'(x)} = 1$.

Выберем $y(x)$ и $z(x)$ так, что

$$\begin{cases} (p(x) - 1 - y(x))s(x)z(x) = p(x)(s(x) - y(x)), \\ \frac{\gamma s(x) - (q(x) + \gamma)y(x)}{s(x) - y(x)} \cdot z(x) = \gamma - 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} y(x) = y_{\gamma}(x) = \frac{s(x)(p(x) + \gamma - 1)}{p(x)(q(x) + \gamma) - s(x)(\gamma - 1)}, \\ z(x) = z_{\gamma}(x) = \frac{p(x)[p(x)(q(x) + \gamma) - s(x)(\gamma - 1) - (p(x) + \gamma - 1)]}{(p(x) - 1)(p(x)(q(x) + \gamma) - s(x)(\gamma - 1)) - s(x)(p(x) + \gamma - 1)}. \end{cases}$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ в силу наших предположений об $q(x)$, $p(x)$ и $s(x)$ для любого $x \in \Omega$ имеем

$$\frac{s(x)}{y_0(x)} = \frac{p(x)q(x) + s(x)}{p(x) - 1} > \frac{p(x)q(x) + s(x)}{q(x)} = p(x) + \frac{s(x)}{q(x)} > p(x) > 1$$

и

$$z_0(x) = \frac{p(x)(q(x) - 1) + s(x) + 1}{p(x)(q(x) - 1)} = 1 + \frac{s(x) + 1}{p(x)(q(x) - 1)} > 1.$$

Отсюда по непрерывности при достаточно малых $|\gamma|$ будем иметь $\frac{s(x)}{y_{\gamma}(x)} > 1$ и $z_{\gamma}(x) > 1$ для всех $x \in \Omega$, что и требуется для применения неравенства Юнга.

Для таких $y(x)$ и $z(x)$, при φ_{η} со свойствами (6), (7) и достаточно большим $\lambda > 0$ из (8) следует

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x) u^{q(x)+\gamma} |Du|^{s(x)} \varphi_{\eta} dx + \frac{|\gamma|}{2} \int_{\Omega} u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_{\eta} dx \leq cD(\gamma, \eta).$$

Устремляя $\eta \rightarrow +0$, в силу (4) для $\gamma \in (\gamma_0, 0)$ получим противоречие с предполагаемой нетривиальностью u , что доказывает теорему. \square

3. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Далее рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p(x)-2}Du) \geq \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}, & x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(|Dv|^{q(x)-2}Dv) \geq \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}, & x \in \Omega, \\ u, v \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

где Ω – ограниченная область с гладкой границей.

Будем предполагать, что $p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 \in C(\Omega)$ – функции с положительной точной нижней гранью, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Решения системы (9) будут пониматься в слабом смысле (распределений) в соответствии со следующим определением.

Определение 3.1. Пара неотрицательных функций $(u, v) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,q}(\Omega)$ называется слабым решением (в смысле распределений) системы (9), если $\rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, $\rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ и для любых неотрицательных пробных функций $\psi_1, \psi_2(x) \in C_0^1(\Omega)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du|^{p(x)-2}(Du, D\psi_1) dx &\geq \int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}\psi_1 dx, \\ \int_{\Omega} |Dv|^{q(x)-2}(Dv, D\psi_2(x)) dx &\geq \int_{\Omega} \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}\psi_2(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание 3.1. Аналогично замечанию 2.1, мы можем предполагать, что $u > 0$ и $v > 0$, если они существуют, и использовать пробные функции вида $\psi_1 = u^\gamma \varphi$ и $\psi_2(x) = v^\gamma \varphi$ с $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} c_{1,\gamma}(x) &= -\frac{q(x) + \gamma - 1}{q_1(x) + q_2(x) - q(x) - \gamma + 1}, & c_{2,\gamma}(x) &= -\frac{(p(x) - 1)(1 - \gamma)}{p_1(x) + (p_2(x) - p(x) + 1)(1 - \gamma)}, \\ c_{3,\gamma}(x) &= -\frac{q(x) + \gamma - 1}{q_1(x) + q_2(x) - q(x) - \gamma + 1}, & c_{4,\gamma}(x) &= -\frac{(q(x) - 1)(1 - \gamma)}{q_1(x) + (q_2(x) - q(x) + 1)(1 - \gamma)}, \\ d_{1,\gamma}(x) &= \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}{p_1(x) + p_2(x) - p(x) - \gamma + 1}, & d_{2,\gamma}(x) &= \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}{p_1(x) + (p_2(x) - p(x) + 1)(1 - \gamma)}, \\ d_{3,\gamma}(x) &= \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}{q_1(x) + q_2(x) - q(x) - \gamma + 1}, & d_{4,\gamma}(x) &= \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}{q_1(x) + (q_2(x) - q(x) + 1)(1 - \gamma)}, \end{aligned}$$

$$D_{j,\gamma}(\eta) = \int_{\Omega_\eta \setminus \Omega_{2\eta}} b^{c_{j,\gamma}(x)}(x) \cdot \eta^{d_{j,\gamma}(x)} dx, \quad j = 1, 2,$$

$$D_{j,\gamma}(\eta) = \int_{\Omega_\eta \setminus \Omega_{2\eta}} a^{c_{j,\gamma}(x)}(x) \cdot \eta^{d_{j,\gamma}(x)} dx, \quad j = 3, 4.$$

Тогда справедлива

Теорема 3.1. Пусть $\inf_{x \in \Omega} p(x) > 1$, $\inf_{x \in \Omega} q(x) > 1$, $\inf_{x \in \Omega} (p_1(x) + p_2(x) - p(x)) > 1$, $\inf_{x \in \Omega} (q_1(x) + q_2(x) - q(x)) > 1$ и существует $\gamma_0 < 0$ такое, что для $\gamma \in (\gamma_0, 0)$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0_+} D_{j,\gamma}(\eta) = 0, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (11)$$

Тогда система (9) не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. Пусть (u, v) – нетривиальное решение системы (9), а $\varphi_\eta \in C_0^\infty(\Omega; [0, 1])$ – пробные функции того же вида, что и в доказательстве теоремы 2.1, удовлетворяющие (6) и (7).

Используя пробную функцию $\psi_1(x) = u^\gamma(x)\varphi_\eta(x)$ в первом неравенстве (10) и $\psi_2(x) = v^\gamma\varphi_\eta$ во втором, где число γ таково, что $\max(\inf_{x \in \Omega}(1-p(x)), \inf_{x \in \Omega}(1-q(x)), \gamma_0) < \gamma < 0$, получим

$$\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}u^\gamma\varphi_\eta dx \leq \gamma \int u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta dx + \int u^\gamma|Du|^{p(x)-1}|D\varphi_\eta| dx, \quad (12)$$

$$\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}v^\gamma\varphi_\eta dx \leq \gamma \int v^{\gamma-1}|Dv|^{q(x)}\varphi_\eta dx + \int v^\gamma|Dv|^{q(x)-1}|D\varphi_\eta| dx. \quad (13)$$

Воспользуемся представлением

$$u^\gamma|Du|^{p(x)-1} = u^{a_1(x)}|Du|^{b_1(x)}\varphi_\eta^{\frac{1}{c_1(x)}} u^{\gamma-a_1(x)}|Du|^{p(x)-1-b_1(x)}\varphi_\eta^{-\frac{1}{c_1(x)}}, \quad (14)$$

$$v^\gamma|Dv|^{q(x)-1} = v^{a_2(x)}|Du|^{b_2(x)}\varphi_\eta^{\frac{1}{c_2(x)}} v^{\gamma-a_2(x)}|Dv|^{q(x)-1-b_2(x)}\varphi_\eta^{-\frac{1}{c_2(x)}}, \quad (15)$$

чтобы применить к правым частям (12) и (13) параметрическое неравенство Юнга с показателями, обозначаемыми $c_1(x)$ и $c_2(x)$ соответственно. Выберем параметры так, что

$$\begin{cases} a_1(x)c_1(x) = \gamma - 1, \\ b_1(x)c_1(x) = p(x), \\ \frac{\gamma - a_1(x)}{p(x) - 1 - b_1(x)} = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} a_2(x)c_2(x) = \gamma - 1, \\ b_2(x)c_2(x) = q(x), \\ \frac{\gamma - a_2(x)}{q(x) - 1 - b_2(x)} = \frac{q_1(x)}{q_2(x)}. \end{cases} \quad (17)$$

Замечание 3.2. Смысл этого выбора заключается в подготовке к последующему применению неравенства Гельдера, чтобы получить в правых частях неравенств при соответствующем выборе параметров $\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}\varphi_\eta dx$ и $\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}\varphi_\eta dx$.

Решая системы уравнений (16) и (17), получим

$$\begin{cases} a_1(x) = \frac{(\gamma - 1)((p(x) - 1)p_1(x) - \gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}, \\ b_1(x) = \frac{p(x)((p(x) - 1)p_1(x) - \gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}, \\ c_1(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}{(p(x) - 1)p_1(x) - \gamma p_2(x)}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} a_2(x) = \frac{(\gamma - 1)((q(x) - 1)q_1(x) - \gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}, \\ b_2(x) = \frac{q(x)((q(x) - 1)q_1(x) - \gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}, \\ c_2(x) = \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}{(q(x) - 1)q_1(x) - \gamma q_2(x)}. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (14) и (15), будем иметь представления

$$\begin{aligned}
u^\gamma |Du|^{p(x)-1} &= u^{\frac{(\gamma-1)((p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} |Du|^{\frac{p(x)((p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{(p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \\
&\cdot u^{\frac{p_1(x)(p(x)+\gamma-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} |Du|^{\frac{p_2(x)(p(x)+\gamma-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{-\frac{(p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}, \\
v^\gamma |Dv|^{q(x)-1} &= v^{\frac{(\gamma-1)((q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} |Dv|^{\frac{q(x)((q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{(q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \\
&\cdot v^{\frac{q_1(x)(q(x)+\gamma-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} |Dv|^{\frac{q_2(x)(q(x)+\gamma-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{-\frac{(q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}.
\end{aligned}$$

Заметим, что при $\gamma = 0$

$$c_1(x) = \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)}{(q(x) - 1)q_1(x)} > \frac{(q(x) - 1)q_1(x) + q_2(x)}{(q(x) - 1)q_1(x)} = 1 + \frac{q_2(x)}{(q(x) - 1)q_1(x)} \geq c_{1,0} > 1$$

и аналогично $c_2(x) \geq c_{2,0} > 1$. Поэтому те же неравенства $c_1(x) > 1$ и $c_2(x) > 1$ выполняются в силу непрерывности при достаточно малых $|\gamma|$. Таким образом, применяя к правым частям (12) и (13) параметрическое неравенство Юнга с показателями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ из (18) и (19) соответственно, приходим к

$$\begin{aligned}
&\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} u^\gamma \varphi_\eta dx + \frac{|\gamma|}{2} \int u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta dx \leq \\
&\leq c_\gamma \int u^{\frac{p_1(x)(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)}} |Du|^{\frac{p_2(x)(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)}} \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)} - 1}} dx, \\
&\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} v^\gamma \varphi_\eta dx + \frac{|\gamma|}{2} \int v^{\gamma-1} |Dv|^{q(x)} \varphi_\eta dx \leq \\
&\leq d_\gamma \int v^{\frac{q_1(x)(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)}} |Dv|^{\frac{q_2(x)(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)}} \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)} - 1}} dx,
\end{aligned}$$

где константы c_γ и d_γ зависят только от $p(x)$, $q(x)$, $p_1(x)$, $q_1(x)$, $p_2(x)$, $q_2(x)$ и γ . Применяя неравенство Юнга с показателями

$$d_1(x) = \frac{p_1(x) + p_2(x)}{p(x) + \gamma - 1}, \quad d'_1(x) = \frac{p_1(x) + p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x) - p(x) - \gamma + 1}$$

и

$$d_2(x) = \frac{q_1(x) + q_2(x)}{q(x) + \gamma - 1}, \quad d'_2(x) = \frac{q_1(x) + q_2(x)}{q_1(x) + q_2(x) - q(x) - \gamma + 1}$$

соответственно (отметим, что при наших предположениях для $\gamma = 0$ имеем

$$d_1(x) = \frac{p_1(x) + p_2(x)}{p(x) - 1} \geq d_{1,0} > 1, \quad d_2(x) = \frac{q_1(x) + q_2(x)}{q(x) - 1} \geq d_{2,0} > 1$$

и поэтому в силу непрерывности $d_1(x) > 1$ и $d_2(x) > 1$ для любых достаточно малых $|\gamma|$), получим

$$\begin{aligned}
&\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} u^\gamma \varphi_\eta dx + \frac{|\gamma|}{2} \int u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta dx \leq \\
&\leq e_\gamma \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx + f_\gamma \int \rho^{\frac{\beta(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1} - 1}} dx,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} v^\gamma \varphi_\eta dx + \frac{|\gamma|}{2} \int v^{\gamma-1} |Dv|^{q(x)} \varphi_\eta dx \leq \\
& \leq g_\gamma \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx + h_\gamma \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}-1}} dx.
\end{aligned} \tag{21}$$

Далее, используя пробные функции $\psi_1(x) = \psi_2(x) = \varphi_\eta$ в (10), будем иметь

$$\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx \leq \int |Du|^{p(x)-1} |D\varphi_\eta| dx, \tag{22}$$

$$\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx \leq \int |Dv|^{q(x)-1} |D\varphi_\eta| dx. \tag{23}$$

Воспользуемся представлением

$$|Du|^{p(x)-1} = u^{a_3(x)} |Du|^{b_3(x)} \varphi_\eta^{\frac{1}{c_3(x)}} u^{-a_3(x)} |Du|^{p(x)-1-b_3(x)} (\rho^{-\beta} \varphi_\eta)^{\frac{1}{d_3(x)}} \rho^{\frac{\beta}{d_3(x)}} \varphi_\eta^{-\frac{1}{c_3(x)} - \frac{1}{d_3(x)}}, \tag{24}$$

$$|Dv|^{q(x)-1} = v^{a_4(x)} |Dv|^{b_4(x)} \varphi_\eta^{\frac{1}{c_4(x)}} v^{-a_4(x)} |Dv|^{q(x)-1-b_4(x)} (\rho^{-\alpha} \varphi_\eta)^{\frac{1}{d_4(x)}} \rho^{\frac{\alpha}{d_4(x)}} \varphi_\eta^{-\frac{1}{c_4(x)} - \frac{1}{d_4(x)}}, \tag{25}$$

чтобы применить к правым частям (22) и (23) тройное неравенство Юнга с показателями, обозначаемыми $c_3(x)$, $d_3(x)$, $e_3(x)$ и $c_4(x)$, $d_4(x)$, $e_4(x)$ соответственно. Здесь мы выбираем параметры так, что

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3(x)c_3(x) = \gamma - 1, \\ b_3(x)c_3(x) = p(x), \\ a_3(x)d_3(x) = -p_1(x), \\ (p(x) - 1 - b_3(x))d_3(x) = p_2(x), \\ \frac{1}{c_3(x)} + \frac{1}{d_3(x)} + \frac{1}{e_3(x)} = 1, \end{array} \right. \tag{26}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4(x)c_4(x) = \gamma - 1, \\ b_4(x)c_4(x) = q(x), \\ a_4(x)d_4(x) = -q_1(x), \\ (q(x) - 1 - b_4(x))d_4(x) = q_2(x), \\ \frac{1}{c_4(x)} + \frac{1}{d_4(x)} + \frac{1}{e_4(x)} = 1. \end{array} \right. \tag{27}$$

Решая системы уравнений (26) и (27), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3(x) = \frac{(\gamma - 1)p_1(x)(p(x) - 1)}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}, \\ b_3(x) = \frac{p(x)p_1(x)(p(x) - 1)}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}, \\ c_3(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}{p_1(x)(p(x) - 1)}, \\ d_3(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}{(p(x) - 1)(1 - \gamma)}, \\ e_3(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1 - \gamma)}{p_1(x) + (p_2(x) - p + 1)(1 - \gamma)}, \end{array} \right. \tag{28}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4(x) = \frac{(\gamma - 1)q_1(x)(q(x) - 1)}{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}, \\ b_4(x) = \frac{q(x)q_1(x)(q(x) - 1)}{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}, \\ c_4(x) = \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}{q_1(x)(q(x) - 1)}, \\ d_4(x) = \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}{(q(x) - 1)(1 - \gamma)}, \\ e_4(x) = \frac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1 - \gamma)}{q_1(x) + (q_2(x) - q + 1)(1 - \gamma)}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Отметим, что при $\gamma = 0$

$$c_3(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)}{p_1(x)(p(x) - 1)} = 1 + \frac{p_1(x) + p_2(x)}{p_1(x)(p(x) - 1)} \geq c_{3,0} > 1,$$

$$d_3(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)}{p(x) - 1} = p_1(x) + \frac{p_1(x) + p_2(x)}{p(x) - 1} > p_1(x) \geq d_{3,0} > 1,$$

$$e_3(x) = \frac{p(x)p_1(x) + p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x) - p(x) + 1} > \frac{p_1(x) + p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x) - p(x) + 1} \geq e_{3,0} > 1$$

и аналогичные оценки имеют место для $c_4(x)$, $d_4(x)$, $e_4(x)$. Поэтому из непрерывности следует, что для достаточно малых $|\gamma|$ все эти показатели также превосходят 1, аналогично предыдущим рассуждениям.

Подставляя (28) и (29) в (24) и (25), получим представления

$$\begin{aligned} |Du|^{p(x)-1} &= u^{\frac{(\gamma-1)p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} |Du|^{\frac{p(x)p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \\ &\cdot u^{\frac{p_1(x)(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} |Du|^{\frac{p_2(x)(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} (\rho^{-\beta} \varphi_\eta)^{\frac{(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \\ &\cdot \rho^{\frac{\beta(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{(\gamma-p_1(x)-1)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Dv|^{q(x)-1} &= v^{\frac{(\gamma-1)q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} |Dv|^{\frac{q(x)q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \\ &\cdot v^{\frac{q_1(x)(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} |Dv|^{\frac{q_2(x)(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} (\rho^{-\alpha} \varphi_\eta)^{\frac{(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \\ &\cdot \rho^{\frac{\alpha(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{(\gamma-q_1(x)-1)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}, \end{aligned}$$

и, применяя к правым частям (22) и (23) тройное неравенство Юнга с показателями $c_3(x)$, $d_3(x)$, $e_3(x)$, $c_4(x)$, $d_4(x)$, $e_4(x)$ из (28), (29) соответственно, придем к

$$\begin{aligned} &\int \rho^{-\alpha(x)} v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx \leq \\ &\leq C_1 \int u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta dx + C_2 \int \rho^{-\beta(x)} u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx + \\ &+ C_3 \int \rho^{\frac{\beta(p(x)-1)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p+1)(1-\gamma)}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p+1)(1-\gamma)}-1}} dx, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
& \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx \leq \\
& \leq C_4 \int v^{\gamma-1} |Dv|^{q(x)} \varphi_\eta dx + C_5 \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx + \\
& + C_6 \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)-1)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}} \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}-1}} dx.
\end{aligned} \tag{31}$$

Используя (20) и (21), из предыдущих оценок получим

$$\begin{aligned}
& \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx \leq C_7 \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx + \\
& + C_8 \int \rho^{\frac{\beta(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}-1}} dx + \\
& + C_9 \int \rho^{\frac{\beta(p(x)-1)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)}-1}} dx,
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx \leq C_{10} \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx + \\
& + C_{11} \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}-1}} dx + \\
& + C_{12} \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)-1)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)}-1}} dx,
\end{aligned} \tag{33}$$

где константы зависят только от $p(x)$, $q(x)$, $p_1(x)$, $q_1(x)$, $p_2(x)$, $q_2(x)$, γ и от выбора параметров в неравенствах Юнга.

Поэтому в силу (6) и (7), подставляя (34) в (35) и наоборот, а затем, перенося все слагаемые вида $c \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx$ и $c \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx$ в левую часть, при $C_7 C_{10} < 1$ (что можно обеспечить за счет выбора параметров в неравенствах Юнга), имеем:

$$\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta dx \leq c \sum_{j=1}^4 D_{j,\gamma}(\eta), \tag{34}$$

$$\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta dx \leq c \sum_{j=1}^4 D_{j,\gamma}(\eta). \tag{35}$$

Переходя к пределу при $\eta \rightarrow 0_+$, в силу (11) приходим к противоречию, что доказывает утверждение теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Brezis, X. Cabré *Some simple nonlinear PDE's without solutions*. Boll. Un. Mat. Ital. B: Artic. Ric. Mat. 1998. V. 1, Ser. 8. P. 223–262.
2. A. Farina, J. Serrin *Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations* // J. Diff. Eq. 2011. V. 250. P. 4367–4408.
3. A. Farina, J. Serrin *Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations II* // J. Diff. Eq. 2011. V. 250. P. 4409–4436.
4. R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli *Nonlinear weighted p -Laplacian elliptic inequalities with gradient terms* // Commun. Contemp. Math. 2010. V. 12. P. 501–535.
5. E. Galakhov, O. Salieva *On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets* // JMAA. 2013. V. 408. P. 102–113.
6. Галахов Е.И., Салиева О.А. *Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах* // Матем. заметки. 2015. Т. 98. С. 187–195.
7. X. Li, F. Li *Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity* // Nonl. Anal. TMA. 2012. V. 75. P. 2812–2822.
8. Митидиери Э., Похожаев С.И. *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*. М.: Наука, 2001 (Труды МИАН им. В.А. Стеклова. Т. 234).
9. Похожаев С.И. *Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами* // Докл. РАН. 1997. Т. 357. С. 592–594.

Евгений Игоревич Галахов,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: galakhov@rambler.ru

Салиева Ольга Алексеевна,
Московский государственный технологический университет «Станкин»,
Вадковский переулок, д. За,
127055, Москва, Россия
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com