ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 1 (2018). С. 3-13.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ ШВАРЦА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

С. БАЙЗАЕВ, М.Р. РАХИМОВА

Аннотация. В статье рассматриваются функциональные уравнения вида

$$(B + r^2 E)u(z) = 0,$$

где B – постоянная комплексная матрица порядка n, E – единичная матрица порядка n, z – комплексная переменная, $r = |z|$, $u(z)$ – искомая обобщенная вектор-функция, и для этого уравнения изучаются вопросы о существовании нетривиальных решений и нахождения многообразия всех решений из функциональных пространств $D' = D'(C, C^n)$– обобщенных вектор-функций и $S' = S'(C, C^n)$– пространство умеренно растущих обобщенных вектор-функций и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. К изучению таких вопросов приводит задача о нахождении решений из пространства S' комплексных систем уравнений первого порядка эллиптического типа. При изучении указанных вопросов важную роль играет утверждение о структуре обобщенных функций, носители которых содержатся в окружности. В этом утверждении дается явное представление обобщенных функций с носителем, принадлежащим окружности, причем это представление состоит из линейных комбинаций прямого произведения обобщенных периодических функций с δ-функцией и ее производных. Процесс нахождения всех решений данного уравнения из пространства D' состоит из трех этапов: в первом этапе, приведением матрицы B к нормальной жордановой форме, данное уравнение расщепляется на одномерные уравнения; во втором этапе доказывается, что если матрица B не имеет отрицательных и нулевых собственных значений, т.е. $\sigma(B) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$, где $\sigma(B)$ спектр матрицы B, то данное уравнение в пространстве D' имеет только нулевое решение; в третьем этапе, в случае $\sigma(B) \cap (-\infty, 0] \neq \varnothing$ находятся все решения этого уравнения из пространства D'. Множество всех решений данного уравнения из пространства D', в зависимости от собственных значений матрицы B, будет либо нулевым, либо зависит от конечного числа произвольных 2π – периодических обобщенных функций одной переменной и конечного числа произвольных постоянных, причем количество этих функций и постоянных зависит от порядка решения; порядок решения мы должны задавать сами. Дается приложение для нахождения решений из пространства S', в частности решений полиномиального роста, систем уравнений с частными производными эллиптического типа и переопределенных систем. Результаты, полученные в работе, можно использовать при исследовании задач о решениях, определенных во всей комплексной плоскости или полуплоскости, более общих линейных многомерных эллиптических систем и переопределенных систем уравнений с частными производными.

Ключевые слова: функциональные уравнения, пространства Шварца, обобщенные функции с носителем на окружности.

Mathematics Subject Classification: 35D05, 39B32

S. Baizaev, M.A. Rakhimova, Some functional equations in Schwartz space and their applications.

Поступила 12 декабря 2016 г.

1. Введение

В работе рассматриваются функциональные уравнения вида

$$(B + r^2E)u(z) = 0 \tag{1.1}$$

в пространстве Шварца $D'(C, C^n)$ [1], [2], здесь C − комплексная плоскость, C^n −n-мерное комплексное пространство, B − постоянная комплексная матрица порядка n, E − единичная матрица порядка n, $z = x + iy$, $r = |z|$, $u(z)$ − искомая обобщенная вектор-функция. Получено многообразие всех решений из пространства $D'(C, C^n)$ и даны приложения результатов к задачам нахождения решений полиномиального роста многомерных эллиптических систем вида

$$\omega_{\overline{z}} + A\overline{\omega} = 0, \quad \omega \in C^n \tag{1.2}$$

и переопределенных систем вида

$$u_{\overline{z}_j} = A_j\overline{u}, \quad u \in C^n, \quad j = 1, 2.$$

При изучении уравнения (1.1) в пространстве $S'(C, C^n)$-обобщенных вектор-функций медленного роста можно использовать обобщенное сферическое представление обобщенных функций, полученное в работах [3], [4]. Нахождению решений систем вида (1.2), а также более общих эллиптических, гиперболических и переопределенных систем уравнений в частных производных посвящено большое число публикаций (см, например, [5]–[9]).

2. Структура обобщенных функций с носителем на окружности

Будем использовать следующие пространства (см. [2]): $C^m(\overline{G})$, $C^\infty(G)$, $D(G)$, $D'(G)$, G− область в C или интервал в $R = (-\infty, +\infty)$. При $G = C$ обозначаем: $C^\infty = C^\infty(G)$, $D = D(C)$, $D' = D'(C)$. Через $D_{2\pi}$ обозначим пространство 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций вещественной переменной, а через $D'_{2\pi}$-пространство 2π-периодических обобщенных функций. Значение обобщенной функции f на основной функции φ обозначим через $\langle f, \varphi\rangle$.

По аналогии с обобщенными функциями с точечным носителем, обобщенные функции, носители которых содержатся в окружности, допускают явное описание (см. [6]). Отметим, что в [6] приведена без доказательства теорема о структуре обобщенных функций, носители которых содержатся в окружности. Там же рассмотрена задача о решениях уравнения (1.1) в пространстве $S'(C, C^n)$.

Для $r > 0$ и $\varphi \in D$ положим $\psi(r, \theta) = \varphi(re^{i\theta})$. При каждом значении θ функция ψ принадлежит пространству $C^\infty(0, +\infty)$, а при каждом $r > 0$− пространству $D_{2\pi}$. Поэтому для каждой обобщенной функции $c(\theta)$ из $D'_{2\pi}$ и $r_0 > 0$ можно определить прямое произведение $c(\theta) \times \delta^{(j)}(r - r_0)$:

$$\langle c(\theta) \times \delta^{(j)}(r - r_0), \psi(r, \theta)\rangle = \langle c(\theta), \frac{\partial^j \psi(r_0, \theta)}{\partial r^j}\rangle. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Если носитель обобщенной функции $f \in D'$ содержится в окружности $\Gamma = \{z : |z| = r_0\}$, то она единственным образом представляется в виде*

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{j=0}^{N} \langle c_j(\theta) \times \delta^{(j)}(r - r_0), \psi(r, \theta)\rangle, \varphi \in D, \tag{2.2}$$

где N-порядок f и $c_j(\theta)$-некоторые 2π-периодические обобщенные функции.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < min\{1, r_0\}$ и $\eta_\varepsilon(t) \in C^\infty(-1, 1)$ такая функция, что

$$\eta_\varepsilon(t) = 1 \text{ при } |t| \leqslant \varepsilon/3;\ \eta_\varepsilon(t) = 0 \text{ при } |t| \geq \varepsilon;\ |\eta_\varepsilon^{(k)}(t)| \leqslant M_k\varepsilon^{-k},\ |t| \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Если $r = |z|$, то функция $\eta_\varepsilon(r-r_0)$ принадлежит C^∞, равна 1 в окрестности окружности Γ и $supp\ \eta_\varepsilon(r-r_0) \subset G_\varepsilon = \{z : r_0 - \varepsilon < |z| < r_0 + \varepsilon\}$. Поэтому $f = \eta_\varepsilon(r-r_0)f$ и $\eta_\varepsilon(r-r_0)\varphi = \eta_\varepsilon(r-r_0)\psi(r,\theta)$ для $\varphi \in D$. Следовательно, для любой $\varphi \in D$ будем иметь

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle \eta_\varepsilon(r-r_0)f,\varphi\rangle = \langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)\varphi\rangle = \langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)\psi\rangle =$$
$$= \langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)\rangle + \langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)\psi_N\rangle, \qquad (2.4)$$

где

$$\psi_N(r,\theta) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\partial^j \psi(r_0,\theta)}{\partial r^j} \cdot \frac{(r-r_0)^j}{j!}.$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части равенства (2.4) стремится к нулю при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Так как $\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N) \in D(G_\varepsilon)$, то (см. [2], стр.49) получим

$$|\langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)\rangle| \leqslant c\|\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)\|_{C^N(\overline{G}_\varepsilon)} =$$
$$= c \max_{(r,\theta)\in\overline{G}_\varepsilon} \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial r^k \partial\theta^l}[\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)]\right|, \qquad (2.5)$$

где c – постоянная. Оценим выражение, стоящее в правой части (2.5). Имеем

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial r^k \partial\theta^l}[\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)] = \sum_{|\nu|\leqslant k+l} \frac{d^{\nu_1}\eta_\varepsilon(r-r_0)}{dr^{\nu_1}} \cdot \frac{\partial^{\nu_2+\nu_3}(\psi-\psi_N)}{\partial r^{\nu_2}\partial\theta^{\nu_3}},$$

где $|\nu| = \nu_1+\nu_2+\nu_3$. В силу (2.3) справедливо неравенство

$$|\eta_\varepsilon^{(\nu_1)}(r-r_0)| \leqslant M_{\nu_1}\varepsilon^{-\nu_1} \text{ при } |r-r_0| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому в силу равенства

$$\frac{\partial^{\nu_2+\nu_3}(\psi-\psi_N)}{\partial r^{\nu_2}\partial\theta^{\nu_3}} = \sum_{j>N} \frac{\partial^{\nu_3}}{\partial\theta^{\nu_3}}\left[\frac{\partial^j\psi(r_0,\theta)}{\partial r^j}\right] \cdot \frac{j(j-1)\ldots(j-\nu_2+1)}{j!}(r-r_0)^{j-\nu_2}$$

при $|r-r_0| \leqslant \varepsilon$ имеем

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial r^k\partial\theta^l}[\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)]\right| \leqslant c_{kl} \sum_{\nu_1+\nu_2\leqslant k+l} \varepsilon^{-\nu_1}\varepsilon^{N-\nu_2+1}. \qquad (2.6)$$

При $k+l \leqslant N$ и достаточно малых ε правую часть неравенства (2.6) можно оценить следующим образом:

$$c_{kl}\sum_{\nu_1+\nu_2\leqslant k+l}\varepsilon^{-\nu_1}\varepsilon^{N-\nu_2+1} \leqslant \max_{k+l\leqslant N} c_{kl}\varepsilon^{N+1}\sum_{\nu_1+\nu_2\leqslant N}\varepsilon^{-(\nu_1+\nu_2)} =$$
$$= c_1\varepsilon^{N+1}\frac{1-\varepsilon^{-N}}{1-\varepsilon^{-1}} = c_1\frac{\varepsilon^{N+1}-\varepsilon}{\varepsilon-1} \leqslant c_2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)\rangle| \leqslant c_3\varepsilon$$

и

$$\langle f,\eta_\varepsilon(r-r_0)(\psi-\psi_N)\rangle \to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Второе слагаемое в правой части равенства (2.4) не зависит от ε и равно $< F,\psi_N >$, где F – продолжение f на C^∞. Теперь, переходя в равенстве (2.4) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle f,\psi_N\rangle = \sum_{j=0}^{N}\langle F,\frac{\partial^j\psi(r_0,\theta)}{\partial r^j}\cdot\frac{(r-r_0)^j}{j!}\rangle. \qquad (2.7)$$

Определим 2π-периодические обобщенные функции $c_j(\theta)$, полагая для $\mu(\theta) \in D_{2\pi}$

$$\langle c_j,\mu\rangle = (-1)^j\langle F,\frac{(r-r_0)^j}{j!}\mu(\theta)\rangle.$$

Тогда равенство (2.7) можно переписать в виде

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \langle c_j, \frac{\partial^j \psi(r_0, \theta)}{\partial r^j} \rangle.$$

Но

$$\frac{\partial^j \psi(r_0, \theta)}{\partial r^j} = (-1)^j \langle \delta^{(j)}(r - r_0), \psi(r, \theta) \rangle,$$

поэтому используя (2.1) будем иметь

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{N} \langle c_j(\theta), \langle \delta^{(j)}(r - r_0), \psi(r, \theta) \rangle \rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \langle c_j(\theta) \times \delta^{(j)}(r - r_0), \psi(r, \theta) \rangle, \ \varphi \in D.$$

Отсюда следует представление (2.2).

Докажем единственность представления (2.2). Пусть наряду с (2.2) имеется и другое представление

$$f = \sum_{j=0}^{N} c'_j(\theta) \times \delta^{(j)}(r - r_0),$$

где $c'_j(\theta) - 2\pi$-периодические обобщенные функции. Тогда имеем

$$\sum_{j=0}^{N} [c_j(\theta) - c'_j(\theta)] \times \delta^{(j)}(r - r_0) = 0.$$

Отсюда для $\varphi = \eta_\varepsilon(r - r_0)(r - r_0)^k \psi(\theta)$, где ψ – произвольная функция из $D_{2\pi}$, получим

$$\sum_{j=0}^{N} \langle [c_j(\theta) - c'_j(\theta)], \langle \delta^{(j)}(r - r_0), \varphi \rangle \rangle = 0$$

или

$$\sum_{j=0}^{N} \langle [c_j(\theta) - c'_j(\theta)], (-1)^j \frac{d^j}{dr^j}(r - r_0)^k |_{r=r_0} \psi(\theta) \rangle = 0.$$

Тогда

$$\langle (c_k - c'_k), (-1)^k k! \psi(\theta) \rangle = 0.$$

Поэтому $c_k = c'_k, k = 0, \ldots, N$. Единственность представления (2.2) установлена. Теорема 2.1 доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 2.1 мы использовали определение обобщенной периодической функции из [10]. Отметим, что это определение эквивалентно определению, данному в [2].

3. Решение функциональных уравнений

В этом пункте рассматривается задача нахождения всех решений уравнения

$$(B + r^2 E) u(z) = 0 \tag{3.1}$$

из пространства $D'(C, C^n)$, здесь B – постоянная комплексная матрица порядка n, E – единичная матрица порядка n, $r = |z|$, $u(z)$ – искомая обобщенная вектор-функция.

Если V неособая матрица порядка n, то уравнение (3.1) эквивалентно уравнению

$$(VBV^{-1} + r^2 E) v(z) = 0 \tag{3.2}$$

в следующем смысле: если $u \in D'(C, C^n)$ является решением уравнения (3.1), то функция $v = Vu$ удовлетворяет уравнению (3.2), и наоборот, если $v \in D'(C, C^n)$ – решение уравнения (3.2), то $u = V^{-1}v$ удовлетворяет уравнению (3.1).

Матрицу V выберем так, чтобы матрица B приняла квазидиагональную форму Жордана:

$$VBV^{-1} = diag[J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_s(\lambda_s)], (s \leqslant n),$$

где

$$J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

жордановы клетки порядка m_k, λ_k – собственные значения матрицы B, $k = 1, \dots, s$, $m_k \geq 1$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$. Пусть $v = (v_1, \dots, v_n)^T$. Тогда уравнение (3.2) распадается на следующие уравнения

$$(\lambda_{k+1} + r^2)v_{1+l(k)} = 0, \ k = 0, \dots, s-1, \tag{3.3}$$

$$v_j + (\lambda_{k+1} + r^2)v_{j+1} = 0, \ l(k) < j < l(k+1), \tag{3.4}$$

где $l(k) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k, \ l(0) = 0$.

Покажем, что если матрица B не имеет отрицательных и нулевых собственных значений, то уравнение (3.1) в $D'(C, C^n)$ имеет только нулевое решение. В самом деле, пусть $u \in D'(C, C^n)$ решение уравнения (3.1). Тогда для произвольной $\varphi \in D$ из уравнений (3.3) и (3.4) получим

$$\langle v_{1+l(k)}, (\lambda_{k+1} + r^2)\varphi \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, s-1, \tag{3.5}$$

$$\langle v_j, \varphi \rangle + \langle v_{j+1}, (\lambda_{k+1} + r^2)\varphi \rangle = 0, \quad l(k) < j < l(k+1). \tag{3.6}$$

Так как $\inf\limits_{k,r} |\lambda_{k+1} + r^2| > 0$, то для произвольной $\psi \in D$ полагая в (3.5) $\varphi = (\lambda_{k+1} + r^2)^{-1}\psi, (\varphi \in D)$, имеем

$$\langle v_{1+l(k)}, \psi \rangle = 0, \psi \in D,$$

т.е. $v_{1+l(k)} = 0, \quad k = 0, \dots, s-1$. Поэтому из (3.6) следует

$$\langle v_{2+l(k)}, (\lambda_{k+1} + r^2)\varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D.$$

Аналогично, как выше, $v_{2+l(k)} = 0$. Продолжая эту процедуру, можно показать, что $v_j = 0$ для всех j. Итак, $v = 0$, следовательно, $u = V^{-1}v = 0$.

В связи с этим будем предполагать, что матрица B имеет собственные значения, лежащие на полуоси $(-\infty, 0]$. Для определенности будем считать, что $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in (-\infty, 0]$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \overline{\in} (-\infty, 0], \quad (1 \leqslant p \leqslant n)$. Покажем, что носитель решения $u \in D'(C, C^n)$ уравнения (3.1) содержится в множестве

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{p} \{z : |z| = |\lambda_j|^{1/2}\}.$$

Действительно, пусть $\varphi \in D$ и $supp \ \varphi \bigcap \Gamma = \emptyset$. Положим

$$\psi(z) = \begin{cases} (\lambda_{k+1} + r^2)^{-1}\varphi(z) & \text{при } |z| \neq |\lambda_j|^{1/2}, \\ 0 & \text{при } |z| = |\lambda_j|^{1/2}. \end{cases}$$

Тогда $\psi \in D$ и в силу (3.5)

$$\langle v_{1+l(k)}, \varphi \rangle = \langle v_{1+l(k)}, (\lambda_{k+1} + r^2)\psi \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, p-1,$$

т.е. $supp \ v_{1+l(k)} \subset \Gamma$. Аналогично, привлекая соотношения (3.6), можно установить, что $supp \ v_j \subset \Gamma, j \leqslant l(p)$. Остальные v_j, как было показано выше, будут равны нулю, т.е. $v_j = 0$ при $j > l(p)$. Следовательно, $supp \, u = supp \, v \subset \Gamma$. Таким образом, носитель решения уравнения (3.1) содержится в множестве Γ – объединение концентрических окружностей и точки $z = 0$ (конечно, если какое-то $\lambda_j = 0$). Поэтому для нахождения решений уравнения (3.1) будем использовать представление обобщенных функций с носителем на окружности, а также в точке.

Теперь переходим к определению решений уравнения (3.1) в пространстве $D'(C, C^n)$. Для этого будем решать эквивалентную систему уравнений (3.3), (3.4). Повторяя доказательство включенный $supp\ \upsilon_j \subset \Gamma,\ j \leqslant l(p)$, получим более точные включения:

$$supp\ \upsilon_j \subset \Gamma_k,\ j \leqslant l(k+1),\ \Gamma_k = \{z : |z| = |\lambda_{k+1}|^{1/2}\},\ k = \overline{0, p-1}.$$

Чтобы использовать представление функций $\upsilon_j, j \leqslant l(p)$, мы должны знать, какие из Γ_k представляют собою окружность и какие – точку. Предположим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ – отрицательные, а $\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_p$ – нулевые $(1 \leqslant q \leqslant p)$. Тогда $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ – это окружности, а $\Gamma_{q+1}, \ldots, \Gamma_p$ – точка $z = 0$. Следовательно, функции υ_j представляются в виде

$$\upsilon_j = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{N} c_{\nu j}(\theta) \times \delta^{(\nu)}(r - r_k) & \text{при } l(k) < j \leqslant l(k+1), \quad k = \overline{0, q-1}, \\ \sum\limits_{\alpha+\beta \leqslant N} a_{\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\delta(z)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} & \text{при } l(q) < j \leqslant l(p), \end{cases} \tag{3.7}$$

где $c_{\nu j} \in D'_{2\pi}, r_k = |\lambda_{k+1}|^{1/2}, a_{\alpha\beta}^{(j)}$ – постоянные (для простоты порядки обобщенных функций υ_j мы взяли равными N).

Пусть $\eta(t)$ такая функция из C^∞, что $\eta(t) = 1$ в окрестности точки $t = r_k$ и $\eta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \rho_1$ и при $t \geq \rho_2$, где $0 < \rho_1 < \rho_2$. Тогда функция $\varphi_s = (r - r_k)^s \eta(r) h(\theta)$, где $r = |z|, \theta = arg z, h \in D_{2\pi}, s$ – целое неотрицательное число, будет принадлежать D. Поэтому

$$\langle \delta^{(\nu)}(r - r_k), (\lambda_{k+1} + r^2)\varphi_s \rangle = \tag{3.8}$$

$$= 2\nu r_k \frac{\partial^{\nu-1}\varphi_s}{\partial r^{\nu-1}} + \nu(\nu-1)\frac{\partial^{\nu-2}\varphi_s}{\partial r^{\nu-2}}, (0 \leqslant k \leqslant q-1).$$

Отсюда, из (3.5) и (3.7) для $j = 1 + l(k), \varphi = \varphi_s$, получим

$$\sum_{\nu=0}^{N} \langle c_{\nu j}(\theta), 2\nu r_k \frac{\partial^{\nu-1}\varphi_s}{\partial r^{\nu-1}} + \nu(\nu-1)\frac{\partial^{\nu-2}\varphi_s}{\partial r^{\nu-2}} \rangle = 0. \tag{3.9}$$

Так как

$$\left.\frac{\partial^\nu \varphi_s}{\partial r^\nu}\right|_{r=r_k} = \begin{cases} h(\theta) & \text{при } \nu = s, \\ 0 & \text{при } \nu \neq s, \end{cases}$$

то из (3.9) при $s = N - 1$ будем иметь

$$\langle c_{Nj}(\theta), 2N r_k h(\theta) \rangle = 0, h \in D_{2\pi},$$

т.е. $c_{Nj}(\theta) = 0$. Теперь, полагая в (3.9) $s = N - 2$, получим

$$\langle c_{N-1,j}(\theta), 2(N-1) r_k h(\theta) \rangle = 0, h \in D_{2\pi},$$

т.е. $c_{N-1,j}(\theta) = 0$. Продолжая этот процесс, находим:

$$c_{N-2,j} = c_{N-3,j} = \ldots = c_{1,j} = 0.$$

В левой части (3.9) $c_{oj}(\theta)$ не входит, поэтому она остается произвольной. Таким образом, υ_j с $j = 1 + l(k),\ 0 \leqslant k \leqslant q-1$ определяются по формуле

$$\upsilon_j = c_{oj}(\theta) \times \delta(r - r_k), \tag{3.10}$$

где $c_{oj}(\theta)$ – произвольные, 2π-периодические обобщенные функции.

Полагая в (3.6) $j = 1 + l(k),\ 0 \leqslant k \leqslant q - 1, \varphi = \varphi_s$, с учетом соотношений (3.7), (3.8) и (3.10), получим

$$\langle c_{oj}(\theta) \times \delta(r - r_k), \varphi_s(r, \theta)\rangle + \sum_{\nu=0}^{N} \langle c_{\nu,j+1}(\theta), 2\nu r_k \frac{\partial^{\nu-1}\varphi_s(r_k,\theta)}{\partial r^{\nu-1}} + \nu(\nu-1)\frac{\partial^{\nu-1}\varphi_s(r_k,\theta)}{\partial r^{\nu-1}}\rangle = 0.$$

Подставляя в это равенство поочередно $s = N - 1, \ldots, 2, 1$, будем иметь

$$c_{N,j+1} = c_{N-1,j+1} = \ldots = c_{2,j+1} = 0,$$

$$\langle c_{oj}, h(\theta)\rangle + \langle c_{1,j+1}, 2r_k h(\theta)\rangle = 0,$$

т.е. $c_{1,j+1}(\theta) = -c_{oj}(\theta)/2r_k$. Заметим, что $c_{o,j+1}(\theta)$ остаются произвольными. Поэтому при $j = 2l(k)$

$$\upsilon_j = c_{oj}(\theta) \times \delta(r - r_k) - \frac{1}{2r_k} c_{o,j-1}(q) \times \delta'(r - r_k).$$

Продолжая эту процедуру, находим:

$$\upsilon_j = c_{oj}(\theta) \times \delta(r - r_k) + \sum_{\alpha=1}^{j-1-l(k)} A_{\alpha j}(\theta) \times \delta^{(\alpha)}(r - r_k), \tag{3.11}$$

где $l(k) \leqslant j \leqslant l(k+1), 0 \leqslant k \leqslant q - 1, c_{oj}(\theta)$ – произвольные обобщенные функции из $D'_{2\pi},\ A_{\alpha j}(\theta)$ линейно выражаются через $c_{ot}(\theta),\ l(k) < t < j$. Итак, мы определили υ_j, входящие в левые части (3.5), (3.6) с индексом $j : l(k) < j \leqslant l(k+1),\ 0 \leqslant k \leqslant q - 1$. Эти υ_j выражаются формулой (3.11).

Теперь определим υ_j с индексом $j : l(k) < j \leqslant l(k+1),\ q \leqslant k \leqslant p - 1$. Из (3.5) имеем

$$\langle \upsilon_j, r^2\varphi\rangle = 0,\ j = 1 + l(k),\ q \leqslant k \leqslant p - 1,\ \varphi \in D. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что либо $\upsilon_j = 0$, либо носитель υ_j состоит из точки $z = 0$. Поэтому в силу теоремы о структуре обобщенных функций с точечным носителем, имеем

$$\upsilon_j = \sum_{\alpha+\beta \leqslant N} c_{\alpha\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\delta}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}, \tag{3.13}$$

где $c_{\alpha\beta}$ – постоянные, N – порядок обобщенной функции υ_j. Поэтому равенство (3.5) примет вид

$$\sum_{\alpha+\beta \leqslant N} c_{\alpha\beta} \langle \frac{\partial^{\alpha+\beta}\delta}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}, z\overline{z}\varphi\rangle = 0,\ \varphi \in D. \tag{3.14}$$

Полагая здесь

$$\varphi = \eta(z) z^\nu \overline{z}^t, \tag{3.15}$$

где $\nu \geq 0,\ t \geq 0,\ \eta \in D,\ \eta(z) = 1$ в окрестности нуля, получим

$$(\nu + 1)!(t + 1)! c_{\nu+1,t+1} = 0,$$

т.е. $c_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha\beta \neq 0$. Если раскрыть левую часть равенства (3.14), то слагаемые с коэффициентами $c_{\alpha o}, c_{o\beta}$ будут равны нулю. Поэтому коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ при $\alpha\beta = 0$ остаются произвольными. Следовательно,

$$\upsilon_j = \sum_{\nu=0}^{N} \Big(c_{\nu j} \frac{\partial^\nu \delta}{\partial z^\nu} + c'_{\nu j} \frac{\partial^\nu \delta}{\partial \overline{z}^\nu} \Big),\ j = 1 + l(k),\ q \leqslant k \leqslant p - 1, \tag{3.16}$$

где $c_{\nu j},\ c'_{\nu j}$ – произвольные постоянные.

При $q \leqslant k \leqslant p - 1,\ j = 1 + l(k)$ из (3.6) имеем

$$\langle \upsilon_j, \varphi\rangle + \langle \upsilon_{j+1}, r^2\varphi\rangle = 0,\ \varphi \in D.$$

Отсюда заключаем, что носитель υ_{j+1} состоит из точки $z = 0$. Поэтому, представляя обобщенную функцию υ_{j+1} в виде (3.13) с коэффициентами $d_{\alpha\beta}$ $(\alpha + \beta \leqslant N)$ и беря в качестве φ функцию вида (3.15), с учетом (3.16) получим, что $d_{\alpha o}$, $d_{o\beta}$ – произвольны и

$$\alpha! c_{\alpha j} + \beta! c'_{\beta j} + (\alpha+1)!(\beta+1)! d_{\alpha+1,\beta+1} = 0.$$

Тогда

$$\upsilon_j = \sum_{\nu=0}^{N}\Big(c_{\nu j}\frac{\partial^\nu \delta}{\partial z^\nu} + c'_{\nu j}\frac{\partial^\nu \delta}{\partial \overline{z}^\nu}\Big) - \sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 1\\ \alpha+\beta\leqslant N}} \frac{1}{\alpha!\beta!}\Big[(\alpha-1)! c_{\alpha-1,j} + (\beta-1)! c'_{\beta-1,j}\Big]\frac{\partial^{\alpha+\beta}\delta}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta},\ j = 1 + l(k),$$

где $c_{\nu,j+1}$, $c'_{\nu,j+1}$ – произвольные постоянные. Аналогичным образом находим остальные υ_j с индексом $j:\ l(k) < j \leqslant l(k+1),\ q \leqslant k \leqslant p-1$

$$\upsilon_j = \sum_{\nu=0}^{N}\Big(c_{\nu j}\frac{\partial^\nu \delta}{\partial z^\nu} + c'_{\nu j}\frac{\partial^\nu \delta}{\partial \overline{z}^\nu}\Big) + \sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 1\\ \alpha+\beta\leqslant N}} B^{(j)}_{\alpha\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\delta}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta},$$

где $c_{\nu j}$, $c'_{\nu j}$ - произвольные постоянные, $B^{(j)}_{\alpha\beta}$ линейно выражаются через $c_{\nu t}$, $c'_{\nu t}$, $t < j$, причем $B^{(j)}_{\alpha\beta} = 0$ при $j = 1 + l(k)$.

Осталось определить υ_j с индексом $j > l(p)$. Покажем, что все такие υ_j равны нулю. Из (3.5) при $k = p$, получим

$$\langle \upsilon_{1+l(p)}, (\lambda_{p+1} + r^2)\varphi\rangle = 0,\ \varphi \in D. \tag{3.17}$$

Так как $\inf|\lambda_{p+1} + r^2| > 0$ (напомним, что $\lambda_{p+1}\overline{\in}(-\infty, 0]$), то для произвольной $\psi \in D$ полагая в (3.17) $\varphi = (\lambda_{p+1} + r^2)^{-1}\psi$ $(\varphi \in D)$, имеем

$$\langle \upsilon_{1+l(p)}, \psi\rangle = 0\ \forall\psi \in D,$$

т.е. $\upsilon_{1+l(p)} = 0$. Далее из (3.6) следует

$$\langle \upsilon_{2+l(p)}, (\lambda_{p+2} + r^2)\varphi\rangle = 0\ \forall\varphi \in D,$$

аналогично как выше, получим $\upsilon_{2+l(p)} = 0$. Продолжая эту процедуру, можно показать, что $\upsilon_j = 0$ при $j > l(p)$.

Таким образом, мы определили все компоненты υ_j обобщенной функции υ, т.е. мы описали множество всех решений уравнения (3.2) из пространства $D'(C; C^n)$. Тогда множество всех решений уравнения (3.1) из $D'(C; C^n)$ дается формулой $u = V^{-1}\upsilon$.

Отметим, что множество всех решений уравнения (3.1) из пространства $D'(C; C^n)$ в зависимости от собственных значений матрицы B будет либо нулевым, либо зависит от конечного числа произвольных 2π-периодических обобщенных функций и конечного числа произвольных постоянных, причем количество этих функций и постоянных зависит от порядка решения. Порядок решения мы должны задавать сами.

4. Приложения к системам уравнений в частных производных

К частному случаю задачи нахождения решений уравнения (3.1) приводятся задачи нахождения решений в пространстве $S'(C, C^n)$ многомерных эллиптических систем вида

$$\omega_{\overline{z}} + A\overline{\omega} = 0, \quad \omega \in C^n \tag{4.1}$$

и переопределенных систем вида

$$u_{\overline{z}_j} = A_j\overline{u} \quad u \in C^n, \quad j = 1, 2. \tag{4.2}$$

4.1. *Эллиптические системы.* Рассматривая эллиптическую систему (4.1) в пространстве $S'(C, C^n)$ и совершая преобразование Фурье, имеем

$$i\zeta\widetilde{\omega}(\zeta) + 2A\widetilde{\overline{\omega}}(\zeta) = 0. \tag{4.3}$$

Заменяя ζ на $-\zeta$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам с учетом равенства $\overline{\omega(-\zeta)} = \widetilde{\widetilde{\omega}}(\zeta)$, получим еще одно уравнение

$$2\overline{A}\widetilde{\omega}(\zeta) + i\overline{\zeta}\,\widetilde{\widetilde{\omega}}(\zeta) = 0. \tag{4.4}$$

Если из уравнений (4.3) и (4.4) исключить $\widetilde{\widetilde{\omega}}(\zeta)$, то получаем следующее уравнение

$$(4A\overline{A} + |\zeta|^2 E)\widetilde{\omega}(\zeta) = 0, \tag{4.5}$$

которое является частным случаем уравнения (3.1). Как было показано в п. 2, если спектр $\sigma(A\overline{A})$ матрицы $A\overline{A}$ не пересекается с полупрямой $(-\infty, 0]$, то уравнение (4.5) в пространстве $S'(C, C^n)$ имеет только нулевое решение, и тем самым система (4.1) в $S'(C, C^n)$ также имеет только нулевое решение. Если же $\sigma(A\overline{A}) \cap (-\infty, 0] \neq \varnothing$, то по аналогии с уравнением (3.1) можно найти решения уравнения (4.5) из $S'(C, C^n)$ и далее определить решения системы (4.1).

Отметим (см. [6]), что если для системы (4.1) рассмотреть задачу о решениях $\omega(z)$, растущих на бесконечность не быстрее степенной функции z^N, $N \in \{0, 1, \ldots\}$, то в случае $\sigma(A\overline{A}) \cap (-\infty, 0) \neq \varnothing$ пространство P_N решений такой задачи как линейное пространство над полем вещественных чисел бесконечномерное, в случае $\sigma(A\overline{A}) \cap (-\infty, 0] = \{0\}-$ конечномерное, причем

$$\dim P_N = 2n(N+1) - 2\sum_{j=0}^{N} rank B_j,$$

где $B_{2k} = \overline{A}(A\overline{A})^k,\ B_{2k+1} = (A\overline{A})^{k+1},\ k = 0, \ldots, [\frac{N}{2}]$.

4.2. *Переопределенные системы.* Рассмотрим переопределенную систему вида (4.2), в которой $u = u(z_1, z_2)-$ искомая комплекснозначная вектор-функция от комплексных переменных z_1 и z_2, $z_j = x_j + iy_j$, $u_{\overline{z}_j} = \frac{1}{2}(u_{x_j} + iu_{y_j})$, $j = 1, 2$, A_1 и A_2 – постоянные комплексные матрицы порядка n.

Для системы (4.2) будем исследовать задачи о решениях степенного роста, т.е. решений $u(z_1, z_2)$, определенных в C^2 и удовлетворяющих условию

$$\|u(z_1, z_2)\|_{C^n} \leqslant K(1 + |z_1| + |z_2|)^N, \tag{4.6}$$

где $K-$ постоянная, в общем зависящая от $u(z_1, z_2)$, $N-$ целое неотрицательное число.

В пространстве $S'(C^2, C^n)$ система (4.2) эквивалентна системе функциональных уравнений

$$\begin{cases} i\zeta_1 \upsilon(\zeta_1, \zeta_2) - 2A_1 w(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \\ i\zeta_2 \upsilon(\zeta_1, \zeta_2) - 2A_2 w(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

где $\upsilon(\zeta_1, \zeta_2)$ и $w(\zeta_1, \zeta_2)-$ образы Фурье функций $u(z_1, z_2)$ и $\overline{u(z_1, z_2)}$ соответственно, в следующем смысле: если $u \in S'(C^2, C^n)$ решение системы (4.2), то пара (υ, w) удовлетворяет системе (4.7), если же пара (υ, w), $\upsilon, w \in S'(C^2, C^n)$ решение системы (4.7) и выполняется равенство

$$\overline{w(-\zeta_1, -\zeta_2)} = \upsilon(\zeta_1, \zeta_2), \tag{4.8}$$

то функция $u = F^{-1}\upsilon$, $F^{-1}-$ обратное преобразование Фурье, будет решением системы (4.2) из пространства $S'(C^2, C^n)$. Используя соотношение (4.8) из системы (4.7), получим следующие уравнения

$$\begin{cases} 2\overline{A}_1 \upsilon(\zeta_1, \zeta_2) - i\overline{\zeta}_1 w(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \\ 2\overline{A}_2 \upsilon(\zeta_1, \zeta_2) - i\overline{\zeta}_2 w(\zeta_1, \zeta_2) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Исключим из уравнений (4.7), (4.9) $w(\zeta_1, \zeta_2)$ и для $\upsilon(\zeta_1, \zeta_2)$ получим систему

$$(4A_1\overline{A}_1 + |\zeta_1|^2 E)\upsilon(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \tag{4.10}$$

$$(4A_2\overline{A}_2 + |\zeta_2|^2 E)\upsilon(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \tag{4.11}$$

где E – единичная матрица порядка n. К уравнениям (4.10), (4.11) можно применят результаты п. 2.

Через σ_1 и σ_2 обозначим спектры матриц $A_1\overline{A}_1$ и $A_2\overline{A}_2$ соответственно. Если выполнено условие

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2) \cap (-\infty, 0] = \varnothing, \tag{4.12}$$

то из системы (4.10), (4.11) следует, что $v = 0$, тогда $u = 0$.

Если условие (4.12) не выполняется, то носитель обобщенной функции $v(\zeta_1, \zeta_2)$ может быть одной точкой, прямым произведением двух окружностей и даже некомпактным. В первых двух случаях используя теорему о структуре обобщенных функций с точечным носителем и теорему 2.1, можно определить решения системы (4.10), (4.11) и далее решения переопределенной системы (4.2).

Пусть P_N – многообразие решений задачи (4.2), (4.6). Очевидно $P_N \subset S'(C^2, C^n)$ и P_N является линейным пространством над полем вещественных чисел. Пространство P_N может быть бесконечномерным или конечномерным. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть в системе (4.2) $A_1 = 0$. Тогда решения этой системы будут голоморфными по z_1 и в силу теоремы Лиувилля решения из P_N должны иметь вид

$$u(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{N} c_j(z_2) z_1^j,$$

где функции $c_j(z_2)$ удовлетворяют условию

$$\|c_j(z_2)\|_{C^n} \leqslant K(1 + |z_2|^N). \tag{4.13}$$

Тогда из второго уравнения системы (4.2) имеем

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{\partial c_j}{\partial \overline{z}_2} z_1^j = \sum_{j=0}^{N} A_2 \overline{c_j(z_2)} \cdot \overline{z}_1^j.$$

Отсюда для $c_j(z_2)$ получим следующие уравнения

$$\frac{\partial c_0}{\partial \overline{z}_2} = A_2 \overline{c}_0, \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_j}{\partial \overline{z}_2} = 0, \\ A_2 \overline{c}_j = 0, \ j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{4.15}$$

Если $\sigma_2 \cap (-\infty, 0) \neq \varnothing$, то многообразие решений уравнения (4.14), удовлетворяющих условию (4.13), будет бесконечномерным. Если же $\sigma_2 \cap (-\infty, 0) = \varnothing$, то при $\det A_2 \neq 0$ имеем $c_0(z_2) \equiv 0$, а при $\det A_2 = 0$ решения задачи (4.13), (4.14), как было указано в п. 4.1, образуют конечномерное пространство. Далее из (4.15) видно, что при $\det A_2 \neq 0$ все $c_j(z_2)$, $j = 1, \ldots, N$ тождественно равны нулю, если же $\det A_2 = 0$, то $c_j(z_2)$ будут голоморфными полиномами вида $\sum\limits_{k=0}^{N} d_{jk} z_2^k$, где d_{jk} являются собственными векторами матрицы $\overline{A}_2$, отвечающие нулевому собственному значению.

Пример 2. Пусть в системе (4.2) $A_1 = A_2 = A$. Тогда получаем

$$u_{\overline{z}_1} = u_{\overline{z}_2}. \tag{4.16}$$

Решениями этого уравнения будут функции вида $u = \varphi(z_1, z_2)$ и $u = \psi(z_1 + z_2)$, где $\varphi-$ голоморфная по z_1 и z_2 вектор-функция, а $\psi(z_1)-$ вектор-функция, имеющая частные производные ψ_{x_1} и ψ_{y_1}. Множество решений уравнения (4.16) шире чем множество решений системы (4.2). Вышеуказанные решения уравнения (4.16) подставим в систему (4.2):

$$\varphi_{z_j}(z_1, z_2) = A\overline{\varphi(z_1, z_2)}, \tag{4.17}$$

$$\psi_{z_j}(z_1 + z_2) = A\overline{\psi(z_1 + z_2)},\ j = 1, 2. \tag{4.18}$$

В (4.17) левые части равны нулю, поэтому

$$A\overline{\varphi(z_1, z_2)} = 0. \tag{4.19}$$

Если $\det A \neq 0$, то $\varphi \equiv 0$, если же $\det A = 0$, то $\varphi(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)\upsilon$, где f – голоморфная по z_1 и z_2 скалярная функция, υ – собственный вектор матрицы A, отвечающий нулевому собственному значению. Тогда вектор функции

$$u(z_1, z_2) = P_N(z_1, z_2)\upsilon,$$

где P_N – голоморфный полином по z_1 и z_2 степени не выше чем N, будут решениями задачи (4.2), (4.6).

Далее, если в первом (соответственно во втором) уравнении (4.18) зафиксировать z_2 (соответственно z_1), то для ψ получаем системы вида (4.1), рассмотренные в п. 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Schwartz *Distributions a valuers vectorielles* // 1,11. — Ann. Inst. Fourier. 1957. V. 7. P. 1–141.
2. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1976. 280 с.
3. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в начале координат* // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1. № 4. С. 33–66.
4. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Обобщенные функции, асимптотически однородные относительно однопараметрической группы в начале координат* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5. № 1. С. 17–35.
5. Михайлов Л.Г. *Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.* Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
6. Байзаев С. *О медленно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы* // Доклады АН ТаджССР. 1991. Т. 34, №6. С. 329–332.
7. Байзаев С. *О решениях полиномиального роста многомерной обобщенной системы Коши-Римана* // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7. № 3. С. 3–8.
8. Дудников П.И., Самборский С.Н. *О нетеровости краевых задач для переопределенных систем уравнений с частными производными* // Препринт АН УССР. Институт математики. 1981. № 47. С. 1–24.
9. Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибулин И.,Т., Шабат А.Т. *Характеристические кольца $\wedge_u$ и нелинейные интегрируемые уравнения.* М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012. 376 с.
10. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1966. 351 с.

Саттор Байзаев,
Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
мкр. 17, дом 1, корпус 2,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: `sattor_bayzoev@rambler.ru`

Махсуда Аюбовна Рахимова,
Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
мкр. 17, дом 1, корпус 2,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: `rakhimova.mahsuda@mail.ru`