ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 36-44.

УДК 517.927.2

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ СУЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

Л.К. ЖАПСАРБАЕВА, Б.Е. КАНГУЖИН, М.Н. КОНЫРКУЛЖАЕВА

Аннотация. В работе исследуются дифференциальные операторы на произвольных геометрических графах без петель. Известные результаты для дифференциальных операторов на отрезке переносятся на дифференциальные операторы на графах. Для корректного определения максимального оператора на заданном графе необходимо выделить множество граничных вершин. Вершины не являющиеся граничными называются внутренними вершинами. Важно отметить, что максимальный оператор на графе определяется не только заданными дифференциальными выражениями на дугах, но и условиями типа Кирхгофа во внутренних вершинах графа. Для введенного максимального оператора доказан аналог формулы Лагранжа. Для произвольного набора граничных условии указан алгоритм построения сопряженных граничных форм. В заключении работы дано полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора.

Ключевые слова: ориентированный граф, условия Кирхгофа, самосопряженное сужение оператора, максимальный оператор.

Mathematics Subject Classification: 34B45, 34L20

1. Введение

Работа посвящена линейным дифференциальным операторам на графах. Спектральная теория дифференциальных операторов на многообразиях типа сети изучалась в работах Ю.В. Покорного и его учеников [1]–[5]. Из последних публикаций, посвященных различным аспектам теории обратных задач на графах, обратим внимание на работы [6]–[10]. В работах [11]–[14] изучаются спектральные свойства дифференциальных операторов на равносторонних квантовых графах типа звезда. В данной статье выведена формула Лагранжа для дифференциального оператора определенного на произвольном геометрическом графе, в отличие от работы [12], где приведено аналогичное соотношение для простого графа-звезды. Дано полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора определенного на графе. Перечисленные результаты являются новыми, ранее подобные выводы и положения были известны в [15] для дифференциальных операторов на отрезке.

2. Основные понятия

Пусть задан ориентированный граф $\Im = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{V}$ — множество вершин и $\mathcal{E}$ — множество дуг. Количество вершин графа $\mathcal{V}$ обозначим через N, а сами вершины будем нумеровать числами $1, \ldots, N$. Граничные вершины обозначим через Γ. Вершины из

L.K. Zhapsarbayeva, B.E. Kanguzhin, M.N. Konyrkulzhayeva, Selfadjoint restriction of maximal operator on graph.

Работа поддержана МОН Республики Казахстан (грант 0757/ГФ4 и грант 0085/ПЦФ-14).

Поступила 24 июля 2017 г.

множества $\mathcal{I} = \mathcal{V}\backslash\Gamma$ назовем внутренними вершинами [16, 17]. Дуга $e = [i, j]$, $e \in \mathcal{E}$, соединяющая вершины i и j, направлена от i к j. Часто вершину i обозначают через $\partial_- e$, а вместо вершины j пишут $\partial_+ e$ [18]. Не умаляя общности, будем считать длину каждой дуги равной единице. Множество вершин, соответствующие входящим дугам к вершине i обозначим через $\mathcal{V}_i^+$. А множество вершин, соответствующие исходящим дугам из вершины i обозначим через $\mathcal{V}_i^-$. Пусть $\chi = \sum_{i\in\Gamma}(|\mathcal{V}_i^+| + |\mathcal{V}_i^-|)$. Множество дуг, для которых $\partial_+ e = i$, обозначим через $\mathcal{E}_i^+$, а множество дуг, для которых $\partial_- e = i$, обозначим через $\mathcal{E}_i^-$. Считаем, что граф не имеет петель.

3. Определение максимального оператора на графе

В дальнейшем полезно ввести пространство

$$L_2(\Im) \doteqdot \prod_{e\in\mathcal{E}} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) \doteqdot [y_e(x_e), e \in \mathcal{E}]^T$$

(где $\vec{X} = (x_e, e \in \mathcal{E})$ и $\prod_{e\in\mathcal{E}}$ – декартово произведение подпространств) и с конечной нормой

$$||\vec{Y}||_{L_2(\Im)} = \sqrt{\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(\Im) \doteqdot \prod_{e\in\mathcal{E}} W_2^2(e).$$

Оператор Λ_{max}, задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$\Lambda_{max} y_e(x_e) = -y_e''(x_e) + q_e(x_e) y_e(x_e),\ x_e \in e \in \mathcal{E} \text{ или } 0 < x_e < 1 \tag{1}$$

на подмножестве $W_2^2(\Im)$, где в каждой внутренней вершине k при некотором β_k выполняются условия Кирхгофа [19]

$$y_e(1) = \beta_k, \quad \forall e \in \mathcal{E}_k^+, \tag{2}$$

$$y_e(0) = \beta_k, \quad \forall e \in \mathcal{E}_k^-,$$

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_k^+} y_e'(1) = \sum_{e\in\mathcal{E}_k^-} y_e'(0) \tag{3}$$

назовем максимальным оператором. Здесь $\{q_e(x_e), x_e \in e \in \mathcal{E},\ 0 < x_e < 1\}$ – набор вещественных непрерывных функций, обычно называемые потенциалами. Из условий (2) можно исключить набор неизвестных констант $\{\beta_k\}$. Тогда общее количество условий Кирхгофа во внутренних вершинах равно $2|\mathcal{E}| - \chi$. В следующем пункте приведена формула Лагранжа для максимального оператора Λ_{max}.

4. Формула Лагранжа для дифференциального оператора определенного на графе

При исследований дифференциальных операторов на отрезке важную роль играет формула Лагранжа. В данном пункте приведем аналог формулы Лагранжа в случае дифференциальных операторов на графах.

Лемма 1. *Для любых функций* $\vec{Y}(x) = \{y_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$, $\vec{V}(x) = \{v_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$ *из* $W_2^2(\Im)$ *выполняется тождество*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e \Lambda_{max} y_e(x) v_e(x) dx =$$
$$= \sum_{e\in\mathcal{E}} [-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1} + \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e y_e(x)\Lambda_{max} v_e(x)dx. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл из левой части соотношения (4)

$$\int_e \Lambda_{max} y_e(x)v_e(x)dx = \int_e \left(-y_e''(x) + q_e(x)y_e(x)\right) v_e(x)dx.$$

Двукратное интегрирование по частям дает возможность записать формулу

$$\int_e \Lambda_{max} y_e(x)v_e(x)dx = [-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1} +$$
$$+ \int_e y_e(x) \left(-v_e''(x) + q_e(x)v_e(x)\right) dx.$$

Откуда следует выражение (4). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Для любых функций* $\vec{Y}(x) = \{y_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$, $\vec{V}(x) = \{v_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$ *из области определения максимального оператора* Λ_{max} *выполняется тождество*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e \Lambda_{max} y_e(x)v_e(x)dx = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma} [-y_e'(1)v_e(1) + y_e(1)v_e'(1)] -$$
$$- \sum_{\partial_- e\in\Gamma} [-y_e'(0)v_e(0) + y_e(0)v_e'(0)] + \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e y_e(x)\Lambda_{max} v_e(x)dx. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть a — внутренняя вершина графа $\Im$. Множество $\mathcal{E}_a^+$ состоит из дуг e, направленных к вершине a, то есть выполняется условие $\partial_+ e = a$. Множество $\mathcal{E}_a^-$ состоит из дуг e, исходящих из вершины a, то есть выполняется условие $\partial_- e = a$. Из общей суммы $\sum_{e\in\mathcal{E}}[-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1}$ выделим только те слагаемые, которые соответствуют внутренней вершине a. Для одной дуги e с условием $\partial_+ e = a$ вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in\mathcal{E}}[-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $[-y_e'(1)v_e(1) + y_e(1)v_e'(1)]$. Точно также для всех дуг из $\mathcal{E}_a^+$ вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in\mathcal{E}}[-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $\sum_{e\in\mathcal{E}_a^+}[-y_e'(1)v_e(1) + y_e(1)v_e'(1)]$. Для одной дуги e с условием $\partial_- e = a$ вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in\mathcal{E}}[-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $[y_e'(0)v_e(0) - y_e(0)v_e'(0)]$. Точно также для всех дуг из $\mathcal{E}_a^-$ вклад вершины a в общую сумму$\sum_{e\in\mathcal{E}}[-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $\sum_{e\in\mathcal{E}_a^-}[y_e'(0)v_e(0) - y_e(0)v_e'(0)]$. Таким образом, общий вклад вершины a в сумму $\sum_{e\in\mathcal{E}}[-y_e'(x)v_e(x) + y_e(x)v_e'(x)]|_{x=0}^{x=1}$ можно записать в виде

$$I_a = \sum_{e\in\mathcal{E}_a^+} [-y_e'(1)v_e(1) + y_e(1)v_e'(1)] + \sum_{e\in\mathcal{E}_a^-} [y_e'(0)v_e(0) - y_e(0)v_e'(0)].$$

Учитывая условия Кирхгофа (2) для функций $\vec{Y}(x) = \{y_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$, $\vec{V}(x) = \{v_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$, последнее выражение перепишем в виде

$$I_a = \sum_{e\in\mathcal{E}_a^+} [-y_e'(1)\tilde{\beta} + \beta v_e'(1)] + \sum_{e\in\mathcal{E}_a^-} [y_e'(0)\tilde{\beta} - \beta v_e'(0)],$$

где $v_e(1) = \tilde\beta$ при $e \in \mathcal{E}_a^+$, а также $v_e(0) = \tilde\beta$ при $e \in \mathcal{E}_a^-$. Теперь учитывая условия Кирхгофа (3) для функций $\vec{Y}(x) = \{y_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$, $\vec{V}(x) = \{v_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$ выражение I_a перепишем в виде

$$I_a = \tilde\beta \left[-\sum_{e\in\mathcal{E}_a^+} y_e'(1) + \sum_{e\in\mathcal{E}_a^-} y_e'(0) \right] + \beta \left[\sum_{e\in\mathcal{E}_a^+} v_e'(1) - \sum_{e\in\mathcal{E}_a^-} v_e'(0) \right] = 0.$$

Лемма 2 доказана. □

Из леммы 2 следует, что суммарные вклады внутренних вершин во внеынтегральные члены (5) равны нулю. Иначе говоря, внеынтегральные члены выражений (5) содержат вклады только граничных вершин. Подобные формулы, согласно монографии [15], называются формулами Лагранжа. Формулу (5) можно обобщить в следующем направлении.

Рассмотрим при $k = 1, \dots, 2\chi$ граничные формы

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma} [\alpha_{ek} y_e(1) + \beta_{ek} y_e'(1)] + \sum_{\partial_- e\in\Gamma} [\alpha_{ek} y_e(0) + \beta_{ek} y_e'(0)], \tag{6}$$

где α_{ek}, β_{ek} — некоторые константы.

Теорема 1. *[Формула Лагранжа] Пусть $\{U_1, \dots, U_{2\chi}\}$ набор линейно независимых граничных форм. Тогда существует единственный набор граничных форм $\{T_1, \dots, T_{2\chi}\}$ таких, что для любых функций $\vec{Y}(x) = \{y_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$, $\vec{V}(x) = \{v_e(x_e), e \in \mathcal{E}\}$ из области определения максимального оператора Λ_{max} выполняется тождество*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e \Lambda_{max} y_e(x) v_e(x) dx = U_1(\vec{Y}) T_{2\chi}(\vec{V}) + U_2(\vec{Y}) T_{2\chi-1}(\vec{V}) + \dots +$$

$$+ U_{2\chi}(\vec{Y}) T_1(\vec{V}) + \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e y_e(x) \Lambda_{max} v_e(x) dx. \tag{7}$$

Доказательство. Введем разность

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e \Lambda_{max} y_e(x) v_e(x) dx - \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e y_e(x) \Lambda_{max} v_e(x) dx.$$

Согласно лемме 2, эта разность представима в виде

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma} [-y_e'(1) v_e(1) + y_e(1) v_e'(1)] - \sum_{\partial_- e\in\Gamma} [-y_e'(0) v_e(0) + y_e(0) v_e'(0)].$$

Таким образом, разность выражается через набор из 2χ граничных значений $\{y_e(1), y_e'(1), \partial_+ e \in \Gamma\}$, $\{y_e(0), y_e'(0), \partial_- e \in \Gamma\}$. Указанный набор граничных значений представляет 2χ линейно независимую систему. Поэтому указанный набор граничных значений можно выразить в виде линейной комбинации произвольных граничных форм $\{U_1, \dots, U_{2\chi}\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Для этого соотношения (6) надо рассматривать, как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\{y_e(1), y_e'(1), \partial_+ e \in \Gamma\}$, $\{y_e(0), y_e'(0), \partial_- e \in \Gamma\}$. Разрешая систему (6) относительно $\{y_e(1), y_e'(1), \partial_+ e \in \Gamma\}$, $\{y_e(0), y_e'(0), \partial_- e \in \Gamma\}$, получим

$$y_e(1) = \sum_{k=1}^{2\chi} \gamma_{ek} U_k(\vec{Y}),\ \partial_+ e \in \Gamma, \tag{8}$$

$$y_e'(1) = \sum_{k=1}^{2\chi} \epsilon_{ek} U_k(\vec{Y}),\ \partial_+ e \in \Gamma,$$

$$y_e(0) = \sum_{k=1}^{2\chi} \gamma_{ek} U_k(\vec{Y}),\ \partial_- e \in \Gamma,$$

$$y'_e(0) = \sum_{k=1}^{2\chi} \epsilon_{ek} U_k(\vec{Y}),\ \partial_- e \in \Gamma.$$

Поставляя указанные выражения в разность

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma} \left[-\left(\sum_{k=1}^{2\chi} \epsilon_{ek} U_k(\vec{Y}) \right) v_e(1) + \left(\sum_{k=1}^{2\chi} \gamma_{ek} U_k(\vec{Y}) \right) v'_e(1) \right] -$$
$$- \sum_{\partial_- e\in\Gamma} \left[-\left(\sum_{k=1}^{2\chi} \epsilon_{ek} U_k(\vec{Y}) \right) v_e(0) + \left(\sum_{k=1}^{2\chi} \gamma_{ek} U_k(\vec{Y}) \right) v'_e(0) \right].$$

Теперь остается сгруппировать правую часть последнего равенства относительно $\{U_k(\vec{Y}\}$, тогда получим

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^{2\chi} U_k(\vec{Y}) \left\{ \sum_{\partial_+ e\in\Gamma} [-\epsilon_{ek} v_e(1) + \gamma_{ek} v'_e(1)] + \sum_{\partial_- e\in\Gamma} [\epsilon_{ek} v_e(0) - \gamma_{ek} v'_e(0)] \right\}.$$

Если в последнем выражений суммы в квадратных скобках обозначить через

$$T_{2\chi-k+1}(\vec{V}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma} [-\epsilon_{ek} v_e(1) + \gamma_{ek} v'_e(1)] + \sum_{\partial_- e\in\Gamma} [\epsilon_{ek} v_e(0) - \gamma_{ek} v'_e(0)],$$

то получим требуемую формулу

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e \Lambda_{max} y_e(x) v_e(x) dx = \sum_{k=1}^{2\chi} U_k(\vec{Y}) T_{2\chi-k+1}(\vec{V}) + \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e y_e(x) \Lambda_{max} v_e(x) dx.$$

$\square$

Формула (7) называется формулой Лагранжа.

Из теоремы 1 сразу следует

Следствие 1. *Пусть* Λ *сужение оператора* Λ_{max} *на области определения* $D(\Lambda) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{max}) : U_k(\vec{Y}) = 0, \ldots, U_\chi(\vec{Y}) = 0\}$. *Тогда сопряженный оператор* Λ^* *также является сужением оператора* Λ_{max} *на области определения* $D(\Lambda^*) = \{\vec{V} \in D(\Lambda_{max}) : T_k(\vec{V}) = 0, \ldots, T_\chi(\vec{V}) = 0\}$, *и для любых* $\vec{Y} \in D(\Lambda)$ *и* $\vec{V} \in D(\Lambda^*)$ *справедливо равенство*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e \Lambda y_e(x) v_e(x) dx = \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_e y_e(x) \Lambda^* v_e(x) dx.$$

5. Самосопряженные сужения максимального оператора Λ_{max}

В данном пункте дадим полное описание всех самосопряженных сужений оператора Λ_{max}. Сначала введем минимальное сужение Λ_0 оператора Λ_{max}. Обозначим через $D(\Lambda_0)$ совокупность всех функций $\vec{Y}(x)$ из $D(\Lambda_{max})$, удовлетворяющих условиям

$$y_e(1) = 0,\ y'_e(1) = 0 \quad \text{при} \quad \partial_+ e \in \Gamma, \tag{9}$$
$$y_e(0) = 0,\ y'_e(0) = 0 \quad \text{при} \quad \partial_- e \in \Gamma.$$

Далее, введем минимальное сужение Λ_0 по формуле

$$\Lambda_0 \vec{Y} = \Lambda_{max} \vec{Y}, \quad \vec{Y} \in D(\Lambda_0).$$

Справедливы утверждения

I) для любых элементов $\vec{Y} \in D(\Lambda_0)$, $\vec{V} \in D(\Lambda_{max})$ имеет место соотношение

$$\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_{max} \vec{V} \rangle, \tag{10}$$

II) для любых элементов $\vec{Y}, \vec{V} \in D(\Lambda_0)$ верно равенство

$$\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_0 \vec{V} \rangle.$$

Из (10) следует операторное включение $\Lambda_{max} \subset \Lambda_0^*$.

Для исследования свойств минимального оператора удобно ввести операторы Λ_1 и Λ_2, являющиеся сужениями максимального оператора Λ_{max}. Пусть

$$D(\Lambda_1) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{max}) : y_e(1) = 0 \text{ при } \partial_+ e \in \Gamma, \ y_e(0) = 0 \text{ при } \partial_- e \in \Gamma\}$$

и $\Lambda_1 \vec{Y}(x) = \Lambda_{max} \vec{Y}(x)$ при $\vec{Y} \in D(\Lambda_1)$.

Пусть

$$D(\Lambda_2) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{max}) : y'_e(1) = 0 \text{ при } \partial_+ e \in \Gamma, \ y'_e(0) = 0 \text{ при } \partial_- e \in \Gamma\}$$

и $\Lambda_2 \vec{Y}(x) = \Lambda_{max} \vec{Y}(x)$ при $\vec{Y} \in D(\Lambda_2)$.

Предположение 1. *Для любой функций $\vec{F}(x)$ из $L_2(\Im)$ уравнение*

$$\Lambda_i \vec{Y}(x) = \vec{F}(x), \quad i = 1, 2 \tag{11}$$

имеет единственное решение в $D(\Lambda_i)$, $i = 1, 2$.

Замечание 1. *Операторное уравнение (11) на множестве $D(\Lambda_i)$, $i = 1, 2$ эквивалентно системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка на множестве дуг $\mathcal{E}$ с $2|\mathcal{E}| - \chi$ условиями Кирхгофа во внутренних вершинах $\mathcal{I}$ и χ условиями в граничных вершинах Γ. Таким образом, возникает система неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка на множестве дуг $\mathcal{E}$, общее решение которой содержит $2|\mathcal{E}|$ констант. Для их определения имеется $(2|\mathcal{E}| - \chi) + \chi = 2|\mathcal{E}|$ линейных условий. Следовательно, можно выписать некоторый определитель D_i, $i = 1, 2$ размерности $2|\mathcal{E}|$. Тогда однозначная разрешимость уравнения (11) эквивалентна тому, что выписанный определитель D_i, $i = 1, 2$ отличен от нуля.*

Следуя монографии [15], сформулируем следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть Λ_{max} — максимальный оператор на графе $\Im$, введенный в пункте 3 и пусть $\vec{F}(x)$ — функция из $L_2(\Im)$. Если выполнено предположение 1, то уравнение*

$$\Lambda_{max} \vec{Y}(x) = \vec{F}(x)$$

имеет решение $\vec{Y}(x)$, удовлетворяющее условиям (9) тогда и только тогда, когда $\vec{F}(x)$ ортогональны ко всем элементам из $Ker\Lambda_{max}$.

Доказательство. Согласно предположению 1 обозначим через $\vec{Y}(x)$ единственное решение операторного уравнения (11). Далее, обозначим через $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_\chi$ фундаментальную систему решений однородного операторного уравнения $\Lambda_{max} \vec{V} = 0$ удовлетворяющую условиям: все граничные формы $v_{kl}(1)$ при $\partial_+ e \in \Gamma$ и $v_{kl}(0)$ при $\partial_- e \in \Gamma$, кроме одной, равны нулю, а одна из форм равна 1. Такая фундаментальная система существует. Это следует из замечания 1, поскольку условие разрешимости эквивалентно отличию от нуля определителя D_1.

Применяя к функциям $\vec{Y}(x)$ и $\vec{V}_k(x)$ формулу Лагранжа, получим

$$\langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle = \langle \Lambda_{max} \vec{Y}, \vec{V}_k \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_{max} \vec{V}_k \rangle. \tag{12}$$

Но $\Lambda_{max}\vec{V}_k = 0$. Кроме того, из включения $\vec{Y} \in D(\Lambda_1)$ вытекает

$$\sum_{\partial_+ e\in\Gamma} y_e(1)v'_{kl}(1) - \sum_{\partial_- e\in\Gamma} y_e(0)v'_{kl}(0) = 0.$$

Следовательно, формула (12) примет вид

$$\langle\vec{F},\vec{V}_k\rangle = -\sum_{\partial_+ e\in\Gamma} y'_e(1)v_{kl}(1) + \sum_{\partial_- e\in\Gamma} y'_e(0)v_{kl}(0) =$$

$$= \begin{cases} -y'_e(1) & \text{если} \quad v_{kl}(1) = 1, \\ y'_e(0) & \text{если} \quad v_{kl}(0) = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует утверждение леммы 3: равенства (9) выполняются тогда и только тогда, когда $\langle\vec{F},\vec{V}_k\rangle = 0$, $k = 1,\ldots,\chi$. Таким образом, $\vec{F}(x)$ ортогональна ко всем решениям уравнения $\Lambda_{max}\vec{V} = 0$. □

Лемма 4. *Каковы бы ни были числа α_e,β_e при $\partial_+ e \in \Gamma$ и α_e,β_e при $\partial_- e \in \Gamma$ при выполнении предположения 1 существует функция $\vec{Y}(x) \in D(\Lambda_{max})$, удовлетворяющая условиям*

$$y'_e(1) = \beta_e,\ y_e(1) = \alpha_e \quad \textit{при} \quad \partial_+ e \in \Gamma,$$
$$y'_e(0) = \beta_e,\ y_e(0) = \alpha_e \quad \textit{при} \quad \partial_- e \in \Gamma.$$

Доказательство. Докажем сначала лемму 4 для случая, когда все $\alpha_e = 0$. Выберем $\vec{F}(x)$ из $L_2(\Im)$ так, что

$$\langle\vec{F},\vec{V}_k\rangle = \begin{cases} -\beta_e & \text{если} \quad v_{kl}(1) = 1, \\ \beta_e & \text{если} \quad v_{kl}(0) = 1, \end{cases} \tag{14}$$

где $\vec{V}_k$, $k = 1,\ldots,\chi$ — та же фундаментальная система, что и при доказательстве леммы 3. Такой элемент существует и притом даже в $Ker\Lambda_{max}$. Действительно, если положить

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{\chi} \mu_k \vec{V}_k,$$

то условия (14) будут системой уравнений относительно постоянных $\mu_1,\ldots,\mu_\chi$, определитель которой есть определитель Грама линейно независимых функций $\vec{V}_1,\ldots,\vec{V}_\chi$. Следовательно, он отличен от нуля. Обозначим через $\vec{V}$ решение уравнения $\Lambda_1\vec{V} = \vec{F}$. Тогда из формулы Лагранжа следует

$$\vec{V}'(1) = \beta_e \quad \text{при} \quad \partial_+ e \in \Gamma,$$
$$\vec{V}'(0) = \beta_e \quad \text{при} \quad \partial_- e \in \Gamma.$$

Итак, построенная функция $\vec{V}(x) \in D(\Lambda_{max})$ такая, что

$$\vec{V}'(1) = \beta_e,\ \vec{V}(1) = 0 \quad \text{при} \quad \partial_+ e \in \Gamma,$$
$$\vec{V}'(0) = \beta_e,\ \vec{V}(0) = 0 \quad \text{при} \quad \partial_- e \in \Gamma.$$

Меняя ролями наборы α_e и β_e, а также операторы Λ_1 и Λ_2, получим полное доказательство леммы 4. □

Теперь можно сформулировать утверждение относительно минимального оператора Λ_0.

Лемма 5. $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* = \Lambda_{max}$, $\Lambda_{max}^* = \Lambda_0$.

Лемма 5 доказывается точно также как доказано утверждение V §17 из монографии [15].

Основная теорема данного пункта.

Теорема 2. *При выполнении предположения 1 всякое самосопряженное расширение* Λ *оператора* Λ_0 *определяется линейно независимыми* $k = 1, \ldots, \chi$ *краевыми условиями вида*

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{\partial_+ e \in \Gamma} [\alpha_{ek} y_e(1) + \beta_{ek} y_e'(1)] + \sum_{\partial_- e \in \Gamma} [\alpha_{ek} y_e(0) + \beta_{ek} y_e'(0)] = 0, \tag{15}$$

где α_{ek}, β_{ek} *— некоторые константы, причем*

$$\sum_{\partial_+ e \in \Gamma} [\alpha_{ej} \bar{\beta}_{ek} - \bar{\alpha}_{ek} \beta_{ej}] = \sum_{\partial_- e \in \Gamma} [\alpha_{ej} \bar{\beta}_{ek} - \bar{\alpha}_{ek} \beta_{ej}] \tag{16}$$

при $j, k = 1, \ldots, \chi$.

Обратно, всякие линейно независимые краевые условия вида (15), удовлетворяющие соотношениям (16), определяют область определения некоторого самосопряженного расширения Λ *оператора* Λ_0, *если выполнено предположение 1.*

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 5 §18 из монографии [15], введем функций $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_\chi$. Точнее говоря, $\vec{V}_k$ из области определения $D(\Lambda_{max})$ с условиями

$$\begin{aligned} v_{ke}'(1) &= \alpha_{ek},\, v_{ke}(1) = -\beta_{ek} \quad \text{при} \quad \partial_+ e \in \Gamma, \\ v_{ke}'(0) &= -\alpha_{ek},\, v_{ke}(0) = \beta_{ek} \quad \text{при} \quad \partial_- e \in \Gamma. \end{aligned} \tag{17}$$

Согласно лемме 4, такие решения существуют. Тогда условия (15) при $j, k = 1, \ldots, \chi$ примут вид

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{\partial_+ e \in \Gamma} [y_e(1) v_{ke}'(1) - y_e'(1) v_{ke}(1)] - \sum_{\partial_- e \in \Gamma} [y_e(0) v_{ke}'(0) - y_e'(0) v_{ke}(0)] = 0.$$

Согласно результатам монографии [15], краевые условия (15) определяют область определения самосопряженного расширения Λ оператора Λ_0. Тогда и только тогда, когда все функции $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_\chi$, определенные согласно (17), также удовлетворяют соотношениям

$$U_k(\vec{Y}_j) = 0, \quad k, j = 1, \ldots, \chi.$$

Теорема 2 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный Ю.В. *О спектре некоторых задач на графах* // Успехи мат. науки. Т. 42, вып. 4. 1987. С. 128–129.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. *О краевой задаче на графе* // Дифференциальные уравнения. Т. 24. 1988. С. 701–703.
3. Покорный Ю.В., Прияднев В.Л., Аль-Обейд А. *Об осциляционных свойствах спектра краевой задачи на графе* // Матем. заметки. Т .60, вып. 3. 1996. С. 468–469.
4. Покорный Ю.В., Прияднев В.Л. *Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях* // Успехи мат. науки. Т. 59, вып 6. 2004. С. 115–150.
5. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прияднев В.Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* М.:ФИЗМАТЛИТ. 2005. 272 с.
6. M.I. Belishev *Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC methods* // Inverse problems. V. 35, iss 10. 2004. P. 4069–4088.
7. R. Carlson *Inverse eigenvalue problems on directed graphs* // Trans. Amer. Math. Soc. V. 351. 1999. P. 101–121.
8. P. Kurasov, F. Stenberg *On the inverse scattering problem on branching graphs* // J. Phys. A. Math. Gen. V. 20.2002. P. 647–672.
9. M. Ramirez Jorge *Green's Functions for Sturm-Liouville Problems on Directed Tree Graphs* // Revista Colombiana de Matemáticas. V. 46. 2012. P. 15–25.

10. Юрко В.А. *О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах* // Математ. заметки. Т. 79, вып 4. 2006. С. 619–630.
11. M. Astudillo, P. Kurasov, M. Usman *RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness* // Adv. Math. Phys. 2015.
12. P. Kurasov, M. Garjiani *Quantum graphs: PT-symmetry and reflection symmetry of the spectrum* // Journal of Mathematical Physics. V. 58. 2017.
13. M. Znojil *Quantum star-graph analogues of PT-symmetric square wells* // Can. J. Phys. V.90, iss 12. 2012. P.1287–1293 .
14. M. Znojil *Quantum star-graph analogues of PT-symmetric square wells: Part II. Spectra* // Can. J. Phys. V. 93, iss 7. 2014. P.765–768.
15. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969. 526 с.
16. Цой С., Цхай С.М. *Прикладная теория графов.* Алма-Ата:Наука. 1971. 499 с.
17. F. Harary *Graph theory.* Addison-Wesley Publishing Company. 1969. 274 p.
18. O. Post *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces* // Springer Science & Business Media. V. 2039. 2012.
19. Афанасьева Н.А., Булот Л.П. *Электротехника и электроника.* СПб.:СПбГУН и П.Т. 2010. 181 с.

Ляйля Курмантаевна Жапсарбаева,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
A15E3B4, г. Алматы, Казахстан
E-mail: leylazhk67@gmail.com

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
A15E3B4, г. Алматы, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru

Марал Нурлановна Коныркулжаева,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
A15E3B4, г. Алматы, Казахстан
E-mail: maralkulzha@gmail.com