ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 100-110.

УДК 517.925

# «КВАНТОВАНИЯ» ИЗОМОНОДРОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ $H^{\frac{7}{2}+1}$

**В.А. ПАВЛЕНКО, Б.И. СУЛЕЙМАНОВ**

**Аннотация.** Рассматриваются два совместных между собой линейных эволюционных уравнения с временами $s_1$ и $s_2$, зависящие от двух пространственных переменных. Эти эволюционные уравнения представляют собой аналоги временных уравнений Шредингера, определяемых двумя гамильтонианами $H^{\frac{7}{2}+1}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ $(k = 1, 2)$ системы $H^{\frac{7}{2}+1}$, которая состоит из пары совместных между собой гамильтоновых систем уравнений, допускающих применение метода изомонодромных деформаций. Из канонических временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{\frac{7}{2}+1}_{s_k}$, их данные аналоги возникают в результате формальной замены постоянной Планка на мнимую единицу. В терминах решений соответствующих линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений метода изомонодромных деформаций, условием совместности которых является гамильтонова система $H^{\frac{7}{2}+1}$, построены явные решения данных аналогов уравнений Шредингера. В конструкции этих явных решений ключевую роль имеет замена, которая ранее использовалась при построении решений аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами изомонодромной гамильтоновой системой Гарнье с двумя степенями свободы а также двух изомонодромных вырождений последней. Обсуждается вопрос о применимости данной замены и при построении решений аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами всей иерархии изомнодромных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, являющихся вырождениями этой системы Гарнье. Отмечена также связь решений гамильтоновых систем $H^{\frac{7}{2}+1}$ с некоторыми задачами современной нелинейной математической физики. В частности, показано, что решения этих гамильтоновых систем явным образом задаются совместными решениями уравнения Кортевега де Вриза $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ и неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка, посредством которых универсальным образом описывается влияние малой дисперсии на трансформации слабых гидродинамических разрывов в сильные.

**Ключевые слова:** гамильтоновы системы, квантование, уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, метод изомонодроных деформаций.

**Mathematics Subject Classification:** 34M56, 35Q41

## 1. Введение

Классическим гамильтоновым системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с $n$ степенями свободы

$$(\lambda_i)'_\tau = H'_{\mu_i}, \quad (\mu_i)'_\tau = -H'_{\lambda_i} \quad (i = 1, ..., n), \tag{1}$$

V.A. Pavlenko, B.I. Suleimanov, “Quantizations” of isomonodromic Hamilton system $H^{\frac{7}{2}+1}$.



*Поступила 15 сентября 2017 г.*

определяемых гамильтонианами $H(\tau, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n)$, в волновой квантовой механике сопоставляется временное уравнение Шредингера

$$\varepsilon \Psi'_\tau = H(\tau, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \ldots, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta_n})\Psi, \tag{2}$$

где посредством параметра $\varepsilon = i\hbar$ учитывается его зависимость от постоянной Планка $h = 2\pi\hbar$.

Около 30 лет назад вторым из авторов данной публикации было обнаружено, что уравнения вида (2) при $n = 1$ и $\varepsilon = 1$ возникают в контексте теории уравнений Пенлеве. Оказывается, [39], [40], [42], такие эволюционные уравнения связаны с представлением каждого из шести канонических ОДУ Пенлеве $\lambda''_{tt} = f_j(t, \lambda, \lambda'_t)$ $(j = 1, \ldots, 6)$ как через координату гамильтоновой системы с одной степенью свободы вида (1), так и в виде условия совместности линейных дифференциальных уравнений метода изомонодромных деформаций (ИДМ)

$$V''_{\zeta\zeta} = P(\zeta, \tau, \lambda, \lambda'_\tau)V, \quad V'_\tau = B(\zeta, \tau, \lambda, \lambda'_\tau)V'_\zeta - \frac{B_\zeta(\zeta, \tau, \lambda, \lambda'_\tau)}{2}V, \tag{3}$$

выписанных в классической работе Р. Гарнье [6].

В [39], [40] показано, что явными заменами вида $\Psi = V \exp(S(\tau, \zeta))$ совместные решения $V$ уравнений (3) переводятся в решения эволюционных уравнений

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = H(\tau, \zeta, \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta})\Psi \qquad (\varepsilon = 1). \tag{4}$$

Правые части уравнений (4), уже независящие от $\lambda(\tau)$ и $\mu(\tau)$, при конкретном выборе очередности действий операторов дифференцирования по переменной $\zeta$ и умножения на нее задаются гамильтонианами $H = H_j(\tau, \lambda, \mu)$ $(j = \overline{1, 6})$ гамильтоновых систем (1), исключение из которых импульсов $\mu(\tau)$ дает ОДУ второго порядка на координату $\lambda(\tau)$, совпадающее с соответствующим уравнением Пенлеве. Другой же выбор такой очередности допускает [42] символическую запись этих шести линейных эволюционных уравнений и в виде (2). (Следуя терминологии статьи [41], эволюционные уравнения вида (2) с постоянными $\varepsilon \neq i\hbar$ мы будем далее назвать «квантованиями» соответствующих гамильтоновых систем.)

В последнее десятилетие по тематике, касающейся связей уравнений ИДМ для ОДУ типа Пенлеве с эволюционными линейными уравнениями квантовой механики и (начиная с работы [36]) квантовой теории поля, написан также уже довольно большой ряд других работ [1]–[3], [7], [8], [14]–[17], [19]–[24], [26], [27], [32], [35]–[38], [41], [43]–[45].

В частности, в статьях [38], [42] в терминах соответствующих решений систем линейных уравнений ИДМ были построены и решения «квантований» (2) для трех совместных между собой изомонодромных гамильтоновых пар систем ОДУ с *двумя* степенями свободы. При этом в [38] рассматривалась ситуация так называемой системы Гарнье, возглавляющей целую иерархию изомономонодромных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, которые из этой системы Гарнье могут быть получены [11], [13] посредством процедуры последовательного вырождения. (В [42] строились «квантования» (2) пар гамильтоновых систем ОДУ, являющихся двумя низшими представителями этой иерархии). В Замечании 2 статьи [38] было выражено предположение о том, что с помощью данной процедуры конструкции [38] могут быть расширены и на всю данную иерархию вырождений системы Гарнье. Вероятно, это предположение справедливо. Но для реализации такого расширения процедуру последовательного вырождения, описанную в [11], [13], нужно еще обобщить на квантовые операторы, соответствующие не только классическим координатам, но и классическим импульсам (в отличие от известной процедуры последовательного вырождения иерархии шести классических ОДУ Пенлеве, для части из последовательных вырождений, приведенных в [11], [13], задействуются комбинации координат и импульсов). Осуществить же данное обобщение не так просто, поскольку гамильтонианы иерархий гамильтоновых систем, рассматриваемых в [11], [13], *квадратичны лишь по импульсам*, но не по координатам. В силу данной причины на настоящее время вопрос о подобном построении решений «квантований» (2) через решения соответствующих линейных уравнений ИДМ для всех членов иерархии вырождений системы Гарнье с двумя степенями свободы остается еще открытым.

Данная статья посвящена решению этого вопроса для одного из представителей данной иерархии – для так называемой [12] системы $H^{\frac{7}{2}+1}$, представляемой парой совместных между собой изомонодромных гамильтоновых систем (1) с гамильтонианами ($\gamma$ – постоянная)

$$H^{\frac{7}{2}+1}_{s_1}(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2) = -6s_1p_1^2+4q_2p_1p_2+2(q_1+s_1)q_2p_2^2+4\gamma p_1+4\gamma(q_1+s_1)p_2+\frac{3}{2}s_1q_1^3+ \\ +\frac{1}{2}q_1^2q_2-2s_1q_1q_2-\frac{1}{2}q_2^2-\frac{3}{2}s_1(3s_1^2-2s_2)q_1-\frac{1}{2}(5s_1^2-2s_2)q_2, \quad (5)$$

$$H^{\frac{7}{2}+1}_{s_2}(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2) = 2p_1^2-2q_2p_2^2-4\gamma p_2-\frac{1}{2}q_1^3+(q_1+s_1)q_2+\frac{(3s_1^2-2s_2)q_1}{2}, \quad (6)$$

и временами, соответственно, $\tau = s_1$, $\tau = s_2$.

Прежде чем приступить к изложению основного текста, укажем на то, что в первоначальном списке изомонодромных гамильтоновых вырождений системы Гарнье с двумя степенями свободы, предъявленном в статье [13], пара систем, определяемых гамильтонианами (5), (6), не была выписана (этот пробел из списка [13] был устранен Х. Кавамуко в статье [12]). Между тем гамильтонова система $H^{\frac{7}{2}+1}$, подобно классическим уравнениям Пенлеве, имеет связи с различными вопросами нелинейной математической физики:

1) в разделе 2 настоящей работы будет показано, что решения пары гамильтоновых систем, определяемых гамильтонианами (5), (6), могут быть выражены через совместные решения уравнения Кортевега де Вриза (КдВ)

$$u_t+u_{xxx}+uu_x=0 \quad (7)$$

и стационарной части его симметрии ($\beta$ – произвольная постоянная)

$$\frac{5\beta}{16}\left(u_{xxxx}+\frac{5uu_{xx}}{3}+\frac{5(u_x)^2}{6}+\frac{5u^3}{18}\right)'_x+2u+xu_x-3t(u_{xxx}+uu_x)=0, \quad (8)$$

посредством которых в ситуации общего положения описывается [28]–[30] влияние малой дисперсии на процессы трансформации слабых гидродинамических разрывов в сильные.

2) Д.П. Новиков указал авторам на то, что эта же гамильтонова система задает решения неавтономной гамильтоновой системы Хенона – Хейлеса с гамильтонианом ($\alpha$ – постоянная)

$$H_{HH} = \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_1^3+\frac{1}{2}q_1q_2^2-\frac{(\alpha+1/2)^2}{2q_2^2}-\frac{1}{2}\tau q_1, \quad (9)$$

введенной в рассмотрение в работе [9]. Посредством решений этой гамильтоновой системы могут быть представлены решения ОДУ четвертого порядка

$$w_{\tau\tau\tau\tau}-10(w^2w_{\tau\tau}+ww_\tau^2)+6w^5-\tau w-\alpha=0, \quad (10)$$

которые после [9] с самых различных точек рассматривались во множестве публикаций (см., например, [4], [5], [31]). Специальные решения ОДУ (10) с $\alpha = 0$ еще ранее изучались в широко цитируемой работе В. Перивала и Д. Шевица [18], посвященной некоторым интегрируемым моделям струнной теории.

## 2. Специальное изомонодромное решение уравнения КдВ и гамильтонова система $H^{\frac{7}{2}+1}$

**2.1.** Уравнение КдВ (7) является условием совместности систем линейных ОДУ метода обратной задачи рассеяния (МОЗР)

$$V_x = L(\lambda, t, x)V, \quad V_t = Q(\lambda, t, x)V, \tag{11}$$

где

$$L(\lambda, t, x) = \begin{pmatrix} -i\lambda & \frac{u}{6} \\ -1 & i\lambda \end{pmatrix},$$

$$Q(\lambda, t, x) = (-4i\lambda^3 + \frac{i\lambda u}{3} - \frac{u_x}{6})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{u}{6} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\lambda u_x}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_{xx}}{6} - \frac{u^2}{18} \\ \frac{u}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Совместные с ОДУ (8) его решения относятся к классу изомонодромных [33]: оказывается, для таких решений уравнения КдВ имеются фундаментальные решения линейных систем (11), которые удовлетворяют также системе линейных ОДУ

$$V_\lambda = \lambda^4 A(\lambda, t, x)V, \tag{12}$$

где $A(\lambda, t, x)$ — полиномиальная по $\lambda^{-1}$ матрица ($\beta$ – константа)

$$A(\lambda, t, x) = A_0(t, x) + \frac{A_1(t, x)}{\lambda} + \frac{A_2(t, x)}{\lambda^2} + \frac{A_3(t, x)}{\lambda^3} + \frac{A_4(t, x)}{\lambda^4} + \frac{A_5(t, x)}{\lambda^5} \tag{13}$$

с коэффициентами

$$A_0(t, x) = -5i\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1(t, x) = 5\beta \begin{pmatrix} 0 & \frac{u}{6} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(t, x) = i\begin{pmatrix} \frac{5\beta u}{12} - 12t & \frac{5\beta u_x}{12} \\ 0 & -\frac{5\beta u}{12} + 12t \end{pmatrix},$$

$$A_3(t, x) = \begin{pmatrix} -\frac{5\beta u_x}{24} & -\frac{5\beta u_{xx}}{24} - \frac{5\beta u^2}{72} + 2tu \\ \frac{5\beta u}{12} - 12t & \frac{5\beta u_x}{24} \end{pmatrix},$$

$$A_4(t, x) := i\begin{pmatrix} -\frac{5\beta u_{xx}}{48} - \frac{5\beta u^2}{96} + tu - x & -\frac{5\beta u_{xxx}}{48} - \frac{5\beta u u_x}{48} + tu_x \\ 0 & \frac{5\beta u_{xx}}{48} + \frac{5\beta u^2}{96} - tu + x \end{pmatrix},$$

$$A_5(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{5\beta u_{xxx}}{96} + \frac{5\beta u u_x}{96} - \frac{tu_x}{2} + \frac{1}{2} & \frac{5\beta u_{xxxx}}{96} + \frac{5\beta u_x^2}{96} + \frac{5\beta u u_{xx}}{72} + \frac{5\beta u^3}{576} + \frac{xu}{6} - \frac{tu^2}{6} - \frac{tu_{xx}}{2} \\ -\frac{5\beta u_{xx}}{48} - \frac{5\beta u^2}{96} + tu - x & -\frac{5\beta u_{xxx}}{96} - \frac{5\beta u u_x}{96} + \frac{tu_x}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Условием совместности первой из систем уравнений пары (11) с системой (12) как раз и является ОДУ (8). При этом имеет место тождество $\det A_5 = -(\theta^0)^2 = const$, представляющее собой ОДУ четвертого порядка, которому наряду с уравнениями КдВ (7) и ОДУ (8) удовлетворяют все решения $u(t, x)$ последних.

*Замечание* 1. Точный вид системы линейных уравнений (12) был нами найден, исходя из вида интеграла Фурье

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \exp((x\lambda - t\lambda^3 + \beta\lambda^5/16))d\lambda, \tag{14}$$

который, как было отмечено в [28], удовлетворяет линейным частям уравнения КдВ (7) и ОДУ (8). Коэффициенты данной системы были определены с учетом требования того, чтобы пара уравнений МОЗР (11), отвечающее совместным решением (7) и ОДУ (8), обладало фундаментальным решением $V(\lambda,t,x)$ с лишь одной существенно особой точкой $\lambda=\infty$, имеющим при $\lambda\to\infty$ в некотором секторе комплексной $\lambda$-плоскости асимптотику

$$V(\lambda,t,x)\approx \exp\left\{-i(\lambda x+4t\lambda^3+\beta\lambda^5+const\ln\lambda)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\},$$

главный член которой схож с подинтегральным выражением в (14). Таким образом, аналогии между этим интегралом Фурье и совместным решением пары уравнений (7), (8) распространяются на уровень соответствующих уравнений ИДМ. (В соответствии с общей теорией подобных изомонодромных аналогов интегралов Фурье специального вида и практикой их применения – см. [34], [46], а также ссылки в последней работе).

С помощью преобразования

$$V(\lambda,t,x)=T(\lambda,t,x)\Phi(\zeta,t,x)=\begin{pmatrix}i\lambda&-1\\1&0\end{pmatrix}\Phi(\zeta,t,x),\quad \zeta=-\lambda^2$$

совместные решения систем (11), (12) переводятся в решения трех несколько более компактных систем линейных ОДУ

$$\begin{cases}\Phi_x=L_1(\zeta,t,x)\Phi,\\ \Phi_t=Q_1(\zeta,t,x)\Phi,\\ \Phi_\zeta=B(\zeta,t,x)\Phi\end{cases}\tag{15}$$

с матрицами – коэффициентами

$$L_1(\zeta,t,x)=T^{-1}LT=\begin{pmatrix}0&1\\ \zeta-\frac{u}{6}&0\end{pmatrix},$$

$$Q_1(\zeta,t,x)=T^{-1}QT=\begin{pmatrix}\frac{u_x}{6}&-4\zeta-\frac{u}{3}\\ \frac{u_{xx}}{6}+\frac{u^2}{18}+\frac{u}{3}\zeta-4\zeta^2&-\frac{u_x}{6}\end{pmatrix},$$

$$B(\zeta,t,x)=-\frac{1}{2\lambda}(\lambda^4T^{-1}AT-T^{-1}T'_\lambda)=\begin{pmatrix}B_{11}(\zeta,t,x)&B_{12}(\zeta,t,x)\\ B_{21}(\zeta,t,x)&B_{22}(\zeta,t,x)\end{pmatrix},$$

где

$$B_{11}(\zeta,t,x)=-B_{22}(\zeta,t,x)=-\frac{5\beta u_x}{48}-\frac{5\beta u_{xxx}}{192\zeta}-\frac{5\beta uu_x}{192\zeta}+\frac{tu_x}{4\zeta}-\frac{1}{4\zeta},$$

$$B_{12}(\zeta,t,x)=\frac{5\beta\zeta}{2}+\frac{5\beta u}{24}-6t+\frac{5\beta u_{xx}}{96\zeta}+\frac{5\beta u^2}{192\zeta}-\frac{tu}{2\zeta}+\frac{x}{2\zeta},$$

$$B_{21}(\zeta,t,x)=\frac{5\beta\zeta^2}{2}-\frac{5\beta u\zeta}{24}-6t\zeta-\frac{5\beta u^2}{576}-\frac{5\beta u_{xx}}{96}+\frac{tu}{2}+\frac{x}{2}-\\ -\frac{5\beta u_{xxxx}}{192\zeta}-\frac{5\beta u_x^2}{192\zeta}-\frac{5\beta uu_{xx}}{144\zeta}-\frac{5\beta u^3}{1152\zeta}-\frac{xu}{12\zeta}+\frac{tu^2}{12\zeta}+\frac{tu_{xx}}{4\zeta}.$$

Для удобства изложения далее, без ограничения общности, будем считать, что $\beta=0.4$.

**2.2.** Гамильтонова система $H^{\frac{7}{2}+1}$, определяемая парой гамильтонианов (5), (6), имеет вид совместных между собой систем ОДУ

$$\begin{cases}\frac{\partial q_1}{\partial s_1}=4p_2q_2-12s_1p_1+4\gamma,\\ \frac{\partial q_2}{\partial s_1}=4p_1q_2+4(q_1+s_1)(p_2q_2+\gamma),\\ \frac{\partial p_1}{\partial s_1}=-4\gamma p_2-2p_2^2q_2-\frac{9}{2}s_1(q_1^2-s_1^2)-q_1q_2+2s_1q_2-3s_1s_2,\\ \frac{\partial p_2}{\partial s_1}=-4p_1p_2-2(q_1+s_1)p_2^2-\frac{1}{2}(q_1^2-5s_1^2+2s_2)+2s_1q_1+q_2,\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = 4p_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = -4p_2 q_2 - 4\gamma, \\ \frac{\partial p_1}{\partial s_2} = \frac{3}{2} q_1^2 - q_2 + s_2 - \frac{3s_1^2}{2}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial s_2} = -q_1 - s_1 + 2p_2^2. \end{cases} \tag{17}$$

Заменами

$$\mu_1 = \sqrt[5]{4} p_1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} q_1, \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} q_2, \quad \lambda_2 = -\sqrt[5]{16} p_2;$$

$$t_1 = \sqrt[5]{2} \left( s_2 - \frac{3s_1^2}{2} \right), \quad t_2 = -\sqrt[5]{8} s_1; \quad \theta^0 = 2\gamma \tag{18}$$

эти две гамильтоновы системы ОДУ сводятся к совместным между собой гамильтоновым системам

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t_1} = \frac{\partial K_1}{\partial \mu_1} = 2\mu_1, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial t_1} = \frac{\partial K_1}{\partial \mu_2} = 2\lambda_1 - \lambda_2^2 - t_2, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial K_1}{\partial \lambda_1} = -2\mu_2 + 3\lambda_1^2 + t_1, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial t_1} = -\frac{\partial K_1}{\partial \lambda_2} = 2\mu_2 \lambda_2 - \theta^0, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t_2} = \frac{\partial K_2}{\partial \mu_1} = 2\mu_2 \lambda_2 - \theta^0, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial t_2} = \frac{\partial K_2}{\partial \mu_2} = 2\mu_2 + 2\mu_1 \lambda_2 - t_2 \lambda_2^2 - t_2^2 - \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + \lambda_1 t_2 - t_1, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t_2} = -\frac{\partial K_2}{\partial \lambda_1} = \mu_2(\lambda_2^2 + 2\lambda_1 - t_2) - \theta^0 \lambda_2, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial t_2} = -\frac{\partial K_2}{\partial \lambda_2} = -2\mu_1 \mu_2 + 2\mu_2 \lambda_2 (\lambda_1 + t_2) - \theta^0 (\lambda_1 + t_2) \end{cases} \tag{20}$$

с гамильтонианами

$$K_1 = \mu_1^2 + (2\lambda_1 - \lambda_2^2 - t_2)\mu_2 - \lambda_1^3 - t_1 \lambda_1 + \theta^0 \lambda_2,$$

$$K_2 = \mu_2^2 + 2\lambda_2 \mu_1 \mu_2 - \theta^0 \mu_1 - \mu_2(\lambda_1^2 + (\lambda_1 + t_2)\lambda_2^2 - t_2 \lambda_1 + t_1 + t_2^2) + \theta^0 t_2 \lambda_2 + \theta^0 \lambda_1 \lambda_2,$$

временами $\tau = t_1$, $\tau = t_2$, координатами $\lambda_1, \lambda_2$ и импульсами $\mu_1, \mu_2$.

**2.3.** Пара гамильтоновых систем ОДУ (19), (20) в недавней работе Х. Каваками [10] была представлена в виде условия совместности следующих трех систем линейных уравнений ИДМ

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial t_1} = (\zeta + 2\lambda_1 - t_2) Y_2, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t_1} = Y_1, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial t_2} = \mu_1 Y_1 + (-\zeta^2 + \zeta(2t_2 - \lambda_1) + 2\mu_2 - \lambda_1^2 + t_2 \lambda_1 - t_1 - t_2^2) Y_2, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t_2} = (-\zeta + \lambda_1 + t_2) Y_1 - \mu_1 Y_2, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial \zeta} = \left( \frac{\mu_2 \lambda_2}{\zeta} - \mu_1 \right) Y_1 + \left( \zeta^2 + \zeta(\lambda_1 - 2t_2) + \lambda_1^2 + t_1 + t_2^2 - \mu_2 - t_2 \lambda_1 + \frac{\theta^0 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_2^2}{\zeta} \right) Y_2, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial \zeta} = \left( \zeta - \lambda_1 - t_2 + \frac{\mu_2}{\zeta} \right) Y_1 + \left( \mu_1 + \frac{\theta^0 - \mu_2 \lambda_2}{\zeta} \right) Y_2. \end{cases} \tag{23}$$

Условием совместности систем (21), (22) является справедливость следующих соотношений

$$(\mu_1)_{t_1} = 3\lambda_1^2 - 2\mu_2 + t_1, \quad (\lambda_1)_{t_1} = 2\mu_1, \quad (\mu_2)_{t_1} = (\lambda_1)_{t_2}.$$

Из них следует, что координата $\lambda_1$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$(\lambda_1)_{t_2} = -\frac{1}{4} (\lambda_1)_{t_1 t_1 t_1} + 3\lambda_1 (\lambda_1)_{t_1} + \frac{1}{2},$$

которая заменами

$$\lambda_1 = -\frac{u}{12} + \frac{t_2}{2}, \quad x = t_1 + \frac{3}{4}t_2^2, \quad 4t = t_2 \tag{24}$$

переводится в решение уравнения КдВ (7). Таким образом ясно, что пара систем уравнений (21), (22) фактически является $L-A$ парой для уравнения КдВ (7), эквивалентной традиционно используемой в МОЗР $L-A$ паре, представляемой двумя первыми из трех систем уравнений (15). Эти две пары сводятся друг к другу с помощью совсем простого преобразования. Третье из систем уравнений (15), представляющее собой систему линейных ОДУ с независимой переменной $\zeta$, по своей структуре также весьма схоже с составляющей (23) систем линейных уравнений ИДМ для пары гамильтоновых систем (19), (20). С учетом этих замечаний довольно нетрудно прийти к выводу, формулируемому в следующем абзаце.

При $\beta = 0.4$ замены (18), (24) и

$$\lambda_2 = \frac{\frac{u_{xxx}}{96} + \frac{uu_x}{96} - \frac{tu_x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\theta^0}{2}}{\frac{u_{xx}}{48} + \frac{u^2}{96} - \frac{tu}{2} + \frac{x}{2}} = \frac{\frac{u_{xxxx}}{96} + \frac{u_x^2}{96} + \frac{uu_{xx}}{72} + \frac{u^3}{576} + \frac{xu}{12} - \frac{tu^2}{12} - \frac{tu_{xx}}{4}}{\frac{u_{xxx}}{96} + \frac{uu_x}{96} - \frac{tu_x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\theta^0}{2}},$$

$$\mu_1 = -\frac{u_x}{24}, \quad \mu_2 = \frac{u_{xx}}{48} + \frac{u^2}{96} - \frac{tu}{2} + \frac{x}{2},$$

$$Y_1 = e^{\frac{\theta^0}{2}\ln\zeta}\Phi_2, \quad Y_2 = e^{\frac{\theta^0}{2}\ln\zeta}\Phi_1$$

устанавливают эквивалентность между системами линейных уравнений ИДМ (11), (12) и тремя системами уравнений (21)–(23), а также позволяют выразить общие решения пары совместных между собой гамильтоновых систем, определяемых гамильтонианами (5), (6), через совместные решения $u(t,x)$ уравнения КдВ (7) и ОДУ (8).

## 3. Решения «квантований» системы $H^{\frac{7}{2}+1}$

**3.1.** $2\times 2$ матрица

$$M = \Phi^{-1}(\eta,t,x)\Phi(\zeta,t,x), \tag{25}$$

построенная по фундаментальному совместному решению $\Phi$ линейных систем ОДУ (15), удовлетворяет двум *скалярным* пространственно двумерным эволюционным уравнениям – уравнению

$$(\eta-\zeta)M_x = \frac{\zeta+\eta}{\zeta-\eta}(M_\eta + M_\zeta) + \eta M_{\eta\eta} - \zeta M_{\zeta\zeta} + g_1(t,x,\eta,\zeta)M \tag{26}$$

с временем $x$ и уравнению

$$(\zeta-\eta)M_t = \frac{4(6t(\zeta+\eta)-\zeta^2-\eta^2)}{(\zeta-\eta)}(M_\eta + M_\zeta) + 4\eta(6t-\zeta)M_{\eta\eta} + 4\zeta(\eta-6t)M_{\zeta\zeta} + g_2(t,x,\eta,\zeta)M \tag{27}$$

с временем $t$. Коэффициенты $g_1(t,x,\eta,\zeta)$, $g_2(t,x,\eta,\zeta)$ этих двух уравнений задаются формулами ($(A_n)_{ij}$ – элементы коэффициентов $(A_n)$ матрицы (13))

$$g_1(t,x,\eta,\zeta) = r_1(t,x,\eta,\zeta) + r_2(t,x,\eta,\zeta),$$

$$g_2(t,x,\eta,\zeta) = 24t(r_1(t,x,\eta,\zeta) + r_2(t,x,\eta,\zeta)) + 4(r_3(t,x,\eta,\zeta) + r_4(t,x,\eta,\zeta)),$$

в которых

$$r_1(t,x,\eta,\zeta) = \zeta^4 - \eta^4 - 12t(\zeta^3-\eta^3) + (x+36t^2)(\zeta^2-\eta^2) - 6xt(\zeta-\eta) - \frac{1}{4}\frac{\zeta-\eta}{\zeta\eta}(\theta^0)^2,$$

$$r_2(t,x,\eta,\zeta)=\left(\frac{u_x^2}{576}+\frac{u}{12}(A_5)_{21}-\frac{1}{2}(A_5)_{12}+\left(\frac{u^2}{72}+2x\right)\left(\frac{u}{24}-3t\right)+6xt\right)(\zeta-\eta),$$

$$r_3(t,x,\eta,\zeta)=\zeta\eta(\eta^3-\zeta^3)-12t\zeta\eta(\eta^2-\zeta^2)+\left((x+36t^2)\zeta\eta-\frac{x^2}{4}\right)(\eta-\zeta)+\frac{1}{4}\frac{\zeta^2-\eta^2}{\zeta\eta}(\theta^0)^2,$$

$$r_4(t,x,\eta,\zeta)=\left(\frac{u_x}{24}(A_5)_{11}+\left(3t-\frac{u}{24}\right)(A_5)_{12}+\left(\frac{u^2}{576}+\frac{u_{xx}}{96}-\frac{ut}{4}-\frac{x}{4}\right)(A_5)_{21}-\frac{x^2}{4}\right)(\zeta-\eta).$$

В свою очередь, замена

$$M=(\zeta-\eta)\exp\left(S(t,x)\right)W,$$

определяемая функцией $S(t,x)$, которая удовлетворяет двум непротиворечивым соотношениям

$$S_x(t,x)=f_1(t,x)=-\frac{r_2(t,x,\eta,\zeta)}{\zeta-\eta},\quad S_t=f_2(t,x)=\frac{24tr_2(t,x,\eta,\zeta)+4r_4(t,x,\eta,\zeta)}{\zeta-\eta}$$

$(12f_1(t,x)'_t=12f_2(t,x)'_x=u_{xx}+u^2/2)$, каждое совместное решение уравнений (26), (27) переводит в совместное решение пары линейных эволюционных уравнений

$$(\zeta-\eta)W_x=\zeta W_{\zeta\zeta}-\eta W_{\eta\eta}+W_\zeta-W_\eta-$$
$$-\left[\zeta^4-\eta^4-12t(\zeta^3-\eta^3)+(x+36t^2)(\zeta^2-\eta^2)-6xt(\zeta-\eta)-\frac{1}{4}\frac{\zeta-\eta}{\zeta\eta}(\theta^0)^2\right]W$$

$$\begin{aligned}(\zeta-\eta)W_t&=4\eta(6t-\zeta)W_{\eta\eta}+4\zeta(\eta-6t)W_{\zeta\zeta}+24t(W_\eta-W_\zeta)-4(\zeta-\eta)(W_\eta+W_\zeta)+\\&+\left[24t\left(\zeta^4-\eta^4-12t(\zeta^3-\eta^3)+(x+36t^2)(\zeta^2-\eta^2)-6xt(\zeta-\eta)-\frac{1}{4}\frac{\zeta-\eta}{\zeta\eta}(\theta^0)^2\right)+\right.\\&\left.+4\left(\zeta\eta(\eta^3-\zeta^3)-12t\zeta\eta(\eta^2-\zeta^2)+((x+36t^2)\zeta\eta-\frac{x^2}{4})(\eta-\zeta))+\frac{1}{4}\frac{\zeta^2-\eta^2}{\zeta\eta}(\theta^0)^2\right)\right]W,\end{aligned}$$

которые уже *не содержат* зависимости от $u(t,x)$ в своих коэффициентах.

Переход в этих двух последних эволюционных уравнений к независимым переменным

$$s_1=\sqrt[5]{4}(-2t),\quad s_2=\frac{x}{\sqrt[5]{2}},\quad \xi=\sqrt[5]{4}(\zeta+\eta-4t),\quad \rho=\sqrt[5]{16}\zeta\eta,$$

и замена

$$W=\exp\left(tx^2-16t^3x-\frac{384}{5}t^5\right)(\zeta\eta)^{\frac{\theta^0}{2}}\Psi$$

сводит их к паре эволюционных уравнений

$$\begin{aligned}\Psi_{s_1}&=-6s_1\Psi_{\xi\xi}+2\rho(\xi+s_1)\Psi_{\rho\rho}+4\rho\Psi_{\xi\rho}+2(\xi+s_1)(1+\theta^0)\Psi_\rho+\\&+2(1+\theta^0)\Psi_\xi+\left[\frac{3}{2}s_1\xi^3+\frac{1}{2}\rho\xi^2-\frac{1}{2}\rho^2-2s_1\xi\rho-\frac{3}{2}s_1(3s_1^2-2s_2)\xi-\frac{1}{2}(5s_1^2-2s_2)\rho\right]\Psi,\end{aligned}\tag{28}$$

$$\Psi_{s_2}=2\Psi_{\xi\xi}-2\rho\Psi_{\rho\rho}-2(1+\theta^0)\Psi_\rho+\left[-\frac{1}{2}\xi^3+\rho\xi+\frac{1}{2}(3s_1^2-2s_2)\xi+s_1\rho\right]\Psi\tag{29}$$

с полиномиальными коэффициентами.

Последнюю же пару уравнений за счет операторных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\xi-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}=1,\qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\rho-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}=1\tag{30}$$

символически можно записать как “квантования” ($\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial s_i} = H^{\frac{7}{2}+1}_{s_i}(s_1, s_2, \xi, \rho, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho})\Psi \qquad (i = 1, 2), \tag{31}$$

определяемые гамильтонианами (5), (6) гамильтоновой системы $H^{\frac{7}{2}+1}$.

*Замечание* 2. За счет соотношений (30) уравнения (28), (29) можно записать и в виде ($\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial s_i} = H^{\frac{7}{2}+1}_{s_i}(s_1, s_2, \xi, \rho, \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho})\Psi \qquad (i = 1, 2).$$

Таким образом, конструкции разделов 2 и 3 дают решения таких “квантований” (31). Эти решения явным образом выписаны через решения совместных уравнений ИДМ (21)–(23). При этом коэффициенты этих уравнений ИДМ также явным образом выражаются через множество совместных решений классических гамильтоновых систем ОДУ с гамильтонианами (5), (6).

## 4. Заключение

При построении предъявленных в статье решений «квантований» гамильтоновой изомонодромной системы $H^{\frac{7}{2}+1}$ существенным образом использовалась замена (25). Ключевую роль такая замена играла также при построении решений «квантований» системы Гарнье с двумя степенями в статье [38] и при построении решений «квантований» двух низших представителей иерархии вырождений этой системы в статье [42]. Из результатов этих двух статей и настоящей работы напрашивается предположение о том, что данная замена (для несколько иных целей она ранее использовалась Д.П. Новиковым в [36] – см. также формулу (2.3.36) в [25]) должна помочь и при построении решений «квантований» всей данной иерархии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. A. Bloemendal, B. Virag *Limits of spiked random matrices I* // Probability Theory and Related Fields. 2013. V. 156 No. 3–4. P. 795–825.
2. A. Bloemendal, B. Virag *Limits of spiked random matrices II* // arXiv:1109.3704. 2011.
3. R. Conte, I. Dornic *The master Painlevé VI heat equation* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. V. 352. No. 10. P. 803–806.
4. P.A. Clarkson, N. Joshi, A. Pickering *Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach* // Inverse problems.1999. V. 15. No. 1. P. 175–187.
5. M.V. Demina, N.A. Kudryashov *Polygons of differential equations for finding exact solutions* // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. V. 33. No. 5. P. 1480–1496.
6. R. Garnier *Sur des equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Ann. Sci. Ecole Normale Sup (3). 1912. V. 29. P. 1–126.
7. T. Grava, A Its., A. Kapaev, F. Mezzadri *On the Tracy–Widom$_\beta$ Distribution for $\beta = 6$* // SIGMA. 2016. V. 12. 105. 26 PP.
8. A.M. Grundland, D. Riglioni *Classical-quantum correspondence for shape-invariant systems* // J. Phys. A. 2015. V. 48. No. 24. P. 245201–245215.
9. A. Hone *Non-autonomous Hénon-Heiles systems* // Physica D. 1998. V. 118. No. 1–2. P. 1—16.
10. H. Kawakami Four-dimensional Painleve-type equations associated with ramified linear equations III: Garnier systems and Fuji-Suzuki systems, // arXiv: 1703.01379v2 (2017).
11. H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai *Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations*, // arXiv:1209.3836 (2012).

12. H. Kawamuko *On the Garnier system of half-integer type in two variables* // Funkcial. Ekvac. 2009. V. 52. No. 2. P. 181—201.
13. H. Kimura *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure* // Annali di Matematica pura et applicata IV. 1989. V. 155. No. 1. P. 25–74.
14. A.M. Levin, M.A. Olshanetsky, A.V. Zotov *Planck Constant as Spectral Parameter in Integrable Systems and KZB Equations* //Journal of High Energy Physics. 2014. V. 2014. 109. (29 PP). DOI: 10.1007/JHEP10(2014)109.
15. H. Nagoya *Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painlevé equations* // J. Math. Phys. 2011. V. 52. No. 8. 16 PP.
16. H. Nagoya, Y. Yamada *Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations* // Annales Henri Poincare. 2014. V. 15. No. 3. P. 313—344.
17. D.P. Novikov *A monodromy problem and some functions connected with Painlevé 6* // Intrenational Conference "Painleve equations and Related Topics". Proceedings of International Conference. St.-Petrsburg, Euler International Mathematical Institute. 2011. P. 118–121.
18. V. Periwal, D. Shevitz *Unitary-matrix models as exactly solvable string theories* // Phys. Rev. Lett 1990. V. 64. No. 12. P. 1326–1329.
19. H. Rosengren *Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model. II. Schrödinger equation*// arXiv:1312.5879, (2013).
20. H. Rosengren *Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model: a summary* Commun. Math. Phys. 2015. V. 349. No. 3. P. 1143–1170.
21. I. Rumanov *Hard edge for beta-ensembles and Painleve III* //arXiv:1212.533 (2012).
22. I. Rumanov *Classical integrability for beta-ensembles and general Fokker-Planck equations* // J. Math. Phys. 2015. V. 56. No. 1. 16 PP.
23. I. Rumanov *Beta ensembles, quantum Painlevé equations and isomonodromy systems* // arXiv:1408.3847. (2014).
24. I. Rumanov *Painlevé representation of Tracy-Widom$_\beta$ distribution for $\beta = 6$* // arXiv:1408.3779. (2014).
25. M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo *Holonomic quantum fields*// Publ. Rims Kyoto Uiv. 1979 V 15. No. 17. P. 201–278.
26. A. Zabrodin, A. Zotov *Quantum Painlevé-Calogero correspondence* // J. Math. Phys. 2012. V. 53. No. 7. 073507. 19 PP.
27. A. Zabrodin, A. Zotov *Classical-quantum correspondence and functional relations for Painlevé equations* // Constr. Approx. 2015. V. 41. No. 3. P. 385—423.
28. Гарифуллин Р. Н., Сулейманов Б.И. *От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам* // Журн. Экс. и Теор. Физ. 2010. Т. 137. Вып. 1. С. 149–165.
29. Гарифуллин Р.Н. *Сдвиг фазы для совместного решения уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 2. С. 80—86
30. Гарифуллин Р.Н. *О совместном решении уравнения КДВ и дифференциального уравнения пятого порядка* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 4. С. 53—62.
31. Громак В.И. *О нелинейных дифференциальных уравнениях четвертого порядка со свойством Пенлеве* // Дифф. уравн. 2006. Т. 42. № 8. С. 1017–1026.
32. Зотов А.В., Смирнов А.В. *Модификация расслоений, эллиптические интегрируемые системы и связанные задачи* // ТМФ. 2013. Т. 177. № 1. С. 3—67.
33. Итс А.Р. *«Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 530—565.
34. Китаев А.В. *Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве* // Записки ЛОМИ. 1991. Т. 187. С. 53–74.
35. Левин А.М., Ольшанецкий М.А., Зотов А.В. *Классификация изомонодромных задач на эллиптических кривых* // УМН. 2014. Т.69. Вып. 1(415). С. 39—124.

36. Новиков Д.П. *О системе Шлезингера с матрицами размера* $2 \times 2$ *и уравнении Белавина – Полякова – Замолодчикова* // ТМФ. 2009. Т. 161. № 2. С. 191–203.
37. Новиков Д.П., Романовский Р.К., Садовничук С.Г. *Некоторые новые методы конечнозонного интегрирования солитонных уравнений* Новосибирск: Наука, 2013, 251 с.
38. Новиков Д.П., Сулейманов Б.И. *"Квантования" изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы* // ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 39–57.
39. Сулейманов Б.И. *Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа: Ин-т мат. 1988. С. 93–102.
40. Сулейманов Б.И. *Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Дифф. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
41. Сулейманов Б.И. *"Квантования" второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его* $L, A$ *пар* // Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156. № 3. С. 364–378.
42. Сулейманов Б.И. *"Квантования" высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы* //Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. Вып. 3. С. 52–62.
43. Сулейманов Б.И. *Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве и старая квантовая теория* // Тезисы международной конференции, посвященной памяти И.Г. Петровского «23-е совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И.Г. Петровского», Москва, 2011. С. 356–357.
44. Сулейманов Б.И. *"Квантовая" линеаризация уравнений Пенлеве как компонента их* $L - A$ *пар* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 2. С. 127–135.
45. Сулейманов Б.И. *Квантовые аспекты интегрируемости третьего уравнения Пенлеве и решения временного уравнения Шредингера с потенциалом Морса* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 3. С. 141–159.
46. Сулейманов Б.И. *Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае* // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 106. Вып. 6. С. 375–380.

Виктор Александрович Павленко,
ФГБОУ ВО БГАУ,
ул.50-летия Октября, 34,
450001, г. Уфа, Россия
E-mail: PVA100186@mail.ru

Булат Ирекович Сулейманов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: bisul@mail.ru