ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 87-99.

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.Н. ОРЕШИНА

Аннотация. Рассматриваются неограниченные нормальные операторы, действующие в действительном гильбертовом пространстве. Стандартный подход к решению спектральных задач, связанных с такими операторами, состоит в применении комплексификации — перехода в комплексное пространство. При этом окончательные результаты обычно необходимо декомплексифицировать, т.е. выполнить обратный переход. Однако процесс декомплексификации часто оказывается нетривиальным.

Целью настоящей статьи является перенесение классических результатов спектральной теории на случай нормальных операторов, действующих в действительном гильбертовом пространстве. Приводятся два действительных варианта спектральной теоремы для таких операторов. Построено функциональное исчисление, порожденное действительным спектральным разложением нормального оператора. Приводятся примеры использования полученного функционального исчисления для представления экспоненты от нормального оператора.

Ключевые слова: неограниченный нормальный оператор, действительное гильбертово пространство, комплексификация, спектральная теорема, функциональное исчисление.

Mathematics Subject Classification: 47B15

1. Введение

Многие результаты теории нормальных операторов опираются на спектральную теорему [1]–[5], которая сопоставляет каждому нормальному оператору N разложение единицы E, определенное на борелевских подмножествах $\mathbb{C}$ и сосредоточенное на спектре оператора N, что позволяет с помощью E представить оператор в виде некоторого интеграла. При этом обычно предполагается, что оператор N действует в комплексном гильбертовом пространстве, а в действительном случае рекомендуется переходить к комплексификации. Тем не менее, во многих приложениях, например, в методах вычислений [6]–[14], желательно иметь утверждения, сформулированные непосредственно в терминах действительного пространства.

В статье обсуждается построение действительного спектрального разложения для неограниченного нормального оператора, действующего в действительном гильбертовом пространстве. В § 2 напоминаются основные сведения о неограниченных нормальных операторах и их комплексификации. В § 3 для формулировки спектральной теоремы используется представление нормального оператора в виде суммы самосопряженного и кососопряженного операторов. В результате оператор раскладывается в сумму двух интегралов, а спектральное разложение состоит из двух семейств операторов, определенных на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$ и действующих в действительном гильбертовом пространстве.

M.N. Oreshina, Spectral decomposition of a normal operator in a real Hilbert space.

Поступила 22 мая 2016 г.

Несмотря на естественность такого подхода, он оказывается не очень удачным, так как его не удается распространить на один из важнейших результатов спектральной теории — построение функционального исчисления. Поэтому в § 4 приводится другой вариант спектральной теоремы, а в § 5 — соответствующая теорема о функциональном исчислении. В этом случае спектральное разложение также представляет собой совокупность двух семейств операторов, действующих в действительном гильбертовом пространстве, но определенных на борелевских подмножествах верхней комплексной полуплоскости.

2. Комплексификация нормального оператора

Пусть $\mathbf{H}_\mathbb{R}$ — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathbb{R}$.

Пусть $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ — линейный неограниченный оператор. Будем предполагать, что область определения $D(N_\mathbb{R})$ оператора $N_\mathbb{R}$ является всюду плотной в $\mathbf{H}_\mathbb{R}$. Сопряженный оператор ${N_\mathbb{R}}^*$ определяют аналогично случаю комплексного гильбертова пространства [3]. Оператор $A_\mathbb{R}$ называют *самосопряженным*, если $A_\mathbb{R} = {A_\mathbb{R}}^*$. Оператор $B_\mathbb{R}$ будем называть *кососопряженным*, если $B_\mathbb{R} = -{B_\mathbb{R}}^*$. Оператор $N_\mathbb{R}$ называют *нормальным*, если он плотно определен, замкнут и удовлетворяет условию $N_\mathbb{R}{N_\mathbb{R}}^* = {N_\mathbb{R}}^*N_\mathbb{R}$. Аналогично комплексному случаю [3, теорема 13.32] доказывается, что для нормального оператора выполняется соотношение $D(N_\mathbb{R}) = D({N_\mathbb{R}}^*)$. Очевидно, самосопряженный и кососопряженный операторы являются нормальными.

Лемма 1. *Пусть $B_\mathbb{R}\colon D(B_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ — кососопряженный оператор. Тогда для всех $\varphi \in D(B_\mathbb{R})$ справедливо $\langle B_\mathbb{R}\varphi, \varphi\rangle_\mathbb{R} = 0$.*

Доказательство. Сводится к непосредственным вычислениям. □

Линейное пространство $\mathbf{H}_\mathbb{R} \times \mathbf{H}_\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{C}$ с законом внешнего умножения на комплексные числа $(\alpha + i\beta)(\varphi, \psi) = (\alpha\varphi - \beta\psi, \alpha\psi + \beta\varphi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\varphi, \psi) \in \mathbf{H}_\mathbb{R} \times \mathbf{H}_\mathbb{R}$, будем называть [15, 16, 17, 18, 19] *комплексификацией* действительного гильбертова пространства $\mathbf{H}_\mathbb{R}$ и обозначать $\mathbf{H}_\mathbb{C}$. Элементы из $\mathbf{H}_\mathbb{C}$ удобно записывать в виде $\varphi+i\psi$, где $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{R}$, i – мнимая единица. Будем отождествлять $\mathbf{H}_\mathbb{R}$ с подпространством $\mathbf{H}_\mathbb{R} \times \{0\}$ пространства $\mathbf{H}_\mathbb{C}$. Очевидно, $\mathbf{H}_\mathbb{C}$ является комплексным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle\varphi_1 + i\psi_1, \varphi_2 + i\psi_2\rangle_\mathbb{C} = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mathbb{R} + \langle\psi_1, \psi_2\rangle_\mathbb{R} + i\langle\psi_1, \varphi_2\rangle_\mathbb{R} - i\langle\varphi_1, \psi_2\rangle_\mathbb{R}.$$

Комплексификацией оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ называют [16]–[19] оператор $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ с областью определения $D(N_\mathbb{C}) = D(N_\mathbb{R}) \times D(N_\mathbb{R})$, заданный по правилу

$$N_\mathbb{C}(\varphi + i\psi) = N_\mathbb{R}\varphi + iN_\mathbb{R}\psi, \qquad \varphi, \psi \in D(N_\mathbb{R}).$$

Предложение 2. *Пусть оператор $N_\mathbb{C}$ является комплексификацией оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$, причем $D(N_\mathbb{R})$ является всюду плотной в $\mathbf{H}_\mathbb{R}$. Тогда*

(a) *область определения $D(N_\mathbb{C})$ оператора $N_\mathbb{C}$ является всюду плотной в $\mathbf{H}_\mathbb{C}$;*
(b) *оператор ${N_\mathbb{C}}^*$, сопряженный к $N_\mathbb{C}$, является комплексификацией сопряженного оператора ${N_\mathbb{R}}^*$;*
(c) *для нормального оператора $N_\mathbb{R}$ оператор $N_\mathbb{C}$ также является нормальным.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Символами $\mathbf{0}_\mathbb{C}\colon \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ и $\mathbf{0}_\mathbb{R}\colon \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ будем обозначать нулевые операторы, а $\mathbf{1}_\mathbb{C} : \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ и $\mathbf{1}_\mathbb{R} : \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ — тождественные операторы. Очевидно, $\mathbf{0}_\mathbb{C}$ является комплексификацией $\mathbf{0}_\mathbb{R}$, а $\mathbf{1}_\mathbb{C}$ — комплексификацией $\mathbf{1}_\mathbb{R}$.

Обратным к неограниченному оператору $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ назовем оператор ${N_\mathbb{R}}^{-1}\colon \mathbf{H}_\mathbb{R} \to D(N_\mathbb{R})$, удовлетворяющий равенствам

$$N_\mathbb{R}{N_\mathbb{R}}^{-1}\varphi = \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{H}_\mathbb{R}; \qquad {N_\mathbb{R}}^{-1}N_\mathbb{R}\psi = \psi, \quad \psi \in D(N_\mathbb{R}).$$

Пусть $N_\mathbb{C}$ — замкнутый оператор. Множество $\rho(N_\mathbb{C})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\lambda\mathbf{1}_\mathbb{C} - N_\mathbb{C}$ имеет ограниченный обратный, называют *резольвентным множеством* [3]–[5] оператора $N_\mathbb{C}$, а функцию $\lambda \mapsto (\lambda\mathbf{1}_\mathbb{C} - N_\mathbb{C})^{-1}$ — резольвентой. Дополнение $\sigma(N_\mathbb{C})$ к резольвентному множеству называют *спектром* оператора $N_\mathbb{C}$. Спектр замкнутого оператора является [3, 5] замкнутым множеством. Можно показать [3], что спектр самосопряженного оператора лежит на действительной оси. Для нормального оператора $N_\mathbb{R}$, действующего в пространстве $\mathbf{H}_\mathbb{R}$, будем также использовать вспомогательные множества: проекции спектра его комплексификации $N_\mathbb{C}$ на действительную и мнимую оси

$$\sigma^{\mathrm{Re}}(N_\mathbb{R}) = \sigma^{\mathrm{Re}}(N_\mathbb{C}) = \big\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(N_\mathbb{C})\big\},$$
$$\sigma^{\mathrm{Im}}(N_\mathbb{R}) = \sigma^{\mathrm{Im}}(N_\mathbb{C}) = \big\{\operatorname{Im}\lambda : \lambda \in \sigma(N_\mathbb{C})\big\},$$

проекцию спектра его комплексификации $N_\mathbb{C}$ на неотрицательную мнимую полуось

$$\sigma^{\mathrm{Im}\,+}(N_\mathbb{R}) = \sigma^{\mathrm{Im}\,+}(N_\mathbb{C}) = \big\{\operatorname{Im}\lambda : \lambda \in \sigma(N_\mathbb{C}), \operatorname{Im}\lambda \geq 0\big\},$$

чисто действительный спектр

$$\sigma^0(N_\mathbb{R}) = \sigma^0(N_\mathbb{C}) = \{\lambda \in \sigma(N_\mathbb{C}) : \operatorname{Im}\lambda = 0\},$$

а также верхнюю часть спектра его комплексификации $N_\mathbb{C}$ (относительно действительной оси)

$$\sigma^+(N_\mathbb{R}) = \sigma^+(N_\mathbb{C}) = \{\lambda \in \sigma(N_\mathbb{C}) : \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}.$$

Для $\omega \subset \mathbb{C}$ через $\overline{\omega} \subset \mathbb{C}$ будем обозначать множество $\{\overline{\xi}\colon \xi \in \omega\}$, состоящее из сопряженных чисел. Таким образом, множество $\overline{\omega}$ симметрично множеству ω относительно действительной оси. Отметим, что обозначение $\overline{\omega}$ часто используют для замыкания множества ω, но в настоящей статье замыкание множества ω будем обозначать через $[\omega]$.

Через $J\colon \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ будем обозначать оператор, определяемый формулой

$$J(\varphi + i\psi) = \varphi - i\psi, \qquad \varphi, \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{R}.$$

Очевидно, что $J^2 = \mathbf{1}_\mathbb{C}$ и $J^{-1} = J$. Заметим, что оператор J является сопряженно-линейным, то есть $J(\varphi + \psi) = J\varphi + J\psi$, $J(\xi\varphi) = \bar{\xi}J\varphi$ для всех $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}$.

Приведем необходимое и достаточное условие, при котором оператор $N_\mathbb{C}$ можно декомплексифицировать, то есть представить в виде комплексификации оператора, действующего в $\mathbf{H}_\mathbb{R}$. Аналогичное утверждение приведено в [16, лемма 3.5].

Лемма 3. *Оператор $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ является комплексификацией некоторого оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда он коммутирует с оператором J или, что эквивалентно, выполняется соотношение $JN_\mathbb{C}J = N_\mathbb{C}$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

В следующем предложении утверждается, что спектр и резольвентное множество комплексификации симметричны относительно действительной оси.

Предложение 4. *Пусть $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ — комплексификация оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$. Тогда $\overline{\rho(N_\mathbb{C})} = \rho(N_\mathbb{C})$ и $\overline{\sigma(N_\mathbb{C})} = \sigma(N_\mathbb{C})$.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично изложенному в [16, лемма 4.1]. □

3. Первая спектральная теорема (на действительной оси)

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{C})$ банахову алгебру [2]–[4] всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathbf{H}_\mathbb{C}$. Аналогично определим $\mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{R})$. Оператор $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{C})$ (или $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{R})$) называют *проектором*, если $P^2 = P$. Оператор $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{C})$ называют *самосопряженным*, если $\langle P\varphi, \psi\rangle_\mathbb{C} = \langle \varphi, P\psi\rangle_\mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{C}$. Оператор $P \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{C})$ будем называть *кососопряженным*, если $\langle P\varphi, \psi\rangle_\mathbb{C} = -\langle \varphi, P\psi\rangle_\mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{C}$. Аналогично определим самосопряженный и кососопряженный операторы в $\mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{R})$. Отметим, что последние определения можно рассматривать как частные случаи определений неограниченных самосопряженных и кососопряженных операторов из предыдущего параграфа. Очевидно, для ограниченного кососопряженного оператора также справедлива лемма 1.

Пусть Ω — борелевское подмножество $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. (*Комплексным*) *разложением единицы* [3] на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, сосредоточенным на множестве Ω, назовем отображение $E\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{C})$, обладающее свойствами:

1) $E\big(\mathbb{R}\setminus\Omega\big) = \mathbf{0}_\mathbb{C}$ $\Big(E\big(\mathbb{C}\setminus\Omega\big) = \mathbf{0}_\mathbb{C}\Big)$; $\quad E(\Omega) = \mathbf{1}_\mathbb{C}$;
2) для любого $\omega \in \Sigma$ оператор $E(\omega)$ является самосопряженным проектором;
3) для всех ω', $\omega'' \in \Sigma$ справедливо $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$;
4) для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$, $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$, выполняется $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$;
5) для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{C}$ функция $E_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E(\omega)\varphi, \psi\rangle_\mathbb{C}$ является комплексной мерой [3, 20, 21] на Σ.

Напомним спектральную теорему для нормального оператора $N_\mathbb{C}$, действующего в комплексном гильбертовом пространстве. Комплексное разложение единицы, о котором идет речь в этой теореме, будем называть (*комплексным*) *спектральным разложением оператора* $N_\mathbb{C}$ и обозначать через $E^{N_\mathbb{C}}$, чтобы подчеркнуть, что оно связано с оператором $N_\mathbb{C}$.

Теорема 5 ([3, теорема 13.33])**.** *Пусть $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ — нормальный оператор. Тогда существует единственное комплексное разложение единицы $E^{N_\mathbb{C}}$, сосредоточенное на $\sigma(N_\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$, для которого выполняется соотношение*

$$\langle N_\mathbb{C}\varphi, \psi\rangle_\mathbb{C} = \int_\mathbb{C} \xi\, dE^{N_\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(N_\mathbb{C}), \quad \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{C}. \tag{1}$$

Кроме того, $E^{N_\mathbb{C}}(\omega)S = SE^{N_\mathbb{C}}(\omega)$ для всякого множества $\omega \subset \Sigma$ и всякого оператора $S \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{C})$, коммутирующего с оператором $N_\mathbb{C}$ в том смысле, что $SN_\mathbb{C} \subseteq N_\mathbb{C}S$.

Пусть задано спектральное разложение $E^{N_\mathbb{C}}$ нормального оператора $N_\mathbb{C}$. *Множеством существенных значений* измеримой по Борелю функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называют [3, 5] пересечение множеств вида $\big[f(\omega)\big]$ для всех $\omega \in \Sigma$, таких что $E^{N_\mathbb{C}}(\omega) = \mathbf{1}_\mathbb{C}$, где $[\cdot]$ означает замыкание множества. Функцию f называют [3, 5] *существенно ограниченной относительно* $E^{N_\mathbb{C}}$, если множество ее существенных значений ограничено.

В комплексном гильбертовом пространстве справедлива следующая теорема о функциональном исчислении.

Теорема 6 ([3, теоремы 13.24, 13.25, 13.27])**.** *Пусть $E^{N_\mathbb{C}}$ — спектральное разложение нормального оператора $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$. Каждой измеримой по Борелю функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ формула*

$$\big\langle \Psi_\mathbb{C}(f)\varphi, \psi\big\rangle_\mathbb{C} = \int_\mathbb{C} f(\xi)\, dE^{N_\mathbb{C}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D\big(\Psi_\mathbb{C}(f)\big), \quad \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{C}, \tag{2}$$

сопоставляет плотно определенный замкнутый оператор

$$\Psi_\mathbb{C}(f)\colon D\big(\Psi_\mathbb{C}(f)\big) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$$

с областью определения $D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big) = \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} : \int_{\mathbb{C}} |f|^2\, dE^{N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\varphi} < \infty\Big\}$*. При этом отображение* $\Psi_{\mathbb{C}}$ *обладает следующими свойствами:*

(a) *Для всех* $\varphi \in D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big)$ *выполняется соотношение*

$$\|\Psi_{\mathbb{C}}(f)\varphi\|^2_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{C}} |f|^2\, dE^{N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\varphi}.$$

(b) *Оператор* $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$ *является нормальным, и справедливы равенства*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f)^* = \Psi_{\mathbb{C}}(\bar{f}),$$
$$\Psi_{\mathbb{C}}(f)\Psi_{\mathbb{C}}(f)^* = \Psi_{\mathbb{C}}\big(|f|^2\big) = \Psi_{\mathbb{C}}(f)^*\Psi_{\mathbb{C}}(f).$$

(c) *Если функция* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *существенно ограничена относительно* $E^{N_{\mathbb{C}}}$*, то оператор* $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$ *ограничен.*

(d) *Для любых измеримых по Борелю функций* $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *справедливы включения*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) + \Psi_{\mathbb{C}}(g) \subseteq \Psi_{\mathbb{C}}(f+g), \qquad \Psi_{\mathbb{C}}(f)\Psi_{\mathbb{C}}(g) \subseteq \Psi_{\mathbb{C}}(fg).$$

Если при этом функция g *ограничена, то*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) + \Psi_{\mathbb{C}}(g) = \Psi_{\mathbb{C}}(f+g), \qquad \Psi_{\mathbb{C}}(f)\Psi_{\mathbb{C}}(g) = \Psi_{\mathbb{C}}(fg).$$

(e) *Спектр* $\sigma\big(\Psi_{\mathbb{C}}(f)\big)$ *оператора* $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$ *есть множество существенных значений функции* f.

Формулу (2) часто сокращенно записывают в виде $\Psi_{\mathbb{C}}(f) = \int_{\mathbb{C}} f\, dE^{N_{\mathbb{C}}}$.

Следующую теорему называют [3] *принципом замены меры.*

Теорема 7. *Пусть* E *— комплексное разложение единицы на* σ*-алгебре* Σ*, сосредоточенное на множестве* Ω*, и* $\Omega' \in \Sigma$*. Предположим, что задано отображение* $g\colon \Omega \to \Omega'$*, для которого из* $\omega' \in \Sigma$ *следует* $g^{-1}(\omega') \in \Sigma$*. Тогда отображение* $E'\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}})$*, заданное формулой* $E'(\omega') = E\big(g^{-1}(\omega)\big)$*, является комплексным разложением единицы, сосредоточенным на* Ω'*, при этом*

$$\int_{\mathbb{C}} f\, dE'_{\varphi\psi} = \int_{\mathbb{C}} f \circ g\, dE_{\varphi\psi}$$

для всякой измеримой по Борелю функции $f\colon \Omega' \to \mathbb{C}$*, а также* φ *и* ψ*, для которых хотя бы один из интегралов существует.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично изложенному в [3, теорема 13.28]. □

Следствие 8. *Если в предположениях теоремы 7 имеет место вложение* $\Omega' \subset \mathbb{R}$*, то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dE'_{\varphi\psi} = \int_{\mathbb{C}} f \circ g\, dE_{\varphi\psi}.$$

Доказательство. Следует из теоремы 7. □

Предложение 9. *Пусть* $N_{\mathbb{C}}\colon D(N_{\mathbb{C}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ *— комплексификация нормального оператора* $N_{\mathbb{R}}\colon D(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$*. Тогда для операторов* $E^{N_{\mathbb{C}}}(\omega)$ *спектрального разложения оператора* $N_{\mathbb{C}}$ *выполняется соотношение*

$$JE^{N_{\mathbb{C}}}(\omega)J = E^{N_{\mathbb{C}}}(\overline{\omega}), \qquad \omega \in \Sigma.$$

Доказательство. Следует из предложения 2, леммы 3, теоремы 5 и теоремы 6(b). □

Следствие 10. *Пусть* $A_{\mathbb{C}}\colon D(A_{\mathbb{C}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ *— комплексификация самосопряженного оператора* $A_{\mathbb{R}}\colon D(A_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$*. Тогда операторы* $E^{A_{\mathbb{C}}}(\omega)$*,* $\omega \in \Sigma$*, спектрального разложения оператора* $A_{\mathbb{C}}$ *коммутируют с оператором* J *и, следовательно, представляют собой комплексификации некоторых операторов.*

Доказательство. Так как $E^{A_\mathbb{C}}$ сосредоточено на $\sigma(A_\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$, то $JE^{A_\mathbb{C}}(\omega)J = E^{A_\mathbb{C}}(\overline{\omega}) = E^{A_\mathbb{C}}(\omega)$. □

Теорема 11. *Пусть $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ — комплексификация нормального оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$, а $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — измеримая по Борелю функция. Тогда оператор $\Psi_\mathbb{C}(f)$ обладает свойством $J\Psi_\mathbb{C}(f)J = \Psi_\mathbb{C}(\widetilde{f})$, где $\widetilde{f}(\xi) = \overline{f(\overline{\xi})}$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Следствие 12. *Пусть $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ — комплексификация нормального оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$, а $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — измеримая по Борелю функция, обладающая свойством $f(\xi) = \overline{f(\overline{\xi})}$. Тогда оператор $\Psi_\mathbb{C}(f)$ коммутирует с оператором J и, следовательно, представляет собой комплексификацию некоторого оператора.*

Доказательство. Следует из теоремы 11. □

Предложение 13. *Пусть $N_\mathbb{C}\colon D(N_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ — нормальный оператор. Тогда существуют самосопряженный оператор $A_\mathbb{C}\colon D(A_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$ и кососопряженный оператор $B_\mathbb{C}\colon D(B_\mathbb{C}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{C} \to \mathbf{H}_\mathbb{C}$, такие что*

(a) *справедливы представления $N_\mathbb{C} = A_\mathbb{C} + B_\mathbb{C}$, ${N_\mathbb{C}}^* = A_\mathbb{C} - B_\mathbb{C}$;*
(b) *для их спектров справедливы формулы $\sigma(A_\mathbb{C}) = \sigma^{\mathrm{Re}}(N_\mathbb{C})$, $\sigma(B_\mathbb{C}) = i\,\sigma^{\mathrm{Im}}(N_\mathbb{C})$;*
(c) *операторы $A_\mathbb{C}$ и $B_\mathbb{C}$ коммутируют на $D(N_\mathbb{C}{N_\mathbb{C}}^*)$;*
(d) *если $N_\mathbb{C}$ — комплексификация нормального оператора $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$, то операторы $A_\mathbb{C}$ и $B_\mathbb{C}$ коммутируют с оператором J и, следовательно, представляют собой комплексификации некоторых операторов.*

Доказательство. Введем вспомогательные функции $f(\xi) = \mathrm{Re}\,\xi$, $g(\xi) = i\,\mathrm{Im}\,\xi$, и в соответствии с теоремой 6 положим

$$A_\mathbb{C} = \Psi_\mathbb{C}(f) = \int_\mathbb{C} \mathrm{Re}\,\xi\, dE^{N_\mathbb{C}}(\xi), \tag{3}$$

$$D(A_\mathbb{C}) = \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_\mathbb{C} : \int_\mathbb{C} \big(\mathrm{Re}\,\xi\big)^2\, dE^{N_\mathbb{C}}_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty\Big\},$$

$$B_\mathbb{C} = \Psi_\mathbb{C}(g) = \int_\mathbb{C} i\,\mathrm{Im}\,\xi\, dE^{N_\mathbb{C}}(\xi), \tag{4}$$

$$D(B_\mathbb{C}) = \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_\mathbb{C} : \int_\mathbb{C} \big(\mathrm{Im}\,\xi\big)^2\, dE^{N_\mathbb{C}}_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty\Big\}.$$

При этом, очевидно, справедливы равенства $N_\mathbb{C} = A_\mathbb{C} + B_\mathbb{C}$, ${N_\mathbb{C}}^* = A_\mathbb{C} - B_\mathbb{C}$.

Остальные утверждения теоремы проверяются непосредственно. □

Следствие 14. *Пусть $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ — нормальный оператор. Тогда существуют самосопряженный оператор $A_\mathbb{R}\colon D(A_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ и кососопряженный оператор $B_\mathbb{R}\colon D(B_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$, такие что справедливы представления $N_\mathbb{R} = A_\mathbb{R} + B_\mathbb{R}$, ${N_\mathbb{R}}^* = A_\mathbb{R} - B_\mathbb{R}$. При этом операторы $A_\mathbb{R}$ и $B_\mathbb{R}$ коммутируют на $D(N_\mathbb{R}{N_\mathbb{R}}^*)$.*

Доказательство. Следует из предложения 13. □

Пусть Ω — борелевское подмножество $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Действительным разложением единицы* на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, сосредоточенным на множестве Ω, назовем отображение $E\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_\mathbb{R})$, обладающее свойствами:

1) $E\big(\mathbb{R} \setminus \Omega\big) = \mathbf{0}_\mathbb{R}\ \Big(E\big(\mathbb{C} \setminus \Omega\big) = \mathbf{0}_\mathbb{R}\Big)$; $\quad E(\Omega) = \mathbf{1}_\mathbb{R}$;
2) для любого $\omega \in \Sigma$ оператор $E(\omega)$ является самосопряженным проектором;
3) для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$ справедливо $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$;

4) для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$, $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$, выполняется $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$;
5) для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ функция $E_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E(\omega)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}}$ является действительной мерой на Σ.

Из свойств 1 и 3 следует, что $E(\varnothing) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ и $E(\omega \cap \Omega) = E(\omega)$. Из свойства 3 также следует, что любые два проектора $E(\omega)$ и $E(\omega')$ коммутируют. Из свойства 2 следует, что для всех $\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ мера $E_{\varphi\varphi}(\omega) = \langle E(\omega)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{R}}$ является положительной.

Пусть $P_{\mathbb{R}} \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}})$ — самосопряженный проектор. Очевидно, оператор $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}}$ также является самосопряженным проектором. Через $\mathcal{R}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}})$ обозначим образ оператора $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}}$. Пусть Δ — борелевское подмножество неотрицательной действительной оси $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ или верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$. *Действительным косым разложением единицы в подпространстве* $\mathcal{R}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}})$ на σ-алгебре Σ всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}^+$ или $\mathbb{C}^+$, сосредоточенным на множестве Δ, назовем отображение $G\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}})$, обладающее свойствами:

1) $G\big(\mathbb{R}^+ \setminus \Delta\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ $\Big(G\big(\mathbb{C}^+ \setminus \Delta\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}\Big)$; $\quad \big(G(\Delta)\big)^2 = -\mathbf{1}_{\mathbb{R}} + P_{\mathbb{R}}$;
2) для любого $\omega \in \Sigma$ оператор $G(\omega)$ является кососопряженным;
3) для всех $\omega', \omega'', \omega''' \in \Sigma$ справедливо
$$G(\omega' \cap \omega'' \cap \omega''') = -G(\omega')G(\omega'')G(\omega''');$$
4) для всех $\omega', \omega'' \in \Sigma$, $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$, выполняется $G(\omega' \cup \omega'') = G(\omega') + G(\omega'')$;
5) для любых $\varphi, \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ функция $G_{\varphi\psi}(\omega) = \langle G(\omega)\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}}$ является действительной мерой на Σ.

Из свойств 1 и 3 следует, что $G(\varnothing) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ и $G(\omega \cap \Delta) = G(\omega)(\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}}) = (\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}})G(\omega)$. Из свойства 3 также следует, что $\big(G(\omega)\big)^3 = -G(\omega)$. Из леммы 1 и свойства 2 следует, что $G_{\varphi\varphi}(\omega) = \langle G(\omega)\varphi, \varphi\rangle_{\mathbb{R}} = 0$.

Аналогично определим *комплексное косое разложение единицы в подпространстве* $\mathcal{R}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}} - P_{\mathbb{C}})$, соответствующее проектору $P_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}(\mathbf{H}_{\mathbb{C}})$.

Теорема 15. *Пусть $N_{\mathbb{R}}\colon D(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — нормальный оператор. Тогда существуют действительное разложение единицы $E^{A_{\mathbb{R}}}$, сосредоточенное на $\sigma^{\mathrm{Re}}(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}$; самосопряженный проектор $P_{\mathbb{R}}$ и действительное косое разложение единицы $G^{B_{\mathbb{R}}}$ в подпространстве $\mathcal{R}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}})$, сосредоточенное на $\sigma^{\mathrm{Im}\,+}(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}^+$; для которых выполняется соотношение*
$$\langle N_{\mathbb{R}}\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\, dE^{A_{\mathbb{R}}}_{\varphi\psi}(\alpha) + \int_{0}^{+\infty} \beta\, dG^{B_{\mathbb{R}}}_{\varphi\psi}(\beta), \qquad \varphi \in D(N_{\mathbb{R}}), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}. \tag{5}$$
При этом любые два оператора $E^{A_{\mathbb{R}}}(\omega)$ и $G^{B_{\mathbb{R}}}(\omega')$ коммутируют.

Комплексификация $P_{\mathbb{C}}$ проектора $P_{\mathbb{R}}$ и комплексификации $E^{A_{\mathbb{C}}}(\omega)$, $G^{B_{\mathbb{C}}}(\omega)$ операторов $E^{A_{\mathbb{R}}}(\omega)$, $G^{B_{\mathbb{R}}}(\omega)$ связаны со спектральным разложением $E^{N_{\mathbb{C}}}$ комплексификации $N_{\mathbb{C}}$ оператора $N_{\mathbb{R}}$ формулами
$$P_{\mathbb{C}} = E^{N_{\mathbb{C}}}\big(\sigma^0(N_{\mathbb{R}})\big), \tag{6}$$
$$E^{A_{\mathbb{C}}}(\omega) = E^{N_{\mathbb{C}}}\big(\omega + i\mathbb{R}\big), \tag{7}$$
$$G^{B_{\mathbb{C}}}(\omega) = iE^{N_{\mathbb{C}}}\big(\mathbb{R} + i\omega\big) - iE^{N_{\mathbb{C}}}\big(\mathbb{R} - i\omega\big), \tag{8}$$
где $\omega + i\mathbb{R} = \{\alpha + i\beta : \alpha \in \omega,\ \beta \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} \pm i\omega = \{\alpha \pm i\beta : \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \omega\}$.

Доказательство. Пусть $N_{\mathbb{C}}$ — комплексификация оператора $N_{\mathbb{R}}$. Представим операторы $N_{\mathbb{C}}$ и $N_{\mathbb{R}}$ в соответствии с предложением 13 и следствием 14 в виде $N_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}} + B_{\mathbb{C}}$,

$N_{\mathbb{R}} = A_{\mathbb{R}} + B_{\mathbb{R}}$, где $A_{\mathbb{C}}$ и $A_{\mathbb{R}}$ — самосопряженные операторы, а $B_{\mathbb{C}}$ и $B_{\mathbb{R}}$ — кососопряженные. Из (3) следует, что для оператора $A_{\mathbb{C}}$ справедливо представление

$$\langle A_{\mathbb{C}}\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{C}} \operatorname{Re}\xi \, dE^{N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(A_{\mathbb{C}}), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}. \tag{9}$$

С другой стороны, для самосопряженного оператора $A_{\mathbb{C}}$ существует разложение единицы $E^{A_{\mathbb{C}}}$ и справедливо представление

$$\langle A_{\mathbb{C}}\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \, dE^{A_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\alpha), \qquad \varphi \in D(A_{\mathbb{C}}), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}. \tag{10}$$

Заметим, что формулу (10) можно также получить в результате применения следствия 8 (при $f(\xi) = \xi$ и $g(\xi) = \operatorname{Re}\xi$) к соотношению (9). При этом для $\omega \subset \mathbb{R}$ справедливо $g^{-1}(\omega) = \omega + i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, поэтому операторы $E^{A_{\mathbb{C}}}(\omega)$ удовлетворяют (7). В силу следствия 10 операторы $E^{A_{\mathbb{C}}}(\omega)$ коммутируют с оператором J и, следовательно, представляют собой комплексификации некоторых операторов $E^{A_{\mathbb{R}}}(\omega)$, при этом $E^{A_{\mathbb{R}}}\big(\sigma^{\mathrm{Re}}(N_{\mathbb{R}})\big) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$.

Из (4) следует, что для оператора $B_{\mathbb{C}}$ справедливо представление

$$\langle B_{\mathbb{C}}\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{C}} i \operatorname{Im}\xi \, dE^{N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(B_{\mathbb{C}}), \quad \psi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}.$$

Воспользуемся следствием 8 при $f(\xi) = \xi$ и $g(\xi) = \operatorname{Im}\xi$, в результате получим

$$\langle B_{\mathbb{C}}\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} = \int_{-\infty}^{+\infty} i\beta \, dE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\beta),$$

где $E^{B_{\mathbb{C}}}(\omega) = E^{N_{\mathbb{C}}}\big(\mathbb{R} + i\omega\big)$. В результате преобразований имеем

$$\begin{aligned}\langle B_{\mathbb{C}}\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{C}} &= \int_{0}^{+\infty} \beta \, d\, iE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\beta) + \int_{-\infty}^{0} \beta \, d\, iE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\beta) = \\ &= \int_{0}^{+\infty} \beta \, d\, iE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\beta) + \int_{0}^{+\infty} -\beta \, d\, iE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(-\beta) = \\ &= \int_{0}^{+\infty} \beta \, d\big(iE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\beta) - iE^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(-\beta)\big) = \int_{0}^{+\infty} \beta \, dG^{B_{\mathbb{C}}}_{\varphi\psi}(\beta),\end{aligned}$$

где $G^{B_{\mathbb{C}}}(\omega) = iE^{B_{\mathbb{C}}}(\omega) - iE^{B_{\mathbb{C}}}(-\omega) = iE^{N_{\mathbb{C}}}\big(\mathbb{R} + i\omega\big) - iE^{N_{\mathbb{C}}}\big(\mathbb{R} - i\omega\big)$. Несложно проверить, что операторы $G^{B_{\mathbb{C}}}(\omega)$ коммутируют с оператором J, и, следовательно, являются комплексификациями некоторых операторов $G^{B_{\mathbb{R}}}(\omega)$.

Оператор $P_{\mathbb{C}} = E^{N_{\mathbb{C}}}\big(\sigma^0(N_{\mathbb{R}})\big)$ является самосопряженным проектором, коммутирует с оператором J в силу предложения 9 и поэтому является комплексификацией некоторого самосопряженного проектора $P_{\mathbb{R}}$. То, что операторы $G^{B_{\mathbb{C}}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, представляют собой комплексное косое разложение единицы в $\mathcal{R}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}})$, сосредоточенное на $\sigma^{\mathrm{Im}+}(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}^+$, проверяется непосредственно.

Так как все операторы семейства $E^{N_{\mathbb{C}}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, коммутируют, то из формул (7) и (8) следует, что любые два оператора $E^{A_{\mathbb{C}}}(\omega)$ и $G^{B_{\mathbb{C}}}(\omega')$ также коммутируют. А поэтому коммутируют и операторы $E^{A_{\mathbb{R}}}(\omega)$ и $G^{B_{\mathbb{R}}}(\omega')$. Теорема доказана. $\square$

4. Вторая спектральная теорема (на комплексной плоскости)

Спектральное представление (5) из теоремы 15 не удается использовать для построения полноценного функционального исчисления. В связи с этим приведем еще одну спектральную теорему, позволяющую сформулировать теорему о функциональном исчислении. В этом параграфе также будут использоваться понятия действительного разложения единицы и действительного косого разложения единицы в подпространстве $\mathcal{R}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - P_{\mathbb{R}})$, но теперь в качестве множеств Ω и Δ будем иметь в виду борелевские подмножества верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

Теорема 16. *Пусть $N_\mathbb{R}\colon D(N_\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}_\mathbb{R} \to \mathbf{H}_\mathbb{R}$ — нормальный оператор. Тогда существуют самосопряженный проектор $P_\mathbb{R}$, действительное разложение единицы $E^{+N_\mathbb{R}}$ и действительное косое разложение единицы $G^{+N_\mathbb{R}}$ в подпространстве $\mathcal{R}(\mathbf{1}_\mathbb{R} - P_\mathbb{R})$, сосредоточенные на $\sigma^+(N_\mathbb{R})$, для которых выполняется соотношение*

$$\langle N_\mathbb{R}\varphi, \psi\rangle_\mathbb{R} = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re}\xi\, dE^{+N_\mathbb{R}}_{\varphi\psi}(\xi) + \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im}\xi\, dG^{+N_\mathbb{R}}_{\varphi\psi}(\xi),\ \varphi \in D(N_\mathbb{R}),\ \psi \in \mathbf{H}_\mathbb{R}. \tag{11}$$

При этом любые два оператора $E^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{R}}(\omega')$ коммутируют.

Комплексификация $P_\mathbb{C}$ проектора $P_\mathbb{R}$, а также комплексификации $E^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ операторов $E^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$ связаны со спектральным разложением $E^{N_\mathbb{C}}$ комплексификации $N_\mathbb{C}$ оператора $N_\mathbb{R}$ формулами

$$P_\mathbb{C} = E^{N_\mathbb{C}}\big(\sigma^0(N_\mathbb{R})\big), \tag{12}$$

$$E^{+N_\mathbb{C}}(\omega) = E^{N_\mathbb{C}}(\omega) + E^{N_\mathbb{C}}(\bar\omega) - E^{N_\mathbb{C}}(\omega \cap \bar\omega) = E^{N_\mathbb{C}}(\omega \cup \bar\omega), \tag{13}$$

$$G^{+N_\mathbb{C}}(\omega) = i\big(E^{N_\mathbb{C}}(\omega) - E^{N_\mathbb{C}}(\bar\omega)\big). \tag{14}$$

Доказательство. Представим комплексификацию $N_\mathbb{C}$ оператора $N_\mathbb{R}$ в соответствии с предложением 13 в виде $N_\mathbb{C} = A_\mathbb{C} + B_\mathbb{C}$, где $A_\mathbb{C}$ — самосопряженный оператор, а $B_\mathbb{C}$ — кососопряженный. Рассмотрим представление (3) оператора $A_\mathbb{C}$ и применим к нему следствие 8 при $f(\xi) = \operatorname{Re}\xi$, $g(\xi) = \operatorname{Re}\xi + i|\operatorname{Im}\xi|$, в результате получим

$$A_\mathbb{C} = \int_\mathbb{C} \operatorname{Re}\xi\, dE^{N_\mathbb{C}}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re}\xi\, dE^{+N_\mathbb{C}}(\xi).$$

Поскольку $g^{-1}(\omega) = \omega \cup \overline{\omega}$ для $\omega \subset \mathbb{C}^+$, то операторы $E^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ задаются формулой (13). В результате преобразований представления (4) оператора $B_\mathbb{C}$ имеем

$$B_\mathbb{C} = \int_\mathbb{C} i\operatorname{Im}\xi\, dE^{N_\mathbb{C}}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^+} i\operatorname{Im}\xi\, dE^{N_\mathbb{C}}(\xi) - \int_{\mathbb{C}^+} i\operatorname{Im}\xi\, dE^{N_\mathbb{C}}(\bar\xi) = \\ = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im}\xi\, dG^{+N_\mathbb{C}}(\xi),$$

где операторы $G^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ задаются формулой (14). Таким образом,

$$N_\mathbb{C} = A_\mathbb{C} + B_\mathbb{C} = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re}\xi\, dE^{+N_\mathbb{C}}(\xi) + \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im}\xi\, dG^{+N_\mathbb{C}}(\xi).$$

Несложно проверить, что операторы $E^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ коммутируют с оператором J.

Возьмем качестве $P_\mathbb{R}$ сужение самосопряженного проектора $E^{N_\mathbb{C}}\big(\sigma^0(N_\mathbb{R})\big)$ на $\mathbf{H}_\mathbb{R}$. В качестве $E^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$ возьмем сужения $E^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ на $\mathbf{H}_\mathbb{R}$. То, что семейства $E^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, и $G^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, представляют собой действительное разложение единицы и действительное косое разложение единицы в $\mathcal{R}(\mathbf{1}_\mathbb{R} - P_\mathbb{R})$, сосредоточенные на $\sigma^+(N_\mathbb{R})$, проверяется непосредственно. Очевидно, при этом выполняется соотношение (11). Так как все операторы семейства $E^{N_\mathbb{C}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, коммутируют, то из формул (13) и (14) следует, что любые два оператора $E^{+N_\mathbb{C}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{C}}(\omega')$ также коммутируют. А поэтому коммутируют и операторы $E^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$ и $G^{+N_\mathbb{R}}(\omega')$. Теорема доказана. □

Совокупность семейств операторов $E^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, и $G^{+N_\mathbb{R}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, будем называть *действительным спектральным разложением* нормального оператора $N_\mathbb{R}$.

5. Теорема о функциональном исчислении

Построенное в § 4 действительное спектральное разложение можно использовать для определения оператора $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$, действующего в $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$. В следующей теореме показано, что комплексификация оператора $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ совпадает с оператором $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$, определенном в § 3.

Теорема 17. *Пусть $N_{\mathbb{R}}\colon D(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — нормальный оператор, а $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — измеримая по Борелю функция, обладающая свойством $\overline{f(\xi)} = f(\bar{\xi})$, $\xi \in \mathbb{C}$. Определим оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(f)\colon D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ по формуле*

$$\Psi_{\mathbb{R}}(f) = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re} f \, dE^{+N_{\mathbb{R}}} + \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im} f \, dG^{+N_{\mathbb{R}}}$$

с областью определения $D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big) = \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}} : \int_{\mathbb{C}^+} |f|^2 \, dE^{+N_{\mathbb{R}}}_{\varphi\varphi} < \infty\Big\}$. Тогда комплексификация оператора $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ совпадает с оператором $\Psi_{\mathbb{C}}(f)$.

Доказательство. Несложно проверить, что справедливо соотношение

$$\Psi_{\mathbb{C}}(f) = \Psi_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re} f) + \Psi_{\mathbb{C}}(i \operatorname{Im} f),$$

где (с учетом свойства $f(\bar{\xi}) = \overline{f(\xi)}$)

$$\Psi_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re} f) = \int_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f(\xi) \, dE^{N_{\mathbb{C}}}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re} f(\xi) \, dE^{+N_{\mathbb{C}}}(\xi),$$

$$D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re} f)\big) = \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} : \int_{\mathbb{C}} \big(\operatorname{Re} f(\xi)\big)^2 \, dE^{N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty\Big\} =$$

$$= \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} : \int_{\mathbb{C}^+} \big(\operatorname{Re} f(\xi)\big)^2 \, dE^{+N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty\Big\},$$

$$\Psi_{\mathbb{C}}(i \operatorname{Im} f) = \int_{\mathbb{C}} i \operatorname{Im} f(\xi) \, dE^{N_{\mathbb{C}}}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im} f(\xi) \, dG^{+N_{\mathbb{C}}}(\xi),$$

$$D\big(\Psi_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re} f)\big) = \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} : \int_{\mathbb{C}} \big(\operatorname{Im} f(\xi)\big)^2 \, dE^{N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty\Big\} =$$

$$= \Big\{\varphi \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} : \int_{\mathbb{C}^+} \big(\operatorname{Im} f(\xi)\big)^2 \, dE^{+N_{\mathbb{C}}}_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty\Big\}.$$

Очевидно, операторы $\Psi_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re} f)$ и $\Psi_{\mathbb{C}}(i \operatorname{Im} f)$ представляют собой комплексификации операторов $\int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re} f \, dE^{+N_{\mathbb{R}}}$ и $\int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im} f \, dG^{+N_{\mathbb{R}}}$ соответственно. Теорема доказана. □

Сформулируем теперь свойства полученного действительного функционального исчисления.

Теорема 18. *Пусть $E^{+N_{\mathbb{R}}}(\omega)$, $G^{+N_{\mathbb{R}}}(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, — спектральное разложение нормального оператора $N_{\mathbb{R}}\colon D(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, а $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — измеримая по Борелю функция, обладающая свойством $\overline{f(\xi)} = f(\bar{\xi})$. Тогда оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ обладает свойствами:*

(a) *Для всех $\varphi \in D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big)$ справедливо равенство*

$$\|\Psi_{\mathbb{R}}(f)\varphi\|_{\mathbb{R}}^2 = \int_{\mathbb{C}^+} |f|^2 \, dE^{+N_{\mathbb{R}}}_{\varphi\varphi}.$$

(b) *Оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ является нормальным, и выполняется соотношение*

$$\Psi_{\mathbb{R}}(f)^* = \Psi_{\mathbb{R}}(\bar{f}) = \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re} f \, dE^{+N_{\mathbb{R}}} - \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im} f \, dG^{+N_{\mathbb{R}}}.$$

(c) *Спектральное разложение сопряженного оператора ${N_{\mathbb{R}}}^*$ связано со спектральным разложением оператора $N_{\mathbb{R}}$ соотношениями*

$$E^{+{N_{\mathbb{R}}}^*}(\omega) = E^{+N_{\mathbb{R}}}(\omega), \quad G^{+{N_{\mathbb{R}}}^*}(\omega) = \big(G^{+N_{\mathbb{R}}}(\omega)\big)^* = -G^{+N_{\mathbb{R}}}(\omega), \quad \omega \in \Sigma.$$

(d) *Если функция f ограничена, то оператор $\Psi_{\mathbb{R}}(f)$ ограничен.*

(e) *Для любых измеримых по Борелю функций $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых $\overline{f(\xi)} = f(\bar{\xi})$, $\overline{g(\xi)} = g(\bar{\xi})$, справедливы включения*

$$\Psi_{\mathbb{R}}(f) + \Psi_{\mathbb{R}}(g) \subseteq \Psi_{\mathbb{R}}(f+g), \qquad \Psi_{\mathbb{R}}(f)\Psi_{\mathbb{R}}(g) \subseteq \Psi_{\mathbb{R}}(fg).$$

Если при этом функция g ограничена, то

$$\Psi_{\mathbb{R}}(f) + \Psi_{\mathbb{R}}(g) = \Psi_{\mathbb{R}}(f+g), \qquad \Psi_{\mathbb{R}}(f)\Psi_{\mathbb{R}}(g) = \Psi_{\mathbb{R}}(fg).$$

Доказательство. (a) Пусть $\varphi \in D\big(\Psi_{\mathbb{R}}(f)\big)$. Имеем

$$\|\Psi_{\mathbb{R}}(f)\varphi\|_{\mathbb{R}}^2 = \|\Psi_{\mathbb{C}}(f)\varphi\|_{\mathbb{C}}^2 = \int_{\mathbb{C}} |f|^2\, dE_{\varphi\varphi}^{N_{\mathbb{C}}} = \int_{\mathbb{C}^+} |f|^2\, dE_{\varphi\varphi}^{+N_{\mathbb{R}}}.$$

(b) Очевидно, что оператор $\Psi_{\mathbb{C}}(\bar{f})$ является комплексификацией оператора $\Psi_{\mathbb{R}}(\bar{f})$. Из теоремы 6(b) следует, что $\Psi_{\mathbb{C}}(f)^* = \Psi_{\mathbb{C}}(\bar{f})$. А поэтому и $\Psi_{\mathbb{R}}(f)^* = \Psi_{\mathbb{R}}(\bar{f})$.

(c) Следует из (b). Свойства (d), (e) очевидны. Теорема доказана. □

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши [22] для однородного уравнения

$$\dot{x}(t) = N_{\mathbb{R}} x(t), \qquad x(0) = b, \tag{15}$$

где $N_{\mathbb{R}}\colon D(N_{\mathbb{R}}) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ — нормальный оператор, спектр которого содержится в левой комплексной полуплоскости. Введем обозначение $\exp_t(\xi) = e^{\xi t}$. Можно показать, что для обобщенного решения [22] задачи (15) справедливо представление

$$\begin{aligned} x(t) = \Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t) b &= \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Re}\exp_t(\xi)\, dE^{+N_{\mathbb{R}}}(\xi) b + \int_{\mathbb{C}^+} \operatorname{Im}\exp_t(\xi)\, dG^{+N_{\mathbb{R}}}(\xi) b = \\ &= \int_{\{\alpha+i\beta\colon \alpha\in\mathbb{R},\, \beta\geq 0\}} e^{\alpha t}\cos\beta t\, dE^{+N_{\mathbb{R}}}(\alpha+i\beta) b + \\ &\quad + \int_{\{\alpha+i\beta\colon \alpha\in\mathbb{R},\, \beta\geq 0\}} e^{\alpha t}\sin\beta t\, dG^{+N_{\mathbb{R}}}(\alpha+i\beta) b. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что оба слагаемых в правой части принадлежат $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$.

Пример 2. В гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\mathbb{R}} = L_2[0, 2\pi]$ со скалярным произведением $\langle z_1, z_2\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z_1(s) z_2(s)\, ds$ рассмотрим оператор

$$N_{\mathbb{R}} = \frac{d^2}{ds^2} + a_1 \frac{d}{ds} + a_2,$$

где a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$, с областью определения, состоящей из функций $z \in W_2^2[0, 2\pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям

$$z(0) = z(2\pi), \qquad z'(0) = z'(2\pi).$$

Непосредственно проверяется, что собственные функции комплексификации $N_{\mathbb{C}}$ оператора $N_{\mathbb{R}}$ имеют вид $\psi_k(s) = e^{iks}$, $k \in \mathbb{Z}$, а $\sigma\big(N_{\mathbb{R}}\big) = \sigma\big(N_{\mathbb{C}}\big) = \{\xi_k = -k^2 + ia_1 k + a_2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, что $\bar{\xi}_k = \xi_{-k}$ и $\overline{\psi_k(\cdot)} = \psi_{-k}(\cdot)$.

Для измеримой по Борелю функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, обладающей свойством $\overline{f(\xi)} = f(\bar{\xi})$, имеем

$$\begin{aligned} \big(\Psi_{\mathbb{C}}(f) z\big)(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\xi_k) \langle z, \psi_k\rangle_{\mathbb{C}}\, \psi_k(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle z(\cdot), \overline{f(\xi_k)}\psi_k(\cdot)\overline{\psi_k(s)}\rangle_{\mathbb{C}} = \\ = f(a_2)\langle z(\cdot), \psi_0(\cdot)\rangle_{\mathbb{C}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \langle z(\cdot), 2\operatorname{Re}\{f(\xi_k)\overline{\psi_k(\cdot)}\psi_k(s)\}\rangle_{\mathbb{C}}\, d\xi. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{f(\xi_k)\overline{\psi_k(\cdot)}\psi_k(s)\} = \operatorname{Re} f(\xi_k)\operatorname{Re}\{\psi_k(\cdot)\}\operatorname{Re}\{\psi_k(s)\}+\\ +\operatorname{Re} f(\xi_k)\operatorname{Im}\{\psi_k(\cdot)\}\operatorname{Im}\{\psi_k(s)\}+\\ +\operatorname{Im} f(\xi_k)\operatorname{Re}\{\psi_k(\cdot)\}\operatorname{Im}\{\psi_k(s)\}-\\ -\operatorname{Im} f(\xi_k)\operatorname{Im}\{\psi_k(\cdot)\}\operatorname{Re}\{\psi_k(s)\}.\end{aligned}$$

Поэтому для $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{R}}(f)z = f(a_2)E^{+N_{\mathbb{R}}}\big(\{a_2\}\big)z + \sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{Re} f(\xi_k)E^{+N_{\mathbb{R}}}\big(\{\xi_k\}\big)z+\\ +\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{Im} f(\xi_k)E^{+G_{\mathbb{R}}}\big(\{\xi_k\}\big)z,\end{aligned}$$

где

$$\Big(E^{+N_{\mathbb{R}}}\big(\{a_2\}\big)z\Big)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z(y)\,dy,$$

$$\Big(E^{+N_{\mathbb{R}}}\big(\{\xi_k\}\big)z\Big)(s) = \frac{\cos ks}{\pi}\int_0^{2\pi} z(y)\cos ky\,dy + \frac{\sin ks}{\pi}\int_0^{2\pi} z(y)\sin ky\,dy,$$

$$\Big(E^{+G_{\mathbb{R}}}\big(\{\xi_k\}\big)z\Big)(s) = \frac{\sin ks}{\pi}\int_0^{2\pi} z(y)\cos ky\,dy - \frac{\cos ks}{\pi}\int_0^{2\pi} z(y)\sin ky\,dy.$$

В частности, для функции $\exp_t(\xi) = e^{\xi t}$ имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{R}}(\exp_t) = e^{a_2 t}E^{+N_{\mathbb{R}}}\big(\{a_2\}\big) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{(-k^2+a_2)t}\cos(a_1 kt)E^{+N_{\mathbb{R}}}\big(\{\xi_k\}\big)+\\ +\sum_{k=1}^{+\infty} e^{(-k^2+a_2)t}\sin(a_1 kt)E^{+G_{\mathbb{R}}}\big(\{\xi_k\}\big).\end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления функции от оператора $N_{\mathbb{R}}$ (в том числе операторной экспоненты с параметром t) не требуется переход к комплексификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морен К. *Методы гильбертова пространства.* М.: Мир, 1965. 572 с.
2. Наймарк М.А. *Нормированные кольца.* М.: Наука, 1968. 664 с.
3. Рудин У. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1975. 444 с.
4. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: Иностранная литература, 1962. 830 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Спектральная теория.* М.: Мир, 1966. 1065 с.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. *Матричные вычисления.* М.: Мир, 1999. 548 с.
7. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения.* М.: Мир, 2001. 430 с.
8. A.C. Antoulas *Approximation of large-scale dynamical systems.* SIAM, Philadelphia, 2005. 479 p.
9. I.P. Gavrilyuk, V.L. Makarov *Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces* // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2005. Vol. 43, no. 5. P. 2144–2171.
10. L. Lopez, V. Simoncini *Analysis of projection methods for rational function approximation to the matrix exponential* // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2006. Vol. 44, no. 2. P. 613–635.

11. Курбатов В.Г., Орешина М.Н. *О нахождении приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка* // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2003. № 2. С. 173–188.
12. V.G. Kurbatov, I.V. Kurbatova *Krylov subspace methods of approximate solving differential equations from the point of view of functional calculus* // Eurasian Mathematical Journal. 2012. Vol. 3, no. 4. P. 53–80.
13. V.G. Kurbatov, M.N. Oreshina *Interconnect macromodelling and approximation of matrix exponent* // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. 2004. Vol. 40, no. 1. P. 5–19.
14. Орешина М.Н. *Приближённое решение параболического уравнения с использованием рациональной аппроксимации операторной экспоненты* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 407–417.
15. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984. 752 с.
16. Баскаков А.Г., Загорский А.С. *К спектральной теории линейных отношений* // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 1. С. 17–31.
17. Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ.* М.: Наука, 1969. 476 с.
18. Печкуров А.В. *Комплексификация упорядоченной пары линейных операторов* // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2007. № 2. С. 143–147.
19. Орешина М.Н. *Спектральная теорема для самосопряженного оператора в действительном гильбертовом пространстве* // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2015. № 3. С. 120–133.
20. Халмош П. *Теория меры.* М.: Иностранная литература, 1953. 292 с.
21. Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах.* М.: Наука, 1977. 601 с.
22. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1967. 464 с.

Мария Николаевна Орешина,
Липецкий государственный технический университет,
ул. Московская, 30,
398600, г. Липецк, Россия
E-mail: m_oreshina@mail.ru