ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 74-86.

УДК 517.9

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

С.И. МИТРОХИН

Аннотация. В работе предлагается новый подход к исследованию дифференциальных операторов с разрывной весовой функцией. Изучены спектральные свойства дифференциального оператора, заданного на конечном отрезке, с разделенными граничными условиями, с условиями «сопряжения» в точке разрыва весовой функции. Предполагается, что потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке задания оператора. При больших значениях спектрального параметра получена асимптотика фундаментальной системы решений соответствующего дифференциального уравнения. С помощью этой асимптотики изучены условия «сопряжения» рассматриваемого дифференциального оператора. Затем исследованы граничные условия изучаемого оператора. В результате получено уравнение на собственные значения оператора, которое представляет собой целую функцию. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, которая является правильным восьмиугольником. В различных секторах индикаторной диаграммы найдена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: спектральная теория дифференциальных операторов, спектральный параметр, суммируемый потенциал, разрывная весовая функция, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

Mathematics Subject Classification: 34L05, 45C05

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(y(x)) = y^{(8)}(x) + q(x)y(x) - \lambda\rho(x)y(x),$$

заданный на отрезке $[0;\pi]$, где λ — спектральный параметр, с разделенными граничными условиями, причем потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$, а весовая функция $\rho(x)$ является кусочно-постоянной с точкой разрыва x_1:

$$\rho(x) = \begin{bmatrix} a^8, & a > 0, & 0 \leqslant x < x_1, \\ b^8, & b > 0, & x_1 < x \leqslant \pi. \end{bmatrix}$$

Более подробно: мы изучаем дифференциальный оператор, задаваемый дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{cases} y_1^{(8)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^8 y_1(x),\ 0 \leqslant x < x_1,\ a > 0, & (1) \\ y_2^{(8)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^8 y_2(x),\ x_1 < x \leqslant \pi,\ b > 0, & (2) \end{cases}$$

S.I. Mitrokhin, Study of differential operator with summable potential with discontinuous weight function.

Поступила 25 августа 2016 г.

с условиями «сопряжения» в точке разрыва x_1:

$$\begin{gathered} y_1(x_1-0)=y_2(x_1+0),\ b^m y_1^{(m)}(x_1-0)=a^m y_2^{(m)}(x_1+0),\ m=1,2,\ldots,7, \\ \Bigl(y_1(x_1-0)=\lim_{x\to x_1, x<x_1} y_1(x),\ y_2(x_1+0)=\lim_{x\to x_1, x>x_1} y_2(x)\Bigr), \end{gathered} \tag{3}$$

с разделенными граничными условиями

$$\begin{gathered} y_1^{(m_1)}(0)=y_1^{(m_2)}(0)=\cdots=y_1^{(m_7)}(0)=y_2^{(n_1)}(\pi)=0, \\ m_1<m_2<\cdots<m_7;\ m_p,n_1\in\{0,1,2,\ldots,7\},\ p=1,2,\ldots,7, \end{gathered} \tag{4}$$

при этом мы предполагаем, что функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ являются суммируемыми на отрезках $[0;x_1]$ и $[x_1;\pi]$ соответственно:

$$\begin{gathered} q_1\in L_1[0;x_1]\Leftrightarrow\left(\int_0^x q_1(t)dt\right)'_x=q_1(x)\ pp\ \forall x\in[0;x_1], \\ q_2\in L_1[x_1;\pi]\Leftrightarrow\left(\int_{x_1}^x q_2(t)dt\right)'_x=q_2(x)\ pp\ \forall x\in[x_1;\pi]. \end{gathered} \tag{5}$$

Дифференциальные операторы с разрывной весовой функцией (даже в случае непрерывного или гладкого потенциала) изучались не часто. Классической работой по этой тематике является работа [1], в которой для самосопряженного дифференциального оператора второго порядка была получена теорема равносходимости в точке разрыва коэффициентов.

Впрочем, даже случай непостоянной весовой функции изучен недостаточно полно, особенно для операторов порядка выше второго. В работе [2] для оператора Штурма—Лиувилля изучался вопрос о максимально возможной скорости роста нормированных собственных функций, если весовая функция непрерывна и положительна. Вопрос об оценке нормированных собственных функций оператора Штурма—Лиувилля с положительной весовой функцией изучался в работе [3]. Изучены ли эти вопросы для операторов четвертого, шестого и выше порядков, автору неизвестно.

Задачи изучения дифференциальных операторов с разрывными потенциалами (а также разрывной весовой функцией) возникают во многих задачах механики, физики и математики, например, в задачах о продольных колебаниях стержней или поперечных колебаниях балок, составленных из материалов различной плотности. Такого рода задачи приводят к необходимости исследования операторов с разрывными коэффициентами при прогнозировании землетрясений и цунами. Такого рода вопросы рассматривались автором в работах [4, 5].

В работе [6] изучен оператор дифференцирования (первого порядка) с разрывной весовой функцией (кусочно-постоянной). В работе [7, с. 201–205] был получен аналог теоремы Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами. В работе [8] изучены спектральные свойства краевой задачи для оператора второго порядка с разрывной (кусочно-постоянной) весовой функцией. В работе [9] были изучены операторы первого и второго порядка со знакопеременной весовой функцией (опять-таки, операторы порядка выше второго ни в одной из этих статей не рассматривались).

В работах [10, 11] гладкость потенциала была понижена и был предложен новый и актуальный метод для исследования оператора Штурма—Лиувилля с суммируемым потенциалом (весовая функция при этом была равна единице).

В работе [12] был предложен метод, отличный от метода работ [10, 11], для исследования спектральных свойств дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом, который подтверждал результаты работ [10, 11] для оператора второго порядка. В работе [13] метод работы [12] перенесен на функционально-дифференциальные операторы, а в работе [14] на оператор шестого порядка с суммируемым потенциалом с запаздывающим аргументом.

Задача исследования спектральных свойств операторов с негладкими коэффициентами остается актуальной до сих пор. В работах [15, 16] в качестве потенциала (для оператора второго порядка) рассматривалась δ-функция.

В работе [17] автор изучил дифференциальный оператор второго порядка с суммируемым потенциалом и произвольной гладкой весовой функцией.

В работе [18, гл. 4] были исследованы дифференциальные операторы с разрывной весовой функцией: второго порядка с кусочно-постоянной весовой функцией и кусочно-гладким потенциалом, четвертого порядка с суммируемым потенциалом, четвертого порядка с кусочно-гладким потенциалом и кусочно-гладкой весовой функцией. Исследование дифференциального оператора (1)–(5) является продолжением исследования работы [18, гл. 4]. Необходимость условий «сопряжения» (3) следует из физических соображений (см. [19, гл. 1, с. 27, гл. 2, с. 147–152]).

По терминологии работы [20, гл. 2] граничные условия (4) являются нерегулярными, при этом мы одновременно изучаем целое семейство дифференциальных операторов (всего возможно $8\cdot 8 = 64$ различных видов граничных условий (4) при изменении чисел $m_1, m_2, \ldots, m_7$ и n_1). Все получившиеся операторы этого семейства будут иметь аналогичные между собой спектральные свойства.

2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1), (2) при больших значениях спектрального параметра λ. Пусть $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, причем для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$. Обозначим через w_k различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{gathered} w_k^8 = 1,\ w_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)}\ (k = 1, 2, \ldots, 8); \\ w_1 = 1,\ w_2 = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = z \neq 0, \\ w_3 = e^{\frac{4\pi i}{8}} = z^2 = i,\ w_4 = e^{\frac{6\pi i}{8}} = z^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots; \\ w_k = z^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, 8. \end{gathered} \tag{6}$$

Числа w_k ($k = 1, 2, \ldots, 8$) из (6) делят единичную окружность на восемь равных частей. Для этих чисел справедливы соотношения:

$$\sum_{k=1}^{8} w_k^p = 0,\ p = 1, 2, \ldots, 7; \quad \sum_{k=1}^{8} w_k^p,\ p = 0,\ p = 8. \tag{7}$$

Методами работ [20, гл. 2, 21, гл. 1, 22, гл. 4] устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) *имеет следующий вид:*

$$y_1(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x, s); \quad y_1^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x, s),\ m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{8}$$

где $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{18}$ — произвольные постоянные, причем для фундаментальной системы решений $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^{8}$ справедливы асимптотические разложения и оценки при $|s| \to \infty$:

$$y_{1k}(x, s) = e^{a w_k s x} - \frac{A_{7k}^0(x, s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s| x}}{s^{14}}\right),\ k = 1, 2, \ldots, 7, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} y_{1k}^{(m)}(x, s) = (as)^m \left\{ w_k^m e^{a w_k s x} - \frac{A_{7k}^m(x, s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s| x}}{s^{14}}\right) \right\}, \\ k = 1, 2, \ldots, 8,\ m = 1, 2, \ldots, 7, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} A_{7k}^0(x, s) = w_1 e^{a w_1 s x} \int_0^x q_1(t) e^{a(w_k - w_1) s t} dt_{ak1} + \\ + w_2 e^{a w_2 s x} \int_0^x q_1(t) e^{a(w_k - w_2) s t} dt_{ak2} + \cdots + \\ + w_8 e^{a w_8 s x} \int_0^x q_1(t) e^{a(w_k - w_8) s t} dt_{ak8},\ k = 1, 2, \ldots, 8, \end{gathered} \tag{11}$$

$$A_{7k}^m(x, s) = \sum_{n=1}^{8} w_n w_n^m e^{a w_n s x} \left(\int_0^x \ldots \right)_{akn},\ k = 1, 2, \ldots, 8,\ m = 1, 2, \ldots, 7. \tag{12}$$

При выводе формул (9)–(12) используется метод вариации постоянных и соотношения (7).

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения* (2) *имеет следующий вид:*

$$y_2(x,s)=\sum_{k=1}^{8}C_{2k}y_{2k}(x,s);\quad y_2^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{8}C_{2k}y_{2k}^{(m)}(x,s),\ m=1,2,\ldots,7, \tag{13}$$

где C_{2k} $(k=1,2,\ldots,8)$ — *произвольные постоянные,*

$$y_{2k}(x,s)=e^{bw_ksx}-\frac{B_{7k}^0(x,s)}{8a^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|x}}{s^{14}}\right),\ k=1,2,\ldots,8, \tag{14}$$

$$\frac{y_{2k}^{(m)}(x,s)}{(bs)^m}=w_k^me^{bw_ksx}-\frac{B_{7k}^m(x,s)}{8a^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|x}}{s^{14}}\right),\ k=1,2,\ldots,8,\ m=1,2,\ldots,7, \tag{15}$$

$$B_{7k}^0(x,s)=\sum_{n=1}^{8}w_ne^{bw_nsx}\int_{x_1}^{x}q_2(t)e^{b(w_k-w_n)st}dt_{bkn},\ k=1,2,\ldots,8, \tag{16}$$

$$B_{7k}^m(x,s)=\sum_{n=1}^{8}w_nw_n^me^{bw_nsx}\int_{x_1}^{x}q_2(t)e^{b(w_k-w_n)st}dt_{bkn},\ k=1,2,\ldots,8,\ m=1,2,\ldots,7. \tag{17}$$

При выводе формул (8)–(17) мы требовали выполнения следующих начальных условий:

$$\begin{gathered}A_{7k}^0(0,s)=0;\ A_{7k}^m(0,s)=0;\ y_{1k}(0,s)=1;\ y_{1k}^{(m)}(0,s)=w_k^m(as)^m;\\ B_{7k}^0(x_1,s)=0;\ B_{7k}^m(x_1,s)=0;\ y_{2k}(x_1,s)=e^{bw_ksx_1};\\ y_{2k}^{(m)}(x_1,s)=(bs)^mw_k^me^{bw_ksx_1};\ k=1,2,\ldots,8;\ m=1,2,\ldots,7.\end{gathered} \tag{18}$$

3. Изучение условий «сопряжения» (3). Подставляя формулы (8) и (13) в условия «сопряжения» (3), получаем:

$$\begin{cases}y_1(x_1-0)=y_2(x_1+0)\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{k=1}^{8}C_{2k}y_{2k}(x_1+0)=\sum_{k=1}^{8}C_{1k}y_{1k}(x_1-0);\\ (bs)^my_1^{(m)}(x_1-0)=(as)^my_2^{(m)}(x_1+0)\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{k=1}^{8}C_{2k}\frac{y_{2k}^{(m)}(x_1+0)}{(bs)^m}=\\ \qquad=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m)}(x_1-0)}{(as)^m},\ m=1,2,\ldots,7.\end{cases} \tag{19}$$

Система (19) — система из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными $C_{21},C_{22},\ldots,C_{28}$, при этом $C_{11},C_{12},\ldots,C_{18}$ рассматриваются как параметры. Из метода Крамера следует, что такая система имеет единственное решение:

$$C_{2k}=\frac{\Delta_k}{\Delta(s)\neq0},\ k=1,2,\ldots,8, \tag{20}$$

определитель $\Delta(s)$ системы при этом не равен нулю:

$$\Delta(s)=\left|\begin{matrix}y_{21}(x,s) & y_{22}(x,s) & \ldots & y_{27}(x,s) & y_{28}(x,s)\\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{27}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{28}(x,s)}{bs}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{y_{21}^{(7)}(x,s)}{(bs)^7} & \dfrac{y_{22}^{(7)}(x,s)}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{27}^{(7)}(x,s)}{(bs)^7} & \dfrac{y_{28}^{(7)}(x,s)}{(bs)^7}\end{matrix}\right|_{x=x_1+0}\neq0. \tag{21}$$

Действительно, определитель $\Delta(s)$ из (21) представляет собой определитель Вронского линейно-независимых решений $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^8$ дифференциального уравнения (2), поэтому он не равен нулю ни в одной точке полуинтервала $(x_1;\pi]$. Этот же факт можно вывести, исходя из начальных условий (18) и формул (14), (15):

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} e^{bw_1sx_1} & e^{bw_2sx_1} & \ldots & e^{bw_7sx_1} & e^{bw_8sx_1}\\ w_1e^{bw_1sx_1} & w_2e^{bw_2sx_1} & \ldots & w_7e^{bw_7sx_1} & w_8e^{bw_8sx_1}\\ w_1^2e^{bw_1sx_1} & w_2^2e^{bw_2sx_1} & \ldots & w_7^2e^{bw_7sx_1} & w_8^2e^{bw_8sx_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_1^7e^{bw_1sx_1} & w_2^7e^{bw_2sx_1} & \ldots & w_7^7e^{bw_7sx_1} & w_8^7e^{bw_8sx_1}\end{vmatrix}= \tag{22}$$
$$=e^{b(w_1+w_2+\cdots+w_7+w_8)sx_1}\Delta_0\overset{(7)}{=}e^0\Delta_0=\Delta_0\neq0,$$

где

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ w_1 & w_2 & \ldots & w_7 & w_8\\ w_1^2 & w_2^2 & \ldots & w_7^2 & w_8^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_1^7 & w_2^7 & \ldots & w_7^7 & w_8^7\end{vmatrix}=\prod_{k>n;k,n=1,2,\ldots,8}(w_k-w_n)\neq0, \tag{23}$$

Δ_0 — определитель Вандермонда чисел $w_1,w_2,\ldots,w_8$.

В формуле (20) определители Δ_k $(k=1,2,\ldots,8)$ получаются из определителя $\Delta(s)$ из (21) заменой k-го столбца на столбец $\left(\sum_{k=1}^8 C_{1k}y_{1k}(x,s);\ \sum_{k=1}^8 C_{1k}\frac{y'_{1k}(x,s)}{as};\ldots;\ \sum_{k=1}^8 C_{1k}\frac{y_{1k}^{(7)}(x,s)}{(as)^7}\right)^*_{x=x_1-0}$. Например, Δ_1 имеет следующий вид:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} [C_{11}y_{11}+C_{12}y_{12}+\cdots+C_{18}y_{18}]_{x=x_1-0} & y_{22} & y_{23} & \ldots & y_{28}\\ \left[C_{11}\dfrac{y'_{11}}{as}+C_{12}\dfrac{y'_{12}}{as}+\cdots+C_{18}\dfrac{y'_{18}}{as}\right]_{x=x_1-0} & \dfrac{y'_{22}}{bs} & \dfrac{y'_{23}}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{28}}{bs}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \left[C_{11}\dfrac{y_{11}^{(7)}}{(as)^7}+C_{12}\dfrac{y_{12}^{(7)}}{(as)^7}+\cdots+C_{18}\dfrac{y_{18}^{(7)}}{(as)^7}\right]_{x=x_1-0} & \dfrac{y_{22}^{(7)}}{(bs)^7} & \dfrac{y_{23}^{(7)}}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{28}^{(7)}}{(bs)^7}\end{vmatrix}_{x=x_1+0}. \tag{24}$$

Раскладывая определители Δ_k из (21)–(24) на сумму определителей по k-му столбцу $(k=1,2,\ldots,8)$, получаем:

$$\Delta_k=\sum_{n=1}^{8}C_{1n}\Delta_{kn},\ k=1,2,\ldots,8, \tag{25}$$

$$\Delta_{1n}\overset{(24)}{=}\begin{vmatrix} y_{1n} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{28}\\ \dfrac{y'_{1n}}{as} & \dfrac{y'_{22}}{bs} & \dfrac{y'_{23}}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{28}}{bs}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{y_{1n}^{(7)}}{(as)^7} & \dfrac{y_{22}^{(7)}}{(bs)^7} & \dfrac{y_{23}^{(7)}}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{28}^{(7)}}{(bs)^7}\end{vmatrix}_{x=x_1\pm0},$$

$$\Delta_{2n}=\begin{vmatrix} y_{21} & y_{1n} & y_{23} & \cdots & y_{28}\\ \dfrac{y'_{21}}{bs} & \dfrac{y'_{1n}}{as} & \dfrac{y'_{23}}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{28}}{bs}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{y_{21}^{(7)}}{(bs)^7} & \dfrac{y_{1n}^{(7)}}{(as)^7} & \dfrac{y_{23}^{(7)}}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{28}^{(7)}}{(bs)^7}\end{vmatrix}_{x=x_1\pm0},\ldots, \tag{26}$$

$$\Delta_{8n}=\begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{27} & y_{1n}\\ \dfrac{y'_{21}}{bs} & \dfrac{y'_{22}}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{27}}{bs} & \dfrac{y'_{1n}}{as}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{y_{21}^{(7)}}{(bs)^7} & \dfrac{y_{22}^{(7)}}{(bs)^7} & \ldots & \dfrac{y_{27}^{(7)}}{(bs)^7} & \dfrac{y_{1n}^{(7)}}{(as)^7}\end{vmatrix}_{x=x_1\pm0}.$$

Для определителя Δ_0 из (23) можно вычислить матрицу алгебраических миноров для элементов этого определителя:

$$(\Delta_{0mk}) = \begin{vmatrix} \Delta_{011} & \Delta_{012} & \dots & \Delta_{017} & \Delta_{018} \\ \Delta_{021} & \Delta_{022} & \dots & \Delta_{027} & \Delta_{028} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{071} & \Delta_{072} & \dots & \Delta_{077} & \Delta_{078} \\ \Delta_{081} & \Delta_{082} & \dots & \Delta_{087} & \Delta_{088} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta_0}{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -w_1^{-1} & w_2^{-1} & -w_3^{-1} & w_4^{-1} & \dots & -w_7^{-1} & w_8^{-1} \\ w_1^{-2} & -w_2^{-2} & w_3^{-2} & -w_4^{-2} & \dots & w_7^{-2} & -w_8^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{-6} & -w_2^{-6} & w_3^{-6} & -w_4^{-6} & \dots & w_7^{-6} & -w_8^{-6} \\ -w_1^{-7} & w_2^{-7} & -w_3^{-7} & w_4^{-7} & \dots & -w_7^{-7} & w_8^{-7} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Справедливость формулы (27) можно проверить разложением определителя Δ_0 из (23) по строкам и по столбцам.

Используя формулы (9), (10), (14), (15) и (18), имеем:

$$\Delta_{1n} = \begin{vmatrix} e^{aw_n s x_1} - \dfrac{A_{7n}^0(x_1,s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{s^{14}}\right) & e^{bw_2 s x_1} & \dots & e^{bw_7 s x_1} & e^{bw_8 s x_1} \\ w_n e^{aw_n s x_1} - \dfrac{A_{7n}^1(x_1,s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{s^{14}}\right) & w_2 e^{bw_2 s x_1} & \dots & w_7 e^{bw_7 s x_1} & w_8 e^{bw_8 s x_1} \\ w_n^2 e^{aw_n s x_1} - \dfrac{A_{7n}^2(x_1,s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{s^{14}}\right) & w_2^2 e^{bw_2 s x_1} & \dots & w_7^2 e^{bw_7 s x_1} & w_8^2 e^{bw_8 s x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n^7 e^{aw_n s x_1} - \dfrac{A_{7n}^7(x_1,s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{s^{14}}\right) & w_2^7 e^{bw_2 s x_1} & \dots & w_7^7 e^{bw_7 s x_1} & w_8^7 e^{bw_8 s x_1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{aw_n s x_1} e^{bw_2 s x_1} e^{bw_3 s x_1} (\dots) e^{bw_7 s x_1} e^{bw_8 s x_1} \phi_n - \frac{e^{-bw_1 s x_1}}{8a^7 s^7} \phi_{n7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right), \tag{28}$$

$$\phi_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ w_n & w_2 & \dots & w_7 & w_8 \\ w_n^2 & w_2^2 & \dots & w_7^2 & w_8^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n^7 & w_2^7 & \dots & w_7^7 & w_8^7 \end{vmatrix}, \ \phi_{n7} = \begin{vmatrix} A_{7n}^0(x_1,s) & 1 & \dots & 1 & 1 \\ A_{7n}^1(x_1,s) & w_2 & \dots & w_7 & w_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{7n}^7(x_1,s) & w_2^7 & \dots & w_7^7 & w_8^7 \end{vmatrix}, \ n = 1,2,\dots,8. \tag{29}$$

Используя формулы (7), (23), (27) и свойства определителей, из (28), (29) находим:

$$\Delta_{1n} = \psi_{1n}(x_1,s) - \frac{\psi_{1n7}(x_1,s)}{8a^7 s^7} e^{-bw_1 s x_1} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right), \ n = 1,2,\dots,8, \tag{30}$$

$$\psi_{1n}(x_1,s) = 0 \ (n = 2,3,\dots,8); \ \psi_{11}(x_1,s) = \Delta_0 e^{(aw_1 - bw_1)s x_1}, \tag{31}$$

$$\psi_{1n7}(x_1,s) = \frac{\Delta_0}{8} \sum_{k=1}^{8} w_1^{1-k} A_{7n}^{k-1}(x_1,s), \ n = 1,2,\dots,8. \tag{32}$$

Для определителей $\Delta_{2n}, \Delta_{3n}, \dots, \Delta_{8n}$ из (26) аналогичным образом выводим следующие формулы:

$$\Delta_{mn} = \psi_{mn}(x_1,s) - \frac{\psi_{mn7}(x_1,s)}{8a^7 s^7} e^{-bw_m s x_1} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right), \ m,n = 1,2,\dots,8, \tag{33}$$

$$\psi_{mn}(x_1,s) = 0 \ \text{при} \ m \neq n; \ \psi_{mm}(x_1,s) = \Delta_0 e^{(aw_m - bw_m)s x_1}, \ m = 1,2,\dots,8, \tag{34}$$

$$\psi_{mn7}(x_1,s) = \frac{\Delta_0}{8} \sum_{k=1}^{8} w_m^{1-k} A_{7n}^{k-1}(x_1,s), \ m,n = 1,2,\dots,8. \tag{35}$$

Применяя формулы (11), (12), в формуле (35) имеем:

$$\sum_{k=1}^{8} w_m^{1-k} A_{7n}^{k-1}(x_1,s) = \sum_{k=1}^{8} w_m^{1-k}\left(\sum_{p=1}^{8} w_p w_p^{k-1} e^{a w_p s x_1}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{anp}\right) =$$
$$= \sum_{p=1}^{8} w_p e^{a w_p s x_1}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{anp}\left(\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{w_p}{w_m}\right)^{k-1}\right) = w_m e^{a w_m s x_1}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{anm}\cdot 8, \tag{36}$$
$$m,n = 1,2,\dots,8.$$

Используя формулы (30)–(36), выпишем матрицу элементов (Δ_{mn}) $(m,n = 1,2,\dots,8)$:

$$\left(\frac{\Delta_{mn}}{\Delta_0}\right) = \tag{37}$$

$G_1\left[1-\dfrac{w_1T_{11}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_1\left[0-\dfrac{w_1T_{21}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$\dots$	$G_1\left[0-\dfrac{w_1T_{71}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_1\left[0-\dfrac{w_1T_{81}}{8a^7s^7}+\dots\right]$
$G_2\left[0-\dfrac{w_2T_{12}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_2\left[1-\dfrac{w_2T_{22}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$\dots$	$G_2\left[0-\dfrac{w_2T_{72}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_2\left[0-\dfrac{w_2T_{82}}{8a^7s^7}+\dots\right]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$G_7\left[0-\dfrac{w_7T_{17}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_7\left[0-\dfrac{w_7T_{27}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$\dots$	$G_7\left[1-\dfrac{w_7T_{77}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_7\left[0-\dfrac{w_7T_{87}}{8a^7s^7}+\dots\right]$
$G_8\left[0-\dfrac{w_8T_{18}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_8\left[0-\dfrac{w_8T_{28}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$\dots$	$G_8\left[0-\dfrac{w_8T_{78}}{8a^7s^7}+\dots\right]$	$G_8\left[1-\dfrac{w_8T_{88}}{8a^7s^7}+\dots\right]$

где введены следующие обозначения:

$$G_m = e^{(aw_m - bw_m)sx_1};\ T_{mn} = \int_0^{x_1} q_1(t) e^{a(w_m-w_n)st} dt_{amn};$$

$$m,n = 1,2,\dots,8;\ "+\dots" \ = \ "+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)".$$

Получение формул (37) полностью заканчивает изучение условий «сопряжения» (3).

4. Изучение граничных условий (4). С помощью формул (8)–(10) и (18) первые семь из граничных условий (4) принимают следующий вид:

$$y_1^{(m_r)}(0) = 0\ (r=1,2,\dots,7) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m_r)}(0,s)}{(as)^{m_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{1k} w_k^{m_r} = 0,\ r = 1,2,\dots,7. \tag{38}$$

Восьмое из граничных условий (4) с помощью формул (13), (20) и (25) преобразуется следующим образом:

$$\frac{y_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{2k}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8}\frac{\Delta_k}{\Delta(s)}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8}\left(\sum_{n=1}^{8} C_{1n}\Delta_{kn}\right)\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\left(\sum_{n=1}^{8}\Delta_{nk}\frac{y_{2n}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\right) = 0, \tag{39}$$
$$n_1 = 0,1,2,\dots,7.$$

Система (38), (39) представляет собой однородную систему из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{18}$. Из теоремы Крамера мы делаем вывод, что такая система имеет ненулевые решения $(\sum_{k=1}^{8} C_{1k}^8 \neq 0)$ только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(4) *с условием* (5) *суммируемости потенциала представляется в виде*

$$h(s)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} & w_8^{m_1}\\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} & w_8^{m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ w_1^{m_7} & w_2^{m_7} & \dots & w_7^{m_7} & w_8^{m_7}\\ b_{81} & b_{82} & \dots & b_{87} & b_{88}\end{vmatrix}=0, \tag{40}$$

$$b_{8p}=\sum_{k=1}^{8}\Delta_{pk}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}},\ p=1,2,\dots,8. \tag{41}$$

Раскладывая определитель $h(s)$ из (4) по последней строке, имеем:

$$h(s)=b_{81}R_1-b_{82}R_2+b_{83}R_3-b_{84}R_4+\dots+b_{87}R_7-b_{88}R_8=0, \tag{42}$$

где R_n $(n=1,2,\dots,8)$ — алгебраические миноры к элементам последней строчки в $h(s)$.

Определители R_n легко вычисляются, используя формулы (6):

$$R_8=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_6^{m_1} & w_7^{m_1}\\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_6^{m_2} & w_7^{m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ w_1^{m_7} & w_2^{m_7} & \dots & w_6^{m_7} & w_7^{m_7}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{5m_1} & z^{6m_1}\\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \dots & z^{5m_2} & z^{6m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1^{m_7} & z^{m_7} & \dots & z^{5m_7} & z^{6m_7}\end{vmatrix}=$$
$$=\det \mathrm{Wandermond's}(z^{m_1},z^{m_2},\dots,z^{m_7})=\prod_{r>k;r,k=1,2,\dots,7}(z^{m_r}-z^{m_k})=W_7\neq 0, \tag{43}$$

$$R_1=\begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} & w_8^{m_1}\\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} & w_8^{m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ w_2^{m_7} & w_3^{m_7} & \dots & w_7^{m_7} & w_8^{m_7}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{6m_1} & z^{7m_1}\\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{6m_2} & z^{7m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ z^{m_7} & z^{2m_7} & \dots & z^{6m_7} & z^{7m_7}\end{vmatrix}=$$
$$=z^{m_1}z^{m_2}(\dots)z^{m_7}R_8=z^{M_7}W_7,\ M_7=\sum_{k=1}^{7}m_k, \tag{44}$$

числа m_k $(k=1,2,\dots,7)$ определены граничными условиями (4).

Аналогичным образом выводятся следующие формулы:

$$R_2=z^{2M_7}W_7,\ R_3=z^{3M_7}W_7,\dots;\ R_n=z^{nM_7}W_7,\ n=1,2,\dots,8. \tag{45}$$

Подставим формулы (43)–(45) в уравнение (42), поделим на $z^{M_7}W_7\neq 0$, получим следующее уравнение

$$h(s)=\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}b_{8k}z^{(k-1)M_7}=0, \tag{46}$$

величины b_{8k} $(k=1,2,\dots,8)$ определены в (41), Δ_{pk} заданы в (37), $y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)$ выписываются, исходя из (14), (15).

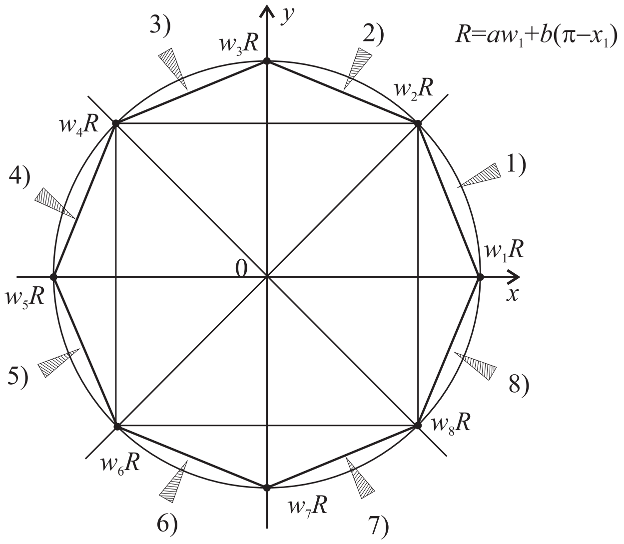
Изучение асимптотики корней уравнения (46) тесно связано с изучением индикаторной диаграммы этого уравнения (см. [23, гл. 12]). Индикаторная диаграмма — выпуклая оболочка множества показателей экспонент, входящих в это уравнение. Применяя формулы (41), (14), (15), (37), уравнение (46) переписывается более подробно в следующем виде:

$$h(s)=\sum_{k=1}^{8}\Delta_{k1}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}-z^{M_7}\sum_{k=1}^{8}\Delta_{k2}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}+\dots+$$
$$+z^{6M_7}\sum_{k=1}^{8}\Delta_{k7}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}-z^{7M_7}\sum_{k=1}^{8}\Delta_{k8}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}=0,$$

откуда выводим:

$$
\begin{gathered}
h(s)=\frac{y_{21}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_7}\Delta_{1k}+\\
+\frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_7}\Delta_{2k}+\dots+\\
+\frac{y_{27}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_7}\Delta_{7k}+\\
+\frac{y_{28}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_7}\Delta_{8k}=0,
\end{gathered}
\tag{47}
$$

отсюда следует, что индикаторная диаграмма имеет следующий вид:



(48)

Индикаторная диаграмма, изображенная на рисунке (48) представляет собой правильный восьмиугольник. Корни уравнения (47) могут располагаться только в восьми секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого восьмиугольника.

5. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы (48). Применяя формулы (14), (15) и (37), перепишем уравнение (47) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
h(s)=\left[w_1^{n_1}e^{bw_1s\pi}-\frac{B_{71}^{n_1}(\pi,s)}{8b^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right]e^{(aw_1-bw_1)sx_1}D_1(x_1,s)+\\
+\left[w_2^{n_1}e^{bw_2s\pi}-\frac{B_{72}^{n_1}(\pi,s)}{8b^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right]e^{(aw_2-bw_2)sx_1}D_2(x_1,s)+\dots+\\
+\left[w_8^{n_1}e^{bw_8s\pi}-\frac{B_{78}^{n_1}(\pi,s)}{8b^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right]e^{(aw_8-bw_8)sx_1}D_8(x_1,s)=0,
\end{gathered}
\tag{49}
$$

$$
\begin{gathered}
D_m(x_1,s)=\left[D_{m1}-\frac{w_m}{8a^7s^7}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a1m}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right]-\\
-z^{M_7}\left[D_{m2}-\frac{w_m}{8a^7s^7}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a2m}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right]+\\
+z^{2m_7}\left[D_{m3}-\frac{w_m}{8a^7s^7}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a3m}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right]-\dots-\\
-z^{7M_7}\left[D_{m8}-\frac{w_m}{8a^7s^7}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a8m}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right],\\
D_{mm}=1,\ D_{mn}=0\ (m\neq n);\ m,n=1,2,\dots,8.
\end{gathered}
\tag{50}
$$

Из общей теории (см. [23, гл. 12]) нахождения корней квазимногочленов вида (49), (50) следует, что в секторе 1) надо оставить только те экспоненты, показатели которых лежат на отрезке $[w_1 R; w_2 R]$ индикаторной диаграммы (48). Этот факт приводит к выводу о справедливости следующего утверждения.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(4) *с условием* (5) *суммируемости потенциала в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (48) *имеет следующий вид:*

$$\begin{gathered} f_1(s) = [w_1^{n_1} e^{Rw_1 s} - z^{M_7} w_2^{n_1} e^{Rw_2 s}] - \\ -\frac{1}{8s^7}\Bigg[\frac{w_1}{a^7} w_1^{n_1}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a11} e^{Rw_1 s} - \frac{w_1}{a^7} w_1^{n_1} e^{Rw_1 s} z^{M_7}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a21} + \\ +\frac{B_{71}^{n_1}(\pi,s)}{b^7} e^{(aw_1-bw_1)sx_1} - \frac{w_2}{a^7} w_2^{n_1} z^{M_7} e^{Rw_2 s}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a22} + \\ +\frac{w_2}{a^7} w_2^{n_1} e^{Rw_2 s}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a12} - \frac{B_{72}^{n_1}(\pi,s)}{b^7} z^{M_7} e^{(aw_2-bw_2)sx_1}\Bigg] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0. \end{gathered} \tag{51}$$

При этом экспоненты вида $\exp(Rw_m s)$ $(m = 3,4,\dots,8)$ и интегралы вида $(\int_0^{x_1}\dots)_{a1m}, (\int_0^{x_1}\dots)_{a2m}, \dots, m = 3,4,\dots,8$, входящие в уравнение (49), (50), но не входящие в уравнение (51), в секторе 1) будут представлять собой бесконечно малые величины.

Поделим в уравнении (51) на $e^{Rw_2 s} w_1^{n_1} \neq 0$, заметим, что $\frac{w_2^{n_1}}{w_1^{n_1}} = z^{n_1}$ (из (6)), перепишем его в виде

$$\begin{gathered} f_1(s) = [e^{R(w_1-w_2)s} - z^{M_7} z^{n_1}] - \\ -\frac{1}{8s^7}\left[\frac{g_1(x_1,s)}{a^7} + \frac{g_2(x_1,s)}{a^7} + \frac{1}{b^7} e^{-Rw_2 s} w_1^{-n_1} g_3(x_1,\pi,s)\right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0; \\ g_1(x_1,s) = w_1\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a11} e^{R(w_1-w_2)s} - w_2 z^{M_7} z^{n_1}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a22}; \\ g_2(x_1,s) = w_2 z^{n_1}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a12} - w_1 z^{M_7} e^{R(w_1-w_2)s}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a21}; \\ g_3(x_1,\pi,s) = B_{71}^{n_1}(\pi,s) e^{(aw_1-bw_1)sx_1} - z^{M_7} B_{72}^{n_1}(\pi,s) e^{(aw_2-bw_2)sx_1}. \end{gathered} \tag{52}$$

Основное приближение уравнения (52) имеет вид:

$$\begin{gathered} e^{R(w_1-w_2)s} = z^{M_7} z^{n_1} = e^{2\pi i k} e^{\frac{2\pi i}{8} M_7} e^{\frac{2\pi i}{8} n_1} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2\pi i \tilde{k}}{R(w_1-w_2)}, \\ R = ax_1 + b(\pi - x_1),\ \tilde{k} = k + \frac{M_7}{8} + \frac{n_1}{8},\ k \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{53}$$

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(4) *с условием* (5) *суммируемости потенциала в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (48) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2\pi i}{R(w_1-w_2)}\left[\tilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right)\right],\ \tilde{k} = k + \frac{M_7}{8} + \frac{n_1}{8},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{54}$$

Для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что коэффициенты $d_{7k,1}$ в формуле (54) вычисляются единственным образом и вывести явную формулу для их вычисления.

Применяя формулу Маклорена, получаем:

$$\begin{gathered} e^{R(w_1-w_2)s}\Big|_{s_{k,1}} = \exp\left[R(w_1-w_2)\frac{2\pi i}{R(w_1-w_2)}\left(\tilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right)\right)\right] = \\ = z^{M_7} z^{n_1}\left[1 + \frac{2\pi i d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right)\right]; \\ \frac{1}{s_{k,1}^7} = \frac{R^7(w_1-w_2)^7}{2^7\pi^7 i^7}\frac{1}{\tilde{k}^7}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right). \end{gathered} \tag{55}$$

Подставляя формулы (53)–(55) в уравнение (52), имеем:

$$\Big[z^{M_7}z^{n_1}+z^{M_7}z^{n_1}2\pi i\frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\Big)-z^{M_7}z^{n_1}\Big]-\frac{R^7(w_1-w_2)^7}{8\cdot 2^7\pi^7 i^3}\times$$
$$\times\frac{1}{\tilde{k}^7}\Big(1+\underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^8}\Big)\Big)\Big[\frac{g_1(x_1,s)}{a^7}+\frac{g_2(x_1,s)}{a^7}+$$
$$+\frac{1}{b^7}e^{-Rw_2s}w_1^{-n_1}g_3(x_1,\pi,s)\Big]\Big|_{sk,1}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\Big)=0,$$

откуда находим, что

$$d_{7k,1}=\frac{R^7(w_1-w_2)^7}{8\cdot 2^7\pi^7 i^3 2\pi i}z^{-M_7}z^{-n_1}\Big[\frac{g_1(x_1,s)}{a^7}+\frac{g_2(x_1,s)}{a^7}+\frac{e^{-Rw_2s}}{b^7}w_1^{-n_1}g_3(x_1,\pi,s)\Big]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}, \tag{56}$$

где $s_{k,1,\text{осн}}$ определена в (53).

Из формул (11) следует, что

$$\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a11}=\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a22}=\dots=\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{amm}=\int_0^{x_1}q_1(t)dt_{a11}\ (m=1,2,\dots,8).$$

Поэтому имеем:

$$g_1(x_1,s)\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}\overset{(52),(55)}{=}w_1\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a11}z^{M_7}z^{n_1}-$$
$$-w_2z^{M_7}z^{n_1}\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a22}=(w_1-w_2)z^{M_7}z^{n_1}\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a11}; \tag{57}$$

$$g_2(x_1,s)\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}=\Big[w_2z^{n_1}z^{M_7}z^{-M_7}\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a12}-$$
$$-w_1z^{M_7}z^{M_7}z^{n_1}\Big(\int_0^{x_1}\dots\Big)_{a21}\Big]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}=$$
$$=z^{M_7}z^{n_1}e^{\frac{\pi i}{8}}\Big[e^{\frac{\pi i}{8}}e^{-\frac{2\pi i}{8}M_7}\int_0^{x_1}q(t)\exp\Big(a(w_1-w_2)t\frac{2\pi i\tilde{k}}{R(w_1-w_2)}\Big)dt_{a12}- \tag{58}$$
$$-e^{-\frac{\pi i}{8}}e^{\frac{2\pi i}{8}M_7}\int_0^{x_1}q_1(t)\exp\Big(-\frac{a}{R}2\pi i\tilde{k}t\Big)dt_{a21}\Big]=$$
$$=z^{M_7}z^{n_1}e^{\frac{\pi i}{8}}2i\int_0^{x_1}q_1(t)\sin\Big[2\pi\frac{a}{R}\tilde{k}t+\frac{\pi}{8}-\frac{2\pi}{8}M_7\Big]dt_{q1};$$

$$g_3(x_1,\pi,s)\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}=\Big[w_1\Big(\int_{x_1}^{\pi}\dots\Big)_{b11}e^{R(w_1-w_2)s}-$$
$$-w_2z^{n_1}z^{M_7}\Big(\int_{x_1}^{\pi}\dots\Big)_{b22}\Big]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}+$$
$$+\Big[w_2\Big(\int_{x_1}^{\pi}\dots\Big)_{b12}z^{n_1}e^{R(w_1-w_2)s}e^{-b(w_1-w_2)s\pi}-z^{M_7}w_1e^{b(w_1-w_2)s\pi}\Big(\int_{x_1}^{\pi}\dots\Big)_{b21}\Big]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}= \tag{59}$$
$$=(w_1-w_2)z^{M_7}z^{n_1}\Big(\int_{x_1}^{\pi}\dots\Big)_{b11}+2ie^{\frac{\pi i}{8}}z^{M_7}z^{n_1}\int_{x_1}^{\pi}q_2(t)\sin\Big[\frac{2\pi b\tilde{k}}{R}t+\frac{\pi}{8}+$$
$$+\frac{2\pi}{8}n_1-\frac{b\pi}{R}2\pi\tilde{k}\Big]dt_{q2}.$$

Подставляя формулы (57)–(59) в (56), получаем:

$$d_{7k,1} = \frac{R^7(w_1-w_2)^8}{8\cdot 2^8\pi^8}\left[\frac{1}{a^7}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{a11} + \frac{1}{a^7}\frac{2ie^{\frac{\pi i}{8}}}{w_1-w_2}\left(\int_0^{x_1}\dots\right)_{q1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{b^7}\left(\int_{x_1}^{\pi}\dots\right)_{b11} + \frac{1}{b^7}\frac{2ie^{\frac{\pi i}{8}}}{w_1-w_2}]\left(\int_{x_1}^{\pi}\dots\right)_{q2}\right],\ k\in\mathbb{Z}. \tag{60}$$

Из формул (6) находим:

$$\frac{2ie^{\frac{\pi i}{8}}}{w_1-w_2} = \frac{2ie^{\frac{\pi i}{8}}}{1-e^{\frac{\pi i}{8}}} = \frac{2ie^{\frac{\pi i}{8}}}{e^{\frac{\pi i}{8}}(e^{-\frac{\pi i}{8}}-e^{\frac{\pi i}{8}})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{8})} = -\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Подставляя эту формулу в (60), находим:

$$d_{7k,1} = \frac{R^7(w_1-w_2)^8}{8\cdot 2^8\pi^8}\left\{\left[\frac{1}{a^7}\int_0^{x_1} q_1(t)dt_{a11} + \frac{1}{b^7}\int_{x_1}^{\pi} q_2(t)dt_{b11}\right] - \right.$$
$$-\left[\frac{1}{a^7}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{8})}\int_0^{x_1} q_1(t)\sin\left[\frac{2\pi a}{R}\tilde{k}t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}M_7\right]dt_{q1} + \right. \tag{61}$$
$$\left.\left. + \frac{1}{b^7}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{8})}\int_{x_1}^{\pi} q_2(t)\sin\left[\frac{2\pi b}{R}\tilde{k}t + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n_1 - \frac{2b\pi^2}{R}\tilde{k}\right]dt_{q2}\right]\right\},\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_7}{8} + \frac{n_1}{8},\ M_7 = \sum_{p=1}^{7} m_p,\ R = ax_1 + b(\pi - x_1).$$

Формула (61) показывает, что коэффициенты $d_{7k,1}$ в (54) находятся единственным образом, что завершает доказательство теоремы 5.

Если исследовать предельные переходы $b\to a$ или $x_1\to 0$, или $x_1\to\pi$, то формула (61) принимает вид

$$d_{7k,1} = \frac{(w_1-w_2)^8}{8\pi 2^8}\left[\int_0^{\pi} q(t)dt_{a11} - \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{8})}\int_0^{\pi} q(t)\sin\left(2\tilde{k}t + \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi}{8}M_7\right)dt_{q1}\right],\ k\in\mathbb{Z}. \tag{62}$$

Формула (62) была получена автором ранее в работе [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А. *О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора* // Математические заметки. 1977. Т. 22, №5. С. 698–723.
2. Гехтман М. М., Загиров Ю. М. *О максимально возможной скорости роста нормированных собственных функций одного класса операторов типа Штурма—Лиувилля с непрерывной положительной весовой функцией* // Функциональный анализ и его приложения. 1993. Т. 27, вып. 2. С. 85–86.
3. Гехтман М. М., Айгунов Г. А. *К вопросу об оценке нормированных собственных функций оператора Штурма—Лиувилля с положительной весовой функцией на конечном отрезке* // УМН. 1995. Т. 50, вып. 4 (304). С. 157–158.
4. Митрохин С. И. *О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, №3. С. 530–532.
5. Митрохин С. И. *О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией* // Доклады РАН. 1997. Т. 356, №1. С. 13–15.
6. Хромов А. П. *Оператор дифференцирования с разрывной весовой функцией* // Сб. научных трудов. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 88–91.
7. Купцов Н. П. *Об аналоге теоремы Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами* // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961. С. 201–205.

8. Мухтаров О. Ш., Кадакал М. *Спектральные свойства одной задачи типа Штурма—Лиувилля с разрывным весом* // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, №4. С. 860–875.
9. Гуревич А. П., Хромов А. П. *Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией* // Математические заметки. 1994. Т. 58, вып. 1. С. 3–15.
10. Винокуров В. А., Садовничий В. А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, №10. С. 1423–1426.
11. Винокуров В. А., Садовничий В. А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Известия РАН. Сер.: матем. 2000. Т. 64, №4. С. 47–108.
12. Митрохин С. И. *О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами* // Труды МИАН. 2010. Т. 270. С. 188–197.
13. Митрохин С. И. *Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с интегрируемыми коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, №8. С. 1085–1093.
14. Митрохин С. И. *О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №4. С. 95–115.
15. Савчук А. М. *Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма—Лиувилля с δ-потенциалом* // УМН. 2000. Т. 55, вып. 6 (336). С. 155–156.
16. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Математические заметки. 1999. Т. 66, №6. С. 897–912.
17. Митрохин С. И. *О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией* // Вестник СамГУ. Естественнонауч. серия. 2008. №8 (1/67). С. 172–187.
18. Митрохин С. И. *Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты.* М.: Интуит, 2009. 264 с.
19. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1977.
20. Наймарк Н. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
21. Левитан Б. М., Саргсян И. С. *Введение в спектральную теорию.* М.: Наука, 1970. 672 с.
22. Федорюк М. В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1983. 352 с.
23. Беллман Р., Кук К. Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир, 1967. 548 с.
24. Митрохин С. И. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора восьмого порядка с суммируемым потенциалом с разрывной весовой функцией* // Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения». Материаллы Межд. конф. 2010. С. 233–235. Самара.

Сергей Иванович Митрохин,
НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,
Воробьевы горы, д. 1,
450008, г. Москва, Россия
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru