ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 60-73.

УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЙОСТА УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ–РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Р.Ч. КУЛАЕВ, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. Работа посвящена задаче кардинального расширения пространства потенциалов в обратной задаче рассеяния для линейного уравнения Шрёдингера на числовой прямой. Рассматривается оператор Шрёдингера с потенциалом из пространства обобщенных функций. Это расширение включает в себя не только потенциалы типа δ-функции, но и экзотику типа функции Кантора. На этом пути устанавливаются условия существования и единственности решений Йоста. Изучаются их аналитические свойства. Приводятся некоторые оценки для решений Йоста и их производных. Показывается, что уравнение Шрёдингера с потенциалом-распределением можно равномерно аппроксимировать уравнениями с гладкими потенциалами.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, уравнение Шрёдингера, решения Йоста, дельтаобразный потенциал, сингулярный потенциал, потенциал-распределение.

Mathematics Subjects Classifications: 34L25, 35J10, 37K15

Основное содержание данной статьи посвящено задаче расширения пространства потенциалов в обратной задаче рассеяния для линейного уравнения Шрёдингера на всей вещественной оси

$$\psi_{xx} = \left(q(x) + k^2\right)\psi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

При изучении обратной задачи рассеяния фундаментальную роль играют аналитические свойства специальной фундаментальной системы решений уравнения Шрёдингера с экспоненциально растущей на бесконечности асимптотикой (решения Йоста). В классической теории рассеяния уравнение (1) рассматривается при условии, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|q(x)|dx < \infty.$$

Условия на функцию q возникают естественным образом из требования существования и единственности решений Йоста, а также возможности их аналитического продолжения для комплексных значений параметра k [1]–[3]. В данной работе изучаются математические свойства уравнения Шрёдингера (1) с потенциалами, являющимися обобщенными производными функций ограниченной вариации. Интерес к уравнениям с обобщенными коэффициентами в последнее время неуклонно растет (см., например, [4]–[10] и библиографию там же). Рассмотрение уравнения Шрёдингера (1) с потенциалами, являющимися

R.Ch. Kulaev, A.B. Shabat, Some properties for Jost functions of a Schrodinger equation with distribution potential.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №15-11-20007.

Поступила 23 мая 2017 г.

обобщенными производными функций ограниченной вариации, расширяет класс допускаемых к анализу задач, требуя при этом учета чисто математической специфики этого объекта. Мы исследуем ниже, каким условиям должна удовлетворять функция q, чтобы обеспечить не только существование и единственность решений Йоста, но и возможность их аналитического продолжения с мнимой оси комплексной плоскости k. Эти вопросы изучаются в пункте 1 настоящей статьи. Там же доказывается непрерывность решений Йоста на всей вещественной оси и устанавливаются базовые оценки. Во втором пункте изучаются более тонкие свойства решений Йоста, показывается, что решения принадлежат $W^{1,1}_{\text{loc}}$, выводятся оценки для их производных. В третьем пункте показывается, что оператор Шрёдингера с потенциалом, являющимся обобщенной производной функции ограниченной вариации, можно рассматривать как равномерный предел операторов с гладкими потенциалами. В этом случае, как следует из результатов работ [4, 5], все решения дифференциального уравнения принадлежат $W^{1,1}_{\text{loc}}$.

1. Решения Йоста. Пусть Q – вещественная функция, заданная на всей числовой оси $\mathbb{R}$, и

$$V_Q(x) = \sup \sum_{i=1}^{m} |Q(x_{i+1}) - Q(x_i)|,$$

где супремум берется по всем $m \in \mathbb{N}$ и всем $\{x_i\}_{i=1}^m$ таким, что

$$-\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq x < \infty.$$

Определим полную вариацию функции Q как предел $V_Q = \lim\limits_{x\to\infty} V_Q(x)$. Обозначим через BV пространство всех вещественных функций, имеющих на $\mathbb{R}$ ограниченную вариацию, а через $\mathcal{M}$ — множество всех функций, каждая из которых является обобщенной производной некоторой функции из BV.

Рассмотрим уравнение Шрёдингера (1), потенциал q которого является элементом $\mathcal{M}$ и $q = Q'$, $Q \in BV$. В первую очередь нас интересует вопрос о существовании у рассматриваемого уравнения решений Йоста. Как уже отмечалось выше, решения Йоста образуют фундаментальную систему решений (зависящих от параметра k) с экспоненциальными асимптотиками на отрицательной и положительной бесконечностях. Стандартный метод в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, применяемый для доказательства существования и единственности решений уравнения, удовлетворяющих начальным условиям, заключается в переходе к эквивалентному интегральному уравнению. В этом случае метод последовательных приближений позволяет получить условия существования решения с заданными начальными данными. Поскольку решений с заданной асимптотикой на бесконечности у уравнения (1) много, то предельный переход $x_0 \to \infty$ в задаче Коши с данными в конечной точке $x_0 \in \mathbb{R}$ проблему не решает. Поэтому для построения фундаментальной системы решений приходится отдельно использовать условия при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$. Кроме того, имеется еще и проблема аналитического продолжения фундаментальной системы решений как функций комплексного параметра k. Именно требование аналитичности выделяет решения Йоста.

Пусть $K_+ = \{k \in \mathbb{C},\ Re\, k \geq 0\}$. Обозначим через $\psi^{\pm}(x,k)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in K_+$, функции, определяемые при помощи следующих соотношений

$$\begin{aligned} \psi^+(x,k) &= \phi^+(x,k)e^{kx}, \quad \phi^+(x,k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} R(x-y,k)\phi^+(y,k)dQ(y), \\ \psi^-(x,k) &= \phi^-(x,k)e^{-kx}, \quad \phi^-(x,k) = 1 + \int_{x}^{\infty} R(y-x,k)\phi^-(y,k)dQ(y), \end{aligned} \qquad (2)$$

в которых

$$R(y,k) = \frac{1-e^{-2ky}}{2k}\theta(y), \tag{3}$$

а $\theta(y)$ – функция Хевисайда. При этом интегралы в (2) понимаются в смысле Римана–Стильтьеса, а ядро (3) удовлетворяет в K_+ оценке

$$|R(y,k)| \le \int\limits_{-y}^{0} |e^{2ks}|ds \le y, \quad y \ge 0, \quad Re\, k \ge 0. \tag{4}$$

Функции $\psi^{\pm}$, определяемые с помощью соотношений (2), назовем *решениями Йоста* уравнения Шрёдингера. Эти специальные решения удовлетворяют условиям $\psi^+(x,k) \sim e^{kx}$ при $x \to -\infty$ и $\psi^-(x,k) \sim e^{-kx}$ при $x \to \infty$.

Теорема 1. *Для любого $k \in K_+$ решения Йоста $\psi^{\pm}(x,k)$ уравнения Шрёдингера* (1) *однозначно определяются соотношениями* (2), *если выполнено условие*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)dV_Q(x) < \infty. \tag{5}$$

При каждом фиксированном $k \in K_+$ решения $\phi^{\pm}(x,k)$ интегральных уравнений (2) *непрерывны на всей числовой оси, а для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ являются непрерывными функциями параметра k в K_+. Кроме того, $\phi^{\pm}(x,k)$ аналитичны в полуплоскости $Re\, k > 0$ и удовлетворяют следующим оценкам:*

(i)

$$|\phi^+(x,k) - 1| \le \exp\left\{ \int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)dy \right\} \int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)dy,$$

$$|\phi^-(x,k) - 1| \le \exp\left\{ \int\limits_{x}^{\infty} (V_Q - V_Q(y))\,dy \right\} \int\limits_{x}^{\infty} (V_Q - V_Q(y))\,dy, \quad k \in K_+;$$

(ii)

$$|\phi^+(x,k) - 1| \le C^+(1+\max\{x,0\}) \int\limits_{-\infty}^{x} (1+|x|)dV_Q(x),$$

$$|\phi^-(x,k) - 1| \le C^-(1+\max\{-x,0\}) \int\limits_{x}^{\infty} (1+|x|)dV_Q(x),$$

где константы $C^{\pm}$ не зависят от $k \in K_+$;

(iii)

$$|\phi^+(x,k) - 1| \le \frac{V_Q(x)}{|k|} \exp\left\{ \frac{V_Q(x)}{|k|} \right\} \le \frac{V_Q}{|k|} \exp\left\{ \frac{V_Q}{|k|} \right\},$$

$$|\phi^-(x,k) - 1| \le \frac{V_Q - V_Q(x)}{|k|} \exp\left\{ \frac{V_Q - V_Q(x)}{|k|} \right\} \le \frac{V_Q}{|k|} \exp\left\{ \frac{V_Q}{|k|} \right\},$$

где $k \in K_+ \setminus \{0\}$.

◀ Используем метод последовательных приближений, чтобы определить условия, при которых существуют решения Йоста задач (2). Ввиду аналогии рассуждений мы проведем выкладки только для первого уравнения. Покажем, что при $k \in K_+$ решение $\phi^+(x,k)$ соответствующего интегрального уравнения существует и может быть найдено в форме

$$\begin{gathered}\phi^+(x,k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,k),\\ f_{n+1}(x,k) = \int\limits_{-\infty}^{x} R(x-y,k) f_n(y,k)dQ(y), \quad f_0(x,k) = 1.\end{gathered} \tag{6}$$

Для доказательства сходимости ряда (6) используем неравенство (4):

$$|f_1(x,k)| \le \int\limits_{-\infty}^{x} |R(x-y,k)| dV_Q(y)$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{x} (x-y)dV_Q(y) = (x-y)V_Q(y)\Big|_{-\infty}^{x} + \int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)dy.$$

Если положить, что

$$\lim_{x\to-\infty} |x| V_Q(x) = 0, \tag{7}$$

то получим оценку для $|f_1(x,k)|$

$$|f_1(x,k)| \le \int\limits_{-\infty}^{x} (x-y)dV_Q(y) = \int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)dy = M(x).$$

Покажем, что члены ряда (6) допускают оценку

$$|f_n(x,k)| \le \frac{M^n(x)}{n!}. \tag{8}$$

Привлекая индукционные рассуждения, имеем

$$|f_{n+1}(x,k)| \le \int\limits_{-\infty}^{x} |R(x-y,k)||f_n(y,k)| dV_Q(y) = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^{x} (x-y)M^n(y)dV_Q(y).$$

Интегрируя по частям, окончательно получим

$$|f_{n+1}(x,k)| \le \frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)M^n(y)dy - \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{-\infty}^{x} V_Q^2(y)(x-y)M^{n-1}(y)\,dy \le$$

$$\le \frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)M^n(y)dy = \frac{M^{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Из оценки (8) следует, что ряд теории возмущений (6) мажорируется рядом

$$e^{M(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n(x)}{n!}.$$

Поэтому можно утверждать, что если выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{0} |x| dV_Q(x) < \infty, \tag{9}$$

то ряд (6) равномерно сходится на любом промежутке $(-\infty, b]$, $b < \infty$. Действительно, неравенство (5) гарантирует выполнение (7) и $M(b) < \infty$. Отсюда следует, что функция $\phi^+(x, k)$ непрерывна при $Re\, k \geq 0$, аналитична при $Re\, k > 0$ и удовлетворяет соответствующему неравенству из (i).

Аналогично можно получить, что при выполнении условия

$$\int_{0}^{\infty} x\, dV_Q(x) < \infty, \tag{10}$$

функция $\phi^-(x, k)$ непрерывна при $Re\, k \geq 0$ и аналитична при $Re\, k > 0$ и удовлетворяет своему неравенству из (i).

Сводя условия (9) и (10) в одно условие, получим достаточное условие разрешимости интегральных уравнений (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dV_Q(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) dV_Q(x) < \infty.$$

Докажем теперь неравенство (ii) для $\phi^+(x, k)$. Привлекая (4), имеем

$$\begin{gathered} |\phi^+(x, k)| \leq 1 + \int_{-\infty}^{x} (x - y) |\phi^+(y, k)| dV_Q(y) \\ \leq 1 + \int_{-\infty}^{0} |y| |\phi^+(y, k)| dV_Q(y) + \int_{-\infty}^{x} x |\phi^+(y, k)| dV_Q(y). \end{gathered} \tag{11}$$

Так как $|\phi^+(y, k)| \leq e^{M(0)}$ при $y \leq 0$, то из (5) следует

$$|\phi^+(x, k)| \leq C + \int_{-\infty}^{x} x |\phi^+(y, k)| dV_Q(y), \quad 1 < C < \infty, \tag{12}$$

причем константа C не зависит от $k \in K_+$. Деля обе части интегрального неравенства на $C(1 + |x|)$ и вводя обозначение $\chi(x, k) = \frac{\phi^+(x,k)}{C(1+|x|)}$, получим неравенство

$$|\chi(x, k)| \leq 1 + \int_{-\infty}^{x} (1 + |y|) |\chi(y, k)| dV_Q(y),$$

которое с учетом (5) можно решить методом итераций:

$$|\chi_0(x,k)| = 1,$$
$$|\chi_1(x,k)| \le \int\limits_{-\infty}^{x} (1+|y|)dV_Q(y) = (1+x)V_Q(x) - \int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)\,d|y| = M_1(x),$$
$$dM_1(x) = (1+x)dV_Q(x) + V_Q(x)\,dx - V_Q(x)\,dx = (1+x)dV_Q(x),$$
$$|\chi_{n+1}(x,k)| \le \int\limits_{-\infty}^{x} (1+|y|)\frac{M_1^n(y)}{n!}dV_Q(y) = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^{x} M_1^n(y)dM_1(y) = \frac{M_1^{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Следовательно, $|\phi^+(x,k)| \le C_1(1+|x|)e^{M_1(x)}$. Отсюда и из (11), (i) для $x \ge 0$ получаем

$$\begin{aligned} |\phi^+(x,k) - 1| &\le \int\limits_{-\infty}^{0} |y||\phi^+(y,k)|dV_Q(y) + x\int\limits_{-\infty}^{x} |\phi^+(y,k)|dV_Q(y) \\ &\le C_2(1+x)\int\limits_{-\infty}^{x} (1+|y|)dV_Q(y). \end{aligned} \tag{13}$$

А для отрицательных x ввиду (i) получаем

$$|\phi^+(x,k) - 1| \le e^{M(0)}\int\limits_{-\infty}^{x} (1+|y|)dV_Q(y).$$

Сопоставляя последнее неравенство с (13), получим оценку (ii) для ϕ^+.

Доказательство (iii) основано на тех же идеях, с той лишь разницей, что вместо оценки (4) нужно задействовать очевидное неравенство $|R(y,k)| \le \frac{1}{|k|}$, $k \in K_+ \setminus \{0\}$. Действительно, из последней оценки получаем интегральное неравенство

$$|\phi^+(x,k) - 1| \le \frac{V_Q(x)}{|k|} + \frac{1}{|k|}\int\limits_{-\infty}^{x} |\phi^+(y,k) - 1|dV_Q(y),$$

которое легко решается методом итераций:

$$|g_0(x,k)| \le \frac{V_Q(x)}{|k|}, \quad |g_1(x,k)| \le \frac{1}{|k|}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{V_Q(x)}{|k|}dV_Q(y) = \frac{V_Q^2(x)}{2|k|^2},$$
$$|g_n(x,k)| \le \frac{1}{n!|k|}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{V_Q^n(x)}{|k|^n}dV_Q(y) = \frac{V_Q^{n+1}(x)}{(n+1)!|k|^{n+1}}.$$

Нам остается доказать, что при каждом фиксированном $k \in K_+$ функция $\phi^+(x,k)$ непрерывна на всей числовой оси. Учитывая равномерную сходимость ряда (6) на полуоси $(-\infty, a)$ при любом $a \in \mathbb{R}$, достаточно показать непрерывность итераций $f_n(x,k)$ по x.

Интегрированием по частям получаем[1]

$$f_0(x,k)=1,$$

$$f_{n+1}(x,k)=\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}f_n(y,k)Q(y)dy - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1-e^{-2k(x-y)}}{2k} f_n'(y,k)Q(y)dy, \tag{14}$$

$$f_{n+1}'(x,k)=f_n(x,k)Q(x) - 2k\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}f_n(y,k)Q(y)dy - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}f_n'(y,k)Q(y)dy.$$

Из условия (5) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{a} V_Q(x)\,dx<\infty$ для любого $a\in\mathbb{R}$. А поскольку всюду на $\mathbb{R}$ выполнено неравенство $|Q(x)|<V_Q(x)$, то условие (5) гарантирует включение $Q\in L^1(-\infty,a)$ для любого $a\in\mathbb{R}$. Теперь непрерывность функций $f_n(x,k)$ по переменной x очевидна.

Для функции $\phi^-(x,k)$ рассуждения аналогичны. Теорема доказана. ►

Следствие 1. *Если потенциал q является финитным, то решения Йоста аналитичны во всей комплексной плоскости k.*

Следствие 2. *При $|k|\to\infty$, $Re\,k\geq 0$, имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\begin{aligned} \phi^+(x,k)&=1+\int\limits_{-\infty}^{x} R(x-y,k)\,dQ(y)+o\left(\frac{1}{k}\right),\\ \phi^-(x,k)&=1+\int\limits_{x}^{\infty} R(y-x,k)\,dQ(y)+o\left(\frac{1}{k}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

◄ Из (2) и утверждения (iii) следует $\phi^\pm(x,k)=1+O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $|k|\to\infty$, $Rek\geq 0$. Подставляя эти соотношения в (2), получим (15). ►

Замечание 1. Замена параметра $k\mapsto -k$ приводит к еще одной паре функций $\varphi^\mp$, удовлетворяющих условиям $\varphi^+(x,k)\sim e^{kx}$ при $x\to\infty$ и $\varphi^-(x,k)\sim e^{-kx}$ при $x\to-\infty$. Очевидно, что $\varphi^\mp(x,k)=\psi^\pm(x,-k)$. Кроме того, для каждого $x\in\mathbb{R}$ решения $\varphi^\mp(x,k)$ непрерывны по k при $Re\,k\leq 0$ и аналитичны по k при $Re\,k<0$.

2. Дальнейшие свойства решений Йоста. Доказанная теорема 1 позволяет получить свойства решений $\phi^\pm(x,k)$ интегральных уравнений (2), а с ними и свойства решений Йоста уравнения Шрёдингера (1).

Выделим в пространстве BV подпространство функций, удовлетворяющих условию (5) и введем для него обозначение BV_1. Будем считать, что вещественный потенциал q уравнения (1) является обобщенной производной некоторой функции $Q\in BV_1$. Поскольку $q=Q'$ в обобщенном смысле, то функция Q восстанавливается по потенциалу q с точностью до

[1]Всюду далее для обозначения производной функции $f(x,k)$ по переменной x используется одна из следующих записей f', f_x или $\frac{\partial f}{\partial x}$. В каждой конкретной ситуации выбор записи обусловлен наличием в обозначении функции верхнего или нижнего индексов.

аддитивной константы. Поэтому у нас имеется определенный произвол в выборе этой константы. При изучении свойств решения Йоста ψ^+ нам удобно считать, что $Q(x) \to 0$ при $x \to -\infty$.[1] В частности, если потенциал q финитный и $\operatorname{supp} q \subset [a, b]$, то полагаем $Q(x) = 0$ при $x \le a$. Аналогично, при изучении свойств другого решения ψ^- считаем $Q(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Рассмотрим интегральные уравнения (2) и покажем, что их решения $\phi^\pm$ лежат в $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и кроме того, что $\phi^\pm_x \in BV_{\mathrm{loc}}$. Ввиду аналогии рассуждений рассмотрим только решение ϕ^+. Очевидно, что достаточно установить включения $\phi^+ \in W^{1,1}(a, b)$, $\phi^+_x \in BV(a, b)$ для произвольного конечного интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Согласно (6)

$$\phi^+(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, k),$$

где функции f_n удовлетворяют равенствам (14). Из теоремы 1 следует, что при $k \in K_+$ ряд сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (6) через ϕ_n. Тогда для фиксированного $k \in K_+$ получаем

$$\phi_0(x, k) = 1, \qquad \phi_1(x, k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)} Q(y)dy,$$

$$\phi_1'(x, k) = Q(x) - 2k \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)} Q(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)} dQ(y).$$

Отсюда, учитывая $BV(a, b) \subset L^1(a, b)$, следуют включения $\phi_1(x, k) \in W^{1,1}(a, b)$, $\phi_1'(x, k) \in BV(a, b)$. Так как $Q \in BV$, то для функции Q в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ заведомо существуют односторонние пределы $Q(x \pm 0)$. Причем множество точек разрыва функции Q не более чем счетно. Поэтому в точках непрерывности Q для функции ϕ_1 существует производная ϕ_1' по x. Если же функция Q имеет в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ скачок $\triangle Q(x_0) = Q(x_0 + 0) - Q(x_0 - 0)$, то аналогичный по величине скачок будет иметь и производная ϕ_1'. Следовательно, можно доопределить функцию $\phi_1'(x, k) - Q(x)$ по непрерывности на весь отрезок $[a, b]$ и считать $\phi_1'(x, k) - Q(x) \in AC[a, b]$.

Далее, из (14) для $n \ge 1$ имеем

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x, k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)} \phi_n(y, k) Q(y)dy \\ - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1 - e^{-2k(x-y)}}{2k} \phi_n'(y, k) Q(y)dy, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}'(x, k) &= \phi_n(x, k)Q(x) \\ &- 2k \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)} \phi_n(y, k)Q(y)dy - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)} \phi_n'(y, k)Q(y)dy. \end{aligned}$$

Рассуждая по индукции, получаем, что

$$\begin{gathered} \phi_n(x, k) \in W^{1,1}(a, b), \quad \phi_n'(x, k) \in BV(a, b), \\ \phi_n'(x, k) - Q(x)\phi_{n-1}(x, k) \in AC[a, b] \end{gathered} \tag{17}$$

[1] В этом случае потенциал q является конечной мерой Бореля на $\mathbb{R}$.

для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, левые части (16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(x,k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}\phi_n(y,k)Q(y)dy \\ - \int\limits_{-\infty}^{x} R(x-y,k)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-2k(y-s)}\phi_{n-1}(s,k)dQ(s)\right)Q(y)dy,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\phi'_{n+1}(x,k) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}\phi_n(y,k)dQ(y).$$

Отсюда, с учётом (5), (8), легко получается оценка

$$\left|\phi'_{n+1}(x,k)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{x} \left|e^{-2k(x-y)}\right| \left|\phi_n(y,k)\right| dV_Q(y) \le V_Q \sum_{m=0}^{n} \frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{x} V_Q(y)dy\right)^m}{m!}. \tag{19}$$

Следовательно, последовательность $\phi'_n - Q\phi_{n-1}$ сходится равномерно на $[a,b]$. Ввиду равномерной на $[a,b]$ сходимости

$$\phi_n \rightrightarrows \phi^+, \qquad \phi'_n - Q\phi_{n-1} \rightrightarrows \phi^+_x - Q\phi^+ \tag{20}$$

и соотношений (17) получаем

$$\phi^+(x,k) \in W^{1,1}(a,b), \quad \phi^+_x(x,k) \in BV(a,b), \quad \phi^+_x(x,k) - Q(x)\phi^+(x,k) \in AC[a,b].$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При каждом фиксированном $k \in K_+$ имеет место включение $\phi^\pm \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Кроме того, $\phi^\pm_x \in BV_{\mathrm{loc}}$, а разность $\phi^\pm_x - Q\phi^\pm$ абсолютно непрерывна на конечных отрезках в $\mathbb{R}$.*

Из теоремы 2 и (18), (19) следует, что

$$\phi^+_x(x,k) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}\phi^+(y,k)dQ(y), \quad \phi^-_x(x,k) = -\int\limits_{x}^{\infty} e^{-2k(y-x)}\phi^-(y,k)dQ(y),$$

и выполнены оценки

$$\begin{aligned}\left|\phi^+_x(x,k)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{x} \left|e^{-2k(x-y)}\right| \left|\phi^+(y,k)\right| dV_Q(y), \\ \left|\phi^-_x(x,k)\right| \le \int\limits_{x}^{\infty} \left|e^{-2k(x-y)}\right| \left|\phi^-(y,k)\right| dV_Q(y).\end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя в формулы (21) оценку (ii) теоремы 1, получаем следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого $k \in K_+$ производные $\phi^\pm_x(x,k)$ равномерно ограничены:*

$$\left|\phi^+_x(x,k)\right| \le C\int\limits_{-\infty}^{x}(1+|y|)dV_Q(y) \le C\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|y|)dV_Q(y),$$

$$\left|\phi^-_x(x,k)\right| \le C\int\limits_{x}^{\infty}(1+|y|)dV_Q(y) \le C\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|y|)dV_Q(y).$$

Лемма 2. *При $|k| \to \infty$, $Re\, k \geq 0$, будут выполнены предельные соотношения $\phi_x^{\pm}(x,k) \to 0$.*

Аналогично, из (21) и (12) получаем утверждение.

Лемма 3. *Для любого $k \in K_+$ производные $\phi_x^{\pm}(x,k)$ удовлетворяют оценкам:*

$$\left|\phi_x^+(x,k)\right| \leq C_1 V_Q(x), \qquad x \leq 0,$$

$$\left|\phi_x^-(x,k)\right| \leq C_2 V_Q(x), \qquad x \geq 0,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от k.

Лемма 4. *Если $Re\, k > 0$, то $\phi_x^+(x,k) \to 0$ при $x \to \infty$ и $\phi_x^-(x,k) \to 0$ при $x \to -\infty$.*

◀ Из (21) имеем:

$$\left|\phi_x^+(x,k)\right| \leq \left|e^{-2kx}\right| \int\limits_{-\infty}^{x} \left|e^{2ky}\right| \left|\phi^+(y,k)\right| dV_Q(y).$$

Ввиду (5) и оценки (iii) теоремы 1 правая часть неравенства стремится к нулю при $x \to \infty$, если только $Re\, k > 0$. ▶

Свойства функций $\phi^{\pm}$ и их производных позволяют уточнить теорему 2.

Лемма 5. *Если $-\infty < a < \infty$, то при каждом $k \in K_+ \setminus \{0\}$ выполнены включения $\phi^+ - 1 \in W^{1,1}(-\infty, a)$ и $\phi^- - 1 \in W^{1,1}(a, \infty)$.*

Действительно, включение $\phi^+ \in L^1(-\infty, a)$ следует из оценки (iii) теоремы 1 и (5), а включение $\phi_x^+ \in L^1(-\infty, a)$ следует из леммы 3 и того же условия (5).

Отметим, что при $k = 0$ лемма 5 неверна, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример. Рассмотрим уравнение (1) с потенциалом $q(x) = x^{-\frac{8}{3}}$ при $x \geq 1$. Не сложно проверить, что условие (5) выполнено. Кроме того, при $x \geq 1$ будем иметь

$$\psi^-(x,0) = \phi^-(x,0) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} \left[\mathrm{ch}\left(3x^{-\frac{1}{3}}\right) - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3} \mathrm{sh}\left(3x^{-\frac{1}{3}}\right) \right].$$

Привлекая формулу Тейлора, получим асимптотическое равенство

$$\phi^-(x,0) = 1 + \frac{9}{10} x^{-\frac{2}{3}} + o\left(x^{-\frac{2}{3}}\right), \qquad x \to \infty,$$

из которого очевидным образом следует, что $\phi^- - 1 \notin L^1(a, \infty)$ при любом $a \in \mathbb{R}$.

3. Аппроксимация гладкими потенциалами. В данном пункте будет показано, что в обратной задаче рассеяния уравнение Шрёдингера с потенциалом $q \in \mathcal{M}$, $q = Q'$, $q \in BV_1$ можно равномерно аппроксимировать уравнениями с гладкими потенциалами. Отметим, что аналогичный результат для уравнения на конечном промежутке получен в работе [5](см. также [4]).

Мы по-прежнему считаем, что $q = Q'$ в обобщенном смысле и $Q \in BV_1$. Пусть $\eta_\varepsilon(x)$ – стандартное усредняющее ядро. Для функции $Q \in BV_1$ определим среднюю функцию $Q_\varepsilon = \eta_\varepsilon * Q$ на $\mathbb{R}$. Тогда для каждого разбиения $-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq x < \infty$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} |Q_\varepsilon(x_i) - Q_\varepsilon(x_{i-1})| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_\varepsilon(y) \sum_{i=1}^{n} |Q(x_i - y) - Q(x_{i-1} - y)|\, dy$$

$$\leq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(y) V_Q(x-y)\, dy \leq V_Q(x+\varepsilon).$$

Следовательно, $V_{Q_\varepsilon}(x) \le V_Q(x+\varepsilon) \le V_Q$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |x|\, dV_{Q_\varepsilon}(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} V_{Q_\varepsilon}(x)\, dx - xV_{Q_\varepsilon}(x)\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{0} V_{Q_\varepsilon}(x)\, dx \le \int\limits_{-\infty}^{0} V_Q(x+\varepsilon)\, dx < \infty.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} |x|\, dV_{Q_\varepsilon}(x) < \infty.$$

Из полученных неравенств, в частности, следует $Q_\varepsilon \in BV_1$.

Замечание 2. Легко видеть, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ выполнено неравенство

$$|Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(y)| \le V_{Q_\varepsilon}(x) \le V_Q(x+\varepsilon).$$

При $y \to -\infty$ получаем

$$|Q_\varepsilon(x)| \le V_{Q_\varepsilon}(x) \le V_Q(x+\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Следовательно, $Q_\varepsilon \in L^1(-\infty, b)$ для любого $b \in \mathbb{R}$. Кроме того, из теоремы Лебега следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{x} |Q_\varepsilon(y) - Q(y)|\, dy \to 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим через ϕ_ε^+ решение интегрального уравнения

$$\phi_\varepsilon^+(x,k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} R(x-y,k)\phi_\varepsilon^+(x,k) dQ_\varepsilon(y).$$

Ввиду $Q_\varepsilon \in BV_1$ решение ϕ_ε^+ существует при каждом $k \in K_+$. Через $\psi_\varepsilon^+ = e^{kx}\phi_\varepsilon^+$ обозначаем решение Йоста уравнения Шрёдингера с гладким потенциалом $q_\varepsilon = Q'_\varepsilon$.

Лемма 6. *Для любого $k \in K_+$ при $\varepsilon \to 0$ выполнены предельные соотношения:*
(1) $\psi_\varepsilon^+(x,k) \to \psi^+(x,k)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$*;*
(2) $\frac{\partial}{\partial x}\psi_\varepsilon^+(x,k) \to \frac{\partial}{\partial x}\psi^+(x,k)$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$.

◄ Поскольку функция Q непрерывна почти всюду на $\mathbb{R}$, а решения Йоста непрерывны на всей оси $\mathbb{R}$, то достаточно показать справедливость утверждений леммы в точках непрерывности функции Q.

Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $k \in K_+$ произвольно фиксированы, причем функция Q непрерывна в точке x. Тогда ввиду теоремы 1 и (20) для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ будут выполнены равенства

$$\phi_\varepsilon^+(x,k) = \lim_{n\to\infty} \phi_{\varepsilon,n}(x,k), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\phi_\varepsilon^+(x,k) = \lim_{n\to\infty} \phi'_{\varepsilon,n}(x,k), \tag{23}$$

где (см. (14)) $\phi_{\varepsilon,0}(x,k)=1$,

$$\phi_{\varepsilon,n+1}(x,k)=\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}\phi_{\varepsilon,n}(y,k)Q_\varepsilon(y)dy - \int\limits_{-\infty}^{x} R(x-y,k)\phi'_{\varepsilon,n}(y,k)Q_\varepsilon(y)dy, \tag{24}$$

$$\phi'_{\varepsilon,n+1}(x,k)=\phi_{\varepsilon,n}(x,k)Q_\varepsilon(x) - 2k\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}\phi_{\varepsilon,n}(y,k)Q_\varepsilon(y)dy - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2k(x-y)}\phi'_{\varepsilon,n}(y,k)Q_\varepsilon(y)dy.$$

Здесь полагаем, что значению $\varepsilon=0$ соответствует функция $\phi^+=\phi^+_0$. Из неравенств (8), (19), (22) следует, что оба предела в (23) равномерны относительно $\varepsilon\in[0,1]$. Поэтому, очевидно, для доказательства леммы нам достаточно показать, что при $\varepsilon\to 0$ при каждом n будут выполнены соотношения $\phi^{(j)}_{\varepsilon,n}(x,k)\to\phi^{(j)}_n(x,k)$, $j=0,1$.

При $n=0$ предельные соотношения очевидны. Далее, рассуждая по индукции, предположим, что $\phi^{(j)}_{\varepsilon,n}(x,k)\to\phi^{(j)}_n(x,k)$ для всех $n\le N$ и покажем, что $\phi^{(j)}_{\varepsilon,N+1}(x,k)\to\phi^{(j)}_{N+1}(x,k)$ при $\varepsilon\to 0$. Но эти соотношения следуют из неравенств (8), (22), обеспечивающих возможность перехода к пределу под знаком интеграла в выражениях (24). Действительно, из (8), (19) и (22) при $y\in(-\infty,x]$ получаем оценки

$$\left|e^{-2k(x-y)}\phi_{\varepsilon,n}(y,k)Q_\varepsilon(y)\right|\le e^{M_\varepsilon(y)}\left|Q_\varepsilon(y)\right|\le Ce^{M(y)}\left|Q(y)\right|\in L_1(-\infty,x),$$

$$\left|\phi'_{\varepsilon,n}(y,k)\right|\le e^{M_\varepsilon(y)}V_{Q_\varepsilon}(y)\le e^{M(y+\varepsilon)}V_Q(y+\varepsilon),\qquad M_\varepsilon(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}V_{Q_\varepsilon}(s)ds,$$

$$\left|R(x-y,k)\phi'_{\varepsilon,n}(y,k)Q_\varepsilon(y)\right| \le (x-y)e^{M_\varepsilon(y)}V_{Q_\varepsilon}(y)|Q_\varepsilon(y)|\le(x-y)e^{M(y+\varepsilon)}V_Q(y+\varepsilon)|Q(y)|.$$

А поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{x}(x-y)e^{M(y)}V_Q(y)|Q(y)|dy\le\int\limits_{-\infty}^{x}(x-y)V^2_Q(y)dy \le x\int\limits_{-\infty}^{x}V^2_Q(y)dy-\int\limits_{-\infty}^{x}V^2_Q(y)ydy,$$

то ввиду $\lim\limits_{y\to-\infty}yV_Q(y)=0$ правая часть неравенства не превосходит

$$x\int\limits_{-\infty}^{x}V^2_Q(y)dy+\int\limits_{-\infty}^{x}y^2V_Q(y)dV_Q(y)<\infty,$$

что дает возможность применения теоремы Лебега о мажорантной сходимости в (24) при $n=N$. Лемма доказана. ▶

Теорема 3. *Пусть $k \in K_+$. Тогда при любом $b \in \mathbb{R}$ на полуоси $(-\infty, b]$ выполнено равномерное предельное соотношение $\psi_\varepsilon^+ \rightrightarrows \psi^+$ при $\varepsilon \to 0$, а на полуоси $[b, \infty)$ выполнено $\psi_\varepsilon^- \rightrightarrows \psi^-$.*

◀ Пусть $b \in \mathbb{R}$ и $k \in K_+$ фиксированы. Для произвольного $\tau > 0$ в силу теоремы 1 и неравенства (22) существует $a \in (-\infty, 0)$ не зависящее от ε такое, что

$$\left|\psi_\varepsilon^+(x,k) - \psi^+(x,k)\right| \le \left|\phi_\varepsilon^+(x,k) - \phi^+(x,k)\right| < \frac{\tau}{3}, \quad x \in (-\infty, a]. \tag{25}$$

Если $a \ge b$, то теорему можно считать доказанной.

Пусть $a < b$. Обозначим через ψ_ε^* решение дифференциального уравнения (1) с гладким потенциалом q_ε, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\psi_\varepsilon^*(a,k) = \psi^+(a,k), \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi_\varepsilon^*(a,k) = \frac{\partial}{\partial x}\psi^+(a+0,k).$$

Тогда для любого $x \in [a,b]$ имеем

$$\left|\psi_\varepsilon^+(x,k) - \psi^+(x,k)\right| \le \left|\psi_\varepsilon^+(x,k) - \psi_\varepsilon^*(x,k)\right| + \left|\psi_\varepsilon^*(x,k) - \psi^+(x,k)\right|.$$

Покажем, что при достаточно малых ε оба модуля справа будут меньше $\frac{\tau}{3}$ сразу для всех $x \in [a,b]$. Функции ψ_ε^+ и ψ_ε^* являются решениями одного дифференциального уравнения с гладким потенциалом q_ε. В силу леммы 5 при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\psi_\varepsilon^+(a,k) \to \psi^+(a,k), \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi_\varepsilon^+(a,k) \to \frac{\partial}{\partial x}\psi^+(a+0,k).$$

Поэтому при достаточно малых ε ввиду непрерывной зависимости решений уравнения Шрёдингера с гладким потенциалом от начальных данных (см., например, [11, Гл. 2,§4]) для всех $x \in [a,b]$ будет выполнено неравенство

$$\left|\psi_\varepsilon^+(x,k) - \psi_\varepsilon^*(x,k)\right| < \frac{\tau}{3}.$$

Что касается разности $|\psi_\varepsilon^*(x,k) - \phi^+(x,k)|$, то в силу уже упоминавшегося в начале данного пункта результата работы [5] при $\varepsilon \to 0$ она стремится к нулю равномерно на $[a,b]$.

Следовательно, при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\left|\psi_\varepsilon^+(x,k) - \psi^+(x,k)\right| < \tau, \quad x \in (-\infty, b],$$

окончательно доказывающее утверждение теоремы для решения ψ^+. Для ψ^- рассуждения аналогичны. ▶

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л.Д. *Обратная задача квантовой теории рассеяния* // УМН, 14:4(88). 1959. С. 57–119.
2. P. Deift, E. Trubowitz *Inverse scattering on the line* // Comm. Pure Appl. Math. 32. 1979. P. 121–251.
3. Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова думка. 1977.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость* // Функциональный анализ и его приложения. 44:4. 2010. С. 34–53.
5. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Мат. заметки, 66:6. 1999. С. 897–912.
6. R.O. Hryniv, Ya.V. Mykytyuk *Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials* // J. Funct. Anal., 238:1. 2006. P. 27–57.
7. Бадахов М.Ш., Шабат А.Б. *О преобразованиях Дарбу в обратной задаче рассеяния* // УМЖ. Т. 8. № 4. 2016. С. 43–52.
8. Шабат А.Б. *Обратная спектральная задача для дельтаобразных потенциалов* // Письма в ЖЭТФ, 102:9. 2015. С. 705–708.
9. Шабат А.Б. *Разностное уравнение Шрёдингера и квазисимметрические многочлены* // ТМФ, 184:2. 2015. С. 16–27.
10. Кулаев Р.Ч., Шабат А.Б. *Обратная задача рассеяния для финитных потенциалов в пространстве мер Бореля* // Препринт ЮМИ ВНЦ РАН № 2. 2016.
11. Коддингтон Э., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Издательство ЛКИ, 2007.

Руслан Черменович Кулаев,
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46,
362025, г. Владикавказ, Россия
Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: kulaev@smath.ru

Алексей Борисович Шабат,
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
просп. Академика Семенова, д. 1-А,
142432, МО., г. Черноголовка, Россия
E-mail: shabatab@mail.ru