ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 45-54.

УДК 517.957

# О ГЛОБАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

**Я.Ш. ИЛЬЯСОВ, Э.Э. ХОЛОДНОВ**

**Аннотация.** В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, рассматривается гиперболическое уравнение вида

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta_p v + \lambda |v|^{p-2}v - |v|^{\alpha-2}v, \quad x \in \Omega, \\ v\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Предполагается, что $1 < \alpha < p < +\infty$, т.е. нелинейность в правой части уравнения является нелипшицевого типа. Такой тип нелинейности, как правило, вызывает трудности в применении стандартных подходов теории нелинейных дифференциальных уравнений. Дополнительная сложность связана с наличием в уравнении $p$-лапласиана $\Delta_p(\cdot) := \mathrm{div}(|\nabla(\cdot)|^{p-2}\nabla(\cdot))$. В первом результате доказывается теорема о существовании, так называемого, основного стационарного состояния уравнения. Доказательство этой теоремы основывается на методе многообразия Нехари. В главном результате работы, показано, что любое основное стационарное состояние рассматриваемого уравнения является неустойчивым глобально по времени. Доказательство основывается на развитии метода исследования устойчивости решений гиперболических уравнений, предложенного Пеином и Саттингером.

**Ключевые слова:** устойчивость решений, нелинейные гиперболические уравнения, метод многообразия Нехари, $p$-лапласиан.

**Mathematics Subject Classification:** 35J61, 35J92, 35J50

## Введение

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u - |u|^{\alpha-2}u, \ x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{B.1}$$

где $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $n \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Delta_p(\cdot) := \mathrm{div}(|\nabla(\cdot)|^{p-2}\nabla(\cdot))$ – $p$-лапласиан, $1 < p < +\infty$. Предполагается, что $\alpha \in (1, p)$, т.е. нелинейность в правой части является нелипшицевого типа. Особый интерес к таким проблемам связан с тем, что они могут обладать решениями с компактными носителями в $\Omega$ (см. напр. [1–3, 5, 16] и обзор литературы в них). Однако, несмотря на то, что имеется достаточно большое число работ, посвященных таким решениям, вопрос об их устойчивости для соответствующих нестационарных проблем: параболических, гиперболических, уравнения Шредингера и т.д., изучен в меньшей степени. Основная сложность здесь связана с тем, что присутствие в правой части (B.1) нелипшицевой нелинейности вызывает

Y.Sh. Il'yasov, E.E. Kholodnov, On global instability of solutions to hyperbolic equations with non-Lipschitz non-linearity.



*Поступила 28 августа 2017 г.*

трудности в применении методов, основанных на исследовании соответствующих линеаризованных уравнений. Другая трудность заключается в том, что большинство известных результатов о существовании решений с компактными носителями в $\Omega$, как правило, не конструктивны и носят абстрактный характер, что препятствует в дальнейшем исследованию детальных свойств этих решений таких, как например, устойчивость.

В работах [4,5,8,10], для уравнений с нелипшицевыми нелинейностями найдены решения с компактными носителями в $\Omega$, которые, к тому же, являются основными состояниями. Оказывается, что данное дополнительное свойство позволяет получать определённые результаты об устойчивости таких решений. В частности, в работе [4] получены результаты об устойчивости решений (В.1) (при $p = 2$) типа основного состояния с компактными носителями в $\Omega$ для соответствующей параболической задачи.

Цель данной работы – исследовать устойчивость стационарных решений гиперболического уравнения

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta_p v + \lambda |v|^{p-2} v - |v|^{\alpha-2} v, \quad x \in \Omega, \\ v\big|_{t=0} = v_0, \\ v_t\big|_{t=0} = v_1, \\ v\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{В.2}$$

Для этого сначала доказывается существование стационарных решений уравнения (В.2) типа основного состояния. Доказательство этого результата основывается на использовании метода многообразия Нехари. Такой подход позволяет получить некоторые дополнительные качественно-геометрические свойства этих решений, необходимые для дальнейшего. В основном результате, мы доказываем, что стационарные решения типа основного состояния гиперболической задачи (В.2) глобально неустойчивы. Доказательство данного результата основывается на развитии подхода, предложенного в [13,15], для исследования устойчивости решений гиперболических уравнений.

## 1. Основной результат

В дальнейшем, $W := W_0^{1,p}(\Omega)$ обозначает соболевское пространство, которое задается пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме:

$$\|u\|_1 = \left( \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$p^*$ обозначает критический показатель Соболева, который определяется как

$$p^* = \begin{cases} +\infty, & n \le p, \\ \dfrac{pn}{n-p}, & n > p. \end{cases}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)$ и различные сопряжения в соответствующих дуальных пространствах. $\lambda_1$ – минимальное собственное значение оператора $-\Delta_p$ с граничными условиями Дирихле. Как известно,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W \setminus 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}. \tag{1}$$

Задача (В.1) имеет вариационную форму с функционалом Эйлера-Лагранжа следующего вида:

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega |u|^\alpha \, dx, \quad u \in W. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать слабые решения $u_\lambda$ задачи (B.1), т.е. критические точки функционала (2):

$$D_u\Phi_\lambda(u_\lambda)(\phi) = 0, \quad \forall \phi \in W, \tag{3}$$

где $D_u\Phi_\lambda(u_\lambda)$ – производная по Фреше. Слабое решение $u_\lambda$ задачи (B.1) называется *основным состоянием* (*основным стационарным состоянием* (B.2)), если выполняется неравенство $\Phi_\lambda(u_\lambda) \le \Phi_\lambda(w_\lambda)$ для любого другого слабого решения $w_\lambda \in W \setminus 0$ этой задачи (B.1).

Мы будем исследовать задачу (B.1) методом многообразия Нехари. Соответствующая минимизационная задача Нехари задаётся следующим образом:

$$\hat{\Phi}_\lambda = \inf\{\Phi_\lambda(u) : u \in N_\lambda\}, \tag{4}$$

где

$$N_\lambda = \Big\{ u \in W \setminus 0 : \Phi'_\lambda(u) := D_u\Phi_\lambda(u)(u) = 0 \Big\} \tag{5}$$

многообразие Нехари. Отметим, поскольку любое нетривиальное решение задачи (B.1) принадлежит $N_\lambda$, а $N_\lambda = \emptyset$ при $\lambda \le \lambda_1$, то (B.1) не имеет решений при $\lambda \le \lambda_1$, кроме тривиального $u \equiv 0$.

Нашим первым основным результатом является

**Теорема 1.** *Пусть $1 < \alpha < p < +\infty$, $\partial\Omega$ является $C^{1,\gamma}$-многообразием с некоторым $\gamma \in (0,1]$. Тогда при всех $\lambda > \lambda_1$*

1. $\hat{\Phi}_\lambda > 0$*;*
2. *существует основное состояние $u_\lambda$ задачи (B.1), при этом $u_\lambda \ge 0$ в $\Omega$ и $u_\lambda \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ при некотором $\beta \in (0,1)$.*

**Замечание 1.** *Аналогичный результат, в случае $p = 2$, получен в [5].*

Следующий функционал

$$E_\lambda(\xi,\zeta) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\zeta|^2\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\xi|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |\xi|^p\,dx + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega |\xi|^\alpha\,dx, \quad \xi \in W,\ \zeta \in L^2(\Omega)$$

называется *функционалом энергии* задачи (B.2).

Пусть $(v_0, v_1) \in W \times L^2(\Omega)$. Следуя работе [13], мы будем называть $v(t) := v(t; v_0, v_1)$ слабым решением задачи (B.2) на $[0,T]$, где $T < +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

($1^0$) *отображение $[0,T] \ni t \mapsto v(t) \in W$ непрерывно в слабой топологии $W$;*

($2^0$) *существует отображение $[0,T] \ni t \mapsto v_t(t) \in L^2(\Omega)$ непрерывное в слабой топологии $L^2(\Omega)$, такое что выполняется равенство*

$$\langle v(t), \phi\rangle\big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \langle v_s(s), \phi\rangle\,dx, \tag{6}$$

*при всех $t_1, t_2$, $0 \le t_1 < t_2 \leqslant T$ и всех $\phi \in L^2(\Omega)$;*

($3^0$) *для любого $w : [0,T] \to W$, удовлетворяющего свойствам ($1^0$), ($2^0$), выполняется равенство*

$$\langle v_t(t), w(t)\rangle\big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} [\langle v_s(s), w_s(s)\rangle - \\ \langle |\nabla v(s)|^{p-2}\nabla v(s), \nabla w(s)\rangle + \langle \lambda|v(s)|^{p-2}v(s) - |v(s)|^{\alpha-2}v(s), w(s)\rangle]\,dx; \tag{7}$$

($4^0$) *справедливо неравенство*

$$E_\lambda(v(t), v_t(t)) \le E_\lambda(v_0, v_1), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{8}$$

Пусть $T_m := T_m(v_0, v_1) \in (0, +\infty]$ – максимальное значение такое, что при всех $T \in (0, T_m)$ существует слабое решение $v(t; v_0, v_1)$ задачи (B.2) на $[0, T]$. В случае $T_m = +\infty$, будем говорить, что соответствующее $v(t; v_0, v_1)$ является *глобальным решением* (B.2).

Отметим, из теоремы 1 вытекает, что задача (B.2) обладает глобальным решением. Действительно, слабое решение $u_\lambda$ задачи (B.1) является также слабым решением $u_\lambda(t; u_\lambda, 0) \equiv u_\lambda$ задачи (B.2) на $[0, +\infty)$.

Однако, поскольку уравнение (B.2) содержит нелипшицеву нелинейность, вопрос о том, что обладает ли задача (B.2), при произвольном $(v_0, v_1) \in W \times L^2(\Omega)$, слабым решением $v(t; v_0, v_1)$ с некоторым $T_m(v_0, v_1) \in (0, +\infty]$ является, насколько нам известно, открытым. В данной работе мы не исследуем этот вопрос.

Мы будем говорить, что слабое решение $v_\lambda(t; v_0, v_1)$ задачи (B.2) является *глобально неустойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $(w_0, w_1) \in W \times L^2(\Omega)$: $\|v_0 - w_0\|_1 < \varepsilon$ и $\|v_1 - w_1\|_{L^2} < \varepsilon$, что будет выполняться одна из следующих альтернатив: 1) задача (B.2) не имеет слабых решений с начальным условием $(w_0, w_1)$; 2) задача (B.2) обладает слабым решением $w_\lambda(t; w_0, w_1)$, но при этом $T_m(w_0, w_1) < +\infty$; 3) существует глобальное на $[0, +\infty)$ решение $w_\lambda(t; w_0, w_1)$ задачи (B.2) такое, что

$$\int_\Omega |v_\lambda(t; v_0, v_1) - w_\lambda(t; w_0, w_1)|^2 \, dx \to +\infty \text{ при } t \to +\infty. \tag{9}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема:

**Теорема 2.** *Пусть $1 < \alpha < p < +\infty$, $\partial\Omega$ является $C^{1,\gamma}$-многообразием с некоторым $\gamma \in (0, 1]$. Тогда при всех $\lambda > \lambda_1$ любое основное состояние $u_\lambda$ задачи (B.1) является глобально неустойчивым решением гиперболической задачи (B.2).*

**Замечание 2.** *В данной работе не рассматривается существование основных состояний задачи (B.1) с компактными носителями в $\Omega$. Тем не менее, из доказанной теоремы 2 вытекает, что если такие решения существуют, то они являются глобально неустойчивыми для (B.2).*

## 2. Существование основного состояния задачи (B.1)

Введём обозначения

$$H_\lambda(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^p \, dx, \quad F(u) := \int_\Omega |u|^\alpha \, dx.$$

Рассмотрим *функционал Нехари*

$$\Phi'_\lambda(u) := H_\lambda(u) + F(u). \tag{10}$$

Из (1) вытекает, что $N_\lambda \neq \emptyset$, тогда и только тогда, когда $\lambda > \lambda_1$. Заметим, что $\Phi_\lambda(u) > 0$, $\forall u \in N_\lambda$. Действительно, если $u \in N_\lambda$, то $H_\lambda(u) = -F(u)$, откуда, учитывая $1 < \alpha < p$, получаем

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{p - \alpha}{p\alpha} F(u) > 0. \tag{11}$$

Рассмотрим минимизационную задачу (4). Отметим, что для любого $u \in N_\lambda$

$$D_{uu}\Phi_\lambda(u)(u, u) = (\alpha - p) \int_\Omega |u|^\alpha \, dx < 0. \tag{12}$$

Как известно (см. [7, 11]), условие (12) является достаточным для того, чтобы любое решение $u$ задачи (4) являлось критической точкой функционала $\Phi_\lambda(u)$.

Рассмотрим функционал расслоения ( [14])

$$J_u(r) = \Phi_\lambda(ru), \ r > 0. \tag{13}$$

Пусть $H_\lambda(u) < 0$. Тогда существует единственный корень $r^* = r^*(u) > 0$ уравнения

$$J'_u(r) = r^{p-1} H_\lambda(u) + r^{\alpha-1} F(u) = 0. \tag{14}$$

Действительно, учитывая $H_\lambda(u) < 0$, находим

$$r^*(u) := \left( \frac{F(u)}{-H_\lambda(u)} \right)^{\frac{1}{p-\alpha}}. \tag{15}$$

При этом, как легко видеть, $r^*(u)$ является точкой глобального максимума для $J_u(r)$. Отсюда вытекает, что задача (4) эквивалентна следующей:

$$\hat{\Phi}_\lambda = \inf\{\Phi_\lambda(r^*(v)v) : \|v\|_1 = 1, H_\lambda(v) < 0\}, \tag{16}$$

где

$$\Phi_\lambda(r^*(v)v) = \frac{(p-\alpha)}{p\alpha} \frac{F(v)^{\frac{p}{p-\alpha}}}{(-H_\lambda(v))^{\frac{\alpha}{p-\alpha}}}. \tag{17}$$

*Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим минимизирующую последовательность $(v_n)$ задачи (16), т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(r^*(v_n)v_n) = \hat{\Phi}_\lambda. \tag{18}$$

Отметим, что $\|v_n\|_1 = 1$, поэтому по теоремам Банаха-Алаоглу и Соболева существует подпоследовательность, снова обозначаемая $(v_n)$, такая, что $v_n \rightharpoonup w$ слабо в $W$ и $v_n \to w$ сильно в $L^\gamma(\Omega)$ при $1 \le \gamma < p^*$. Покажем, что $w \ne 0$. Предположим противное: пусть $w = 0$, тогда $\int_\Omega |v_n|^p\,dx \to 0$ и в этом случае

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx - \lambda \int_\Omega |v_n|^p\,dx = 1 - \lambda \int_\Omega |v_n|^p\,dx \ge 0, \tag{19}$$

для достаточно больших $n$. Но это противоречит условию, что $H_\lambda(v_n) < 0$ для $n = 1, 2....$ Следовательно, $w \ne 0$. Отсюда и из (11) вытекает $\hat{\Phi}_\lambda > 0$.

Рассмотрим

$$u_n = r^*(v_n)v_n. \tag{20}$$

Заметим, что $r^*(v_n)$ ограничена. Действительно, из (15) и, из выше доказанного, следует, что $F(v_n)$ ограничен, а $H_\lambda(v_n)$ не стремится к нулю. Отсюда, в силу (15), имеем $0 < C_1 < r^*(v_n) < C_2 < +\infty$, где $C_1, C_2$ не зависят от $n$. Следовательно, существует предельная точка $u_\lambda$ такая, что для некоторой подпоследовательности, снова обозначаемой $(u_n)$, выполняется $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ слабо в $W$ и $u_n \to u_\lambda$ сильно в $L^\gamma(\Omega)$ при $1 \le \gamma < p^*$.

Отсюда, из слабой полунепрерывности снизу нормы $\|\cdot\|_1$, вытекает

$$\|u_\lambda\|_1 \le \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_1 = d,$$

$$\Phi_\lambda(u_\lambda) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(u_n) = \hat{\Phi}_\lambda \quad \text{и} \quad \Phi'_\lambda(u_\lambda) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi'_\lambda(u_n) = 0.$$

Таким образом, если $\|u_\lambda\|_1 = d$, то $\Phi'_\lambda(u_\lambda) = 0$, $\Phi_\lambda(u_\lambda) = \hat{\Phi}_\lambda$, и $u_\lambda$ – ненулевая минимизирующая точка (4).

Предположим, что $\|u_\lambda\|_1 < d$, тогда $\Phi'_\lambda(u_\lambda) < 0$ и $\Phi_\lambda(u_\lambda) < \hat{\Phi}_\lambda$. Покажем, что этого не может быть. Действительно, в этом случае существует $\bar{t} \in (0,1)$ такое, что $\Phi'_\lambda(\bar{t}u_\lambda) = 0$. Заметим, т.к. $\lim_{n\to+\infty} F(u_n) \to F(u_\lambda)$, то мы имеем

$$\frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} H_\lambda(u_n) = \hat{\Phi}_\lambda - \frac{1}{\alpha} F(u_\lambda) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} H_\lambda(u_n) = -F(u_\lambda).$$

Отсюда

$$\Phi_\lambda(\bar{t}u_\lambda) = \frac{\bar{t}^p}{p}H_\lambda(u_\lambda) + \frac{\bar{t}^\alpha}{\alpha}F(u_\lambda) < \frac{\bar{t}^p}{p}\liminf_{n\to+\infty} H_\lambda(u_n) + \frac{\bar{t}^\alpha}{\alpha}F(u_\lambda) =$$
$$\hat{\Phi}_\lambda - \frac{1}{\alpha}F(u_\lambda) - \frac{\bar{t}^p - 1}{p}F(u_\lambda) + \frac{\bar{t}^\alpha}{\alpha}F(u_\lambda) =$$
$$\hat{\Phi}_\lambda + \left(\frac{1-\bar{t}^p}{p} + \frac{\bar{t}^\alpha - 1}{\alpha}\right)F(u_\lambda).$$

Обозначим

$$I(t) = \left(\frac{1-\bar{t}^p}{p} + \frac{\bar{t}^\alpha - 1}{\alpha}\right)F(u_\lambda). \tag{21}$$

Значения этого функционала на границах следующие

$$I(0) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha}\right)F(u_\lambda) < 0, \quad I(1) = 0.$$

При этом

$$I'(t) = \left(-t^{p-1} + t^{\alpha-1}\right)F(u_\lambda) > 0, \ \forall t \in (0,1). \tag{22}$$

Следовательно, $I(t) < 0$ для $0 < t \leqslant 1$ и $\Phi_\lambda(\bar{t}u_\lambda) < \hat{\Phi}_\lambda$. Однако $\Phi'_\lambda(\bar{t}u_\lambda) = 0$, т.е. $\bar{t}u_\lambda \in N_\lambda$. Получили противоречие с определением $\hat{\Phi}_\lambda$. Следовательно, действительно $u_\lambda$ – ненулевая минимизирующая точка (4).

Заметим, что $\Phi_\lambda(u) = \Phi_\lambda(|u|)$, $\forall u \in W$ и, если $u \in N_\lambda$, то и $|u| \in N_\lambda$. Следовательно, $|u_\lambda|$ также решение задачи (4), т.е. можно считать, что $u_\lambda \geq 0$ на $\Omega$. Отметим, что по условию граница $\partial\Omega$ является $C^{1,\gamma}$-многообразием при некотором $\gamma \in (0,1]$. Отсюда, применяя стандартную теорию регулярности решений квазилинейных краевых задач [6, 12, 17], получаем, что $u_\lambda \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ при некотором $\beta \in (0,1)$. Теорема 1 доказана. □

## 3. Основная лемма

Следующая лемма нам понадобится ниже при исследовании устойчивости решений (B.2).

**Лемма 1.** *Пусть $(u_n)$ последовательность в $W \setminus 0$, такая что $\Phi'_\lambda(u_n) \leq 0$ и $\Phi'_\lambda(u_n) \to 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(u_n) \geq \hat{\Phi}_\lambda. \tag{23}$$

*Доказательство.* Пусть дана последовательность $(u_n) \subset W \setminus 0$, такая что $\Phi'_\lambda(u_n) \leq 0$ и $\Phi'_\lambda(u_n) \to 0$. Запишем данную последовательность в следующем виде: $u_n = r_n v_n$, где $r_n = \|u_n\|_1$ и $\|v_n\|_1 = 1$. Поскольку $(v_n)$ ограничена в $W$, то по теоремам Банаха-Алаоглу и Соболева, без ограничения общности, можно считать, что $v_n \to \bar{v}$ сходится сильно в $L^\gamma(\Omega)$ при $1 \leq \gamma < p^*$ и $v_n \rightharpoonup \bar{v}$ слабо в $W$ для некоторого $\bar{v} \in W$. Докажем от противного, что $\bar{v}$ не равняется нулю. Действительно, пусть $v_n \to 0$ в $L^p(\Omega)$. Тогда $H_\lambda(v_n) \to 1$ и $F(v_n) \to 0$. Однако, это влечёт

$$1 \longleftarrow H_\lambda(v_n) \leq H_\lambda(v_n) + r_n^{\alpha-p}F(v_n) = \frac{1}{r_n^p}\Phi'_\lambda(u_n) \leq 0. \tag{24}$$

Получили противоречие. Покажем, что $r_n$ не стремится к нулю. Предположим противное: $r_n \to 0$. Тогда

$$H_\lambda(v_n) + r_n^{\alpha-p}F(v_n) \to +\infty, \tag{25}$$

так как $F_\alpha(v_n) \to F(\bar{v}) \neq 0$. Опять получили противоречие.

Предположим, что $r_n$ стремится к бесконечности. Тогда $F(u_n) = r_n^\alpha F(v_n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и, так как $H_\lambda(u_n) + F(u_n) \to 0$, то $-H_\lambda(u_n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Отсюда,

$$\Phi_\lambda(u_n) = \left(\frac{\alpha - p}{p\alpha}\right) H_\lambda(u_n) + \frac{1}{\alpha}\Phi'_\lambda(u_n) \to +\infty. \tag{26}$$

Следовательно, неравенство (23) справедливо.

Теперь рассмотрим случай, когда $(r_n)$ ограничено и, следовательно, $(u_n)$ ограничено. Тогда, как и выше, без ограничения общности, можно считать, что существует предел $w$ такой, что $u_n \to w$ сходится сильно в $L^\gamma(\Omega)$ при $1 \le \gamma < p^*$ и $u_n \rightharpoonup w$ слабо в $W$. Рассуждая аналогично предыдущему, можно показать, что $w \ne 0$ и $\Phi'_\lambda(w) \le 0$. Отсюда, если $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_1 = \|w\|_1$, то $\Phi'_\lambda(w) = 0$ и получаем требуемое $\lim_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(u_n) = \Phi_\lambda(w) \ge \hat\Phi_\lambda$. С другой стороны, невозможна ситуация, когда $\Phi'_\lambda(w) < 0$. Действительно, пусть $\Phi'_\lambda(w) < 0$. Тогда найдется такое $\bar t \in (0,1)$, что $\Phi'_\lambda(\bar t w) = 0$. Рассуждая также как и при доказательстве теоремы 1, получаем следующее неравенство:

$$\Phi_\lambda(\bar t w) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(u_n) + I(\bar t), \tag{27}$$

где $I(t)$ функция, определённая в (21). Как было показано выше, $I(\bar t) < 0$. Поэтому, если $\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\lambda(u_n) < \hat\Phi_\lambda$, тогда $\Phi_\lambda(\bar t w) < \hat\Phi_\lambda$. Однако $\Phi'_\lambda(\bar t w) = 0$, т.е. $\bar t w \in N_\lambda$. Получили противоречие с определением $\hat\Phi_\lambda$. □

## 4. Доказательство глобальной неустойчивости задачи (B.2)

В этом параграфе мы докажем теорему 2.

Введём множество

$$\Theta = \{(\xi, \psi) \in (W \setminus 0) \times L^2(\Omega) : E_\lambda(\xi, \psi) < \hat\Phi_\lambda, \Phi'_\lambda(\xi) < 0\}. \tag{28}$$

Заметим, что основное состояние $u_\lambda$ лежит на границе множества $\overline{\Theta}$, так как $E_\lambda(u_\lambda, 0) = \hat\Phi_\lambda$, $\Phi'_\lambda(u_\lambda) = 0$.

Пусть существует слабое решение $v(t)$ задачи (B.2), определенное на некотором максимальном интервале $[0, T_m)$, $T_m \leqslant +\infty$. Заметим, ($2^0$) влечет, что отображение $v(t)$ слабо абсолютно непрерывно из $[0,T]$ в $L^2(\Omega)$ при любых $T \in (0, T_m)$. Действительно, так как $v_t(t)$ слабое непрерывное отображение из $[0,T]$ в $L^2(\Omega)$, то из (6) вытекает неравенство

$$|\langle v(t_2), \phi\rangle - \langle v(t_1), \phi\rangle| \le \int_{t_1}^{t_2} |\langle v_s(s), \phi\rangle|\, dx \le \max_{s\in[0;T]} |\langle v_s(s), \phi\rangle|(t_2 - t_1),\ \forall \phi \in L^2(\Omega),$$

которое означает, что $\langle v(t), \phi\rangle$ удовлетворяет условию липшица на $[0,T]$ и, следовательно, абсолютно непрерывно на $[0,T]$ при всех $\phi \in L^2(\Omega)$.

**Лемма 2.** *Пусть*

$$L(t) = \int_\Omega v^2(x,t)\, dx \tag{29}$$

*где $v(x,t)$ слабое решение (B.2). Тогда при всех $t \in (0,T)$, существует производная $\dot L(t)$. Кроме этого, почти всюду на $(0,T)$, при $T \in (0, T_m)$, существует $\ddot L(t)$ и выполняется равенство*

$$\ddot L(t) = 2\int_\Omega \left(|v_t(t)|^2 - |\nabla v(t)|^p + \lambda |v(t)|^p - |v(t)|^\alpha\right) dx \quad \text{п.в. на } (0,T). \tag{30}$$

*Доказательство.* Введём функцию $P(t,s) = \langle v(t), v(s)\rangle$. Так как $v(t)$ слабо абсолютно непрерывная функция из $[0,T]$ в $L^2(\Omega)$, то функция $P(t,s)$ дифференцируема почти всюду по $t \in (0,T)$ и $s \in (0,T)$ . Учитывая, что $v_t$ слабо непрерывна из $[0,T]$ в $L^2(\Omega)$, получаем из (6), что частные производные $\dfrac{\partial}{\partial t}P(t,s)$ и $\dfrac{\partial}{\partial s}P(t,s)$ непрерывны. Отсюда, по свойству дифференцируемости функции многих переменных вытекает, что функция $P(t,s)$ дифференцируема в точке $(t,t)$. Таким образом, существует $\dot{L}(t)$ и

$$\dot{L}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}P(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}P(t,s)\right)\Big|_{s=t} = 2\langle v_t(t), v(t)\rangle.$$

Отметим, что (7) при $\phi = v(t)$ дает

$$\langle v_t(t), v(t)\rangle\big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(|v_s(s)|^2 - |\nabla v(s)|^p + \lambda|v(s)|^p - |v(s)|^\alpha\right) dx\, dx.$$

Тогда

$$\dot{L}(t_2) - \dot{L}(t_1) = 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(|v_s(s)|^2 - |\nabla v(s)|^p + \lambda|v(s)|^p - |v(s)|^\alpha\right) dx\, dx. \tag{31}$$

Отсюда, по абсолютной непрерывности интеграла Лебега вытекает, что $\dot{L}(t)$ является абсолютно непрерывной функцией, что влечёт существование производной $\ddot{L}(t)$ почти всюду на $(0,T)$ и справедливость (30). □

**Лемма 3.** *Пусть $v(t)$ глобальное решение (B.2) такое, что $(v(0), v_t(0)) \in \Theta$. Тогда $(v(t), v_t(t)) \in \Theta$ для всех $t \in [0,+\infty)$.*

*Доказательство.* Пусть $v(t)$ глобальное решение (B.2) с начальными значениями $v(0) = v_0$, $v_t(0) = v_1$ такими, что $(v_0, v_1) \in \Theta$. Тогда, в силу (8),

$$\Phi_\lambda(v(t)) \le E(v(t), v_t(t)) \le E(v_0, v_1) < \hat{\Phi}_\lambda, \quad \forall t \in [0,+\infty). \tag{32}$$

Предположим от противного, что $(v(t), v_t(t))$ покидает область $\Theta$. В силу (32), это возможно только тогда, когда существует $t_0$, такое что $\Phi'_\lambda(v(t_0)) \ge 0$. Обозначим через $t_1$ наименьший момент времени, когда $\Phi'_\lambda(v(t_1)) \ge 0$. Тогда $\Phi'_\lambda(v(t)) < 0$ при $0 \le t < t_1$ и $\Phi'_\lambda(v(t_1)) \ge 0$. Из слабой полунепрерывности нормы $\|\cdot\|_1$ вытекает

$$0 \le \Phi'_\lambda(v(t_1)) \le \liminf_{t\uparrow t_1} \Phi'_\lambda(v(t)) \le 0.$$

Следовательно, неравенство $\Phi'_\lambda(v(t_1)) > 0$ невозможно. Предположим, что $\Phi'_\lambda(v(t_1)) = 0$. Тогда $v(t_1) \in N_\lambda$ и, следовательно, $\Phi_\lambda(v(t_1)) \ge \hat{\Phi}_\lambda$. Однако это противоречит (32). Лемма доказана. □

**Лемма 4.** *Если $(v_0, v_1) \in \Theta$ и $v(t)$ глобальное решение (B.2), тогда $\int_\Omega |v(t)|^2\, dx \to +\infty$ при $t \to +\infty$.*

*Доказательство.* Рассмотрим $L(t) = \int_\Omega |v(t)|^2\, dx$. Тогда по лемме 2, мы имеем $\dot{L}(t) = 2\langle v_t(t), v(t)\rangle$ и

$$\ddot{L}(t) = 2\left(\int_\Omega |v_t(t)|^2\, dx - \int_\Omega |\nabla v(t)|^p\, dx + \lambda\int_\Omega |v(t)|^p\, dx - \int_\Omega |v(t)|^\alpha\, dx\right) \tag{33}$$

п.в. на $(0,T)$. По лемме 3,

$$-\Phi'_\lambda(v(t)) = -\int_\Omega |\nabla v(t)|^p\, dx + \lambda\int_\Omega |v(t)|^p\, dx - \int_\Omega |v(t)|^\alpha\, dx \ge 0, \ \forall t > 0. \tag{34}$$

Откуда следует, что $\ddot{L}(t) \ge 0$ п.в. на $(0,T)$.

Покажем, что найдётся $t_0 > 0$ такое, что будет выполняться $\dot{L}(t_0) > 0$. Предположим противное, т.е. $\dot{L}(t) \le 0$ для всех $t > 0$. Тогда, поскольку $L(t) > 0$ и $L(t)$ выпукла, то $L(t)$ должно стремиться к конечному значению при $t \to +\infty$. Следовательно,

$L(t) \to A$, $\dot{L}(t) \to 0$, $\ddot{L}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, для некоторого $A \in [0, +\infty)$. Тогда из (33) и (34) мы получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \int_\Omega |v_t(t)|^2\,dx = 0. \tag{35}$$

Отсюда, учитывая, что из (8) вытекает

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |v_t(t)|^2\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v(t)|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |v(t)|^p\,dx + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega |v(t)|^\alpha\,dx \le E(v_0, v_1),$$

имеем следующую оценку

$$\liminf_{t\to+\infty} \Phi_\lambda(v(t)) \le E(v_0, v_1). \tag{36}$$

С другой стороны, поскольку $\ddot{L}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то (33) и (35) влечет

$$\Phi'_\lambda(v(t)) = \int_\Omega |\nabla v(t)|^p\,dx - \lambda\int_\Omega |v(t)|^p\,dx + \int_\Omega |v(t)|^\alpha\,dx \to 0.$$

при $t \to +\infty$. Отсюда, учитывая (34), по лемме 1 получаем

$$\liminf_{t\to+\infty} \Phi_\lambda(v(t)) \ge \hat{\Phi}_\lambda > E(v_0, v_1).$$

Получили противоположное к (36). Таким образом, действительно, найдётся $t_0 > 0$ такое, что $\dot{L}(t_0) > 0$.

Учитывая, что $\ddot{L}(t) \ge 0$, мы можем записать

$$\int_{t_0}^t \ddot{L}(s)\,dx = \dot{L}(t) - \dot{L}(t_0) \ge 0. \tag{37}$$

Тогда

$$\int_{t_0}^t (\dot{L}(s) - \dot{L}(t_0))\,dx = L(t) - L(t_0) - \dot{L}(t_0)(t - t_0) \ge 0.$$

Отсюда, поскольку $\dot{L}(t_0) > 0$, заключаем

$$L(t) = \int_\Omega |v(t)|^2\,dx \ge \dot{L}(t_0)(t - t_0) + L(t_0) \to +\infty. \tag{38}$$

□

*Завершение доказательства теоремы 2.* Пусть $u_\lambda$ основное состояние (B.1) и $\varepsilon > 0$. Будем рассматривать такие $r > 1$, которые удовлетворяют неравенству $|r - 1| < \dfrac{\varepsilon}{\|u_\lambda\|_1}$. Тогда $\|u_\lambda - ru_\lambda\|_1 < \varepsilon$. Мы получим доказательство теоремы, если покажем, что для любого глобального решения $v(t; v_0, v_1)$ задачи (B.2) с начальными условиями $v_0 = ru_\lambda$, $v_1 = 0$ (при условии существования такого решения) выполняется

$$\lim_{t\to+\infty} \int_\Omega |u_\lambda - v(t; v_0, v_1)|^2\,dx = +\infty. \tag{39}$$

Покажем это. При $r > 1$, справедливы неравенства

$$E_\lambda(ru_\lambda, 0) < \hat{\Phi}_\lambda,\ \Phi'_\lambda(ru_\lambda) < 0, \tag{40}$$

означающие, что $(ru_\lambda, 0) \in \Theta$. Тогда, по лемме 4 мы имеем

$$\int_\Omega |v(t; v_0, v_1)|^2\,dx \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

что влечет (39). □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Brezis *Solutions of variational inequalities with compact support* // Uspekhi Mat. Nauk. 1974. V. 129. P. 103–108.
2. J. I. Díaz *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries* // Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1985. V. 106.
3. J. I. Díaz *On the Haïm Brezis pioneering contributions on the location of free boundaries* // Proceedings of the Fifth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems; A special tribute to the work of Haïm Brezis, (M. Chipot *et al.* eds.), Birkhauser Verlag, Bassel. 2005. P. 217–234
4. J. I. Díaz, J. Hernández, Y. Ilyasov *Flat solutions of some non-Lipschitz autonomous semilinear equations may be stable for* $N \geq 3$ // Chinese Annals of Mathematics. Series B. 2017. V. 38. No. 1. P. 345–378.
5. J. I. Díaz, J. Hernández, Y. Ilyasov *On the existence of positive solutions and solutions with compact support for a spectral nonlinear elliptic problem with strong absorption* // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Mehods and Applications. 2015. V. 119 P. 484–500.
6. E. DiBenedetto $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations* // Nonlinear Anal. 1983. V.7 No 8. P. 827–850.
7. Y.S. Il'yasov *Nonlocal investigations of bifurcations of solutions of nonlinear elliptic equations* // Izv. Math. 2002. V. 66. No 6. P. 1103–1130.
8. Y. S. Ilyasov, Y. Egorov *Höpf maximum principle violation for elliptic equations with non-Lipschitz nonlinearity* // Nonlin. Anal. 2010. V. 72. P. 3346–3355.
9. Y. Il'yasov *A duality principle corresponding to the parabolic equations* // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. V. 237. No 5. P. 692–698.
10. Y. S. Il'yasov *On critical exponent for an elliptic equation with non-Lipschitz nonlinearity* // Dynamical Systems, Supplement. 2011. P. 698–706.
11. Y. S. Il'yasov *On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's Quotient* // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2016. V. 6. P. 1–31.
12. G. M. Lieberman *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations* // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. No. 11. P. 1203–1219.
13. L. E. Payne and D. H. Sattinger *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations* // Israel Journal of Mathematics. 1975. V. 22 No. 3. P. 273-303.
14. S.I. Pohozaev *On the method of fibering a solution in nonlinear boundary value problems* // Proc. Stekl. Ins. Math. 1990. V. 192. P. 146–163.
15. D. H. Sattinger *On global solution of nonlinear hyperbolic equations* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. V. 30. No. 2. P. 148-172.
16. J. Serrin and H. Zou *Symmetry of ground states of quasilinear elliptic equations* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1999. V. 148. No. 4. P. 265-290.
17. P. Tolksdorf *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations* // J. Differential Equations. 1984. V. 51. No. 1. P. 126–150.

Явдат Шавкатович Ильясов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `Ilyasov02@gmail.com`

Эмиль Эдуардович Холоднов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `emil.kholod@gmail.com`