ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 12-21.

УДК 512.925

ОПЕРАТОР ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.К. ГАЗИЗОВ, А.А. ГАЙНЕТДИНОВА

Аннотация. Предложен алгоритм интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) n-го порядка, допускающих n-мерную алгебру Ли операторов. Алгоритм базируется на представлении рассматриваемого уравнения через инварианты допускаемой алгебры Ли и применении оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) специального вида. Показано, что для скалярных уравнений он эквивалентен известным методам понижения порядка. Изучена применимость метода к системам m ОДУ k-го порядка, допускающим km-мерную алгебру Ли операторов. Получено условие на допускаемую алгебру Ли, при выполнении которого можно построить ОИД в специальном виде и понизить порядок рассматриваемой системы ОДУ. Такое условие является следствием существования нетривиальных решений системы линейных алгебраических уравнений, коэффициентами которой являются структурные константы алгебры Ли. Приведен алгоритм построения $(km-1)$-мерной алгебры Ли для редуцированной системы. Представленный подход применяется для интегрирования систем двух ОДУ второго порядка.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, алгебры Ли операторов, дифференциальные инварианты, оператор инвариантного дифференцирования.

Mathematics Subject Classification: 34A25, 22E05

1. Введение

Групповой анализ предоставляет широкий набор инструментов для исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений, понижения их порядка и интегрирования этих уравнений в квадратурах (см. [1]–[4] и др.).

Для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) наиболее распространенными являются методы последовательного понижения порядка, предусматривающие либо введение так называемых канонических переменных, либо использование дифференциальных инвариантов (см., например, [4, 5]). Согласно первому методу, на первом шаге уравнение приводится к некоторому каноническому виду, а затем известными методами приводится к уравнению меньшего порядка. Второй метод основан на применении дифференциальных инвариантов допускаемой группы и операции инвариантного дифференцирования (т. е. операции дифференцирования одного дифференциального инварианта по другому инварианту меньшего порядка).

R.K. Gazizov, A.A. Gainetdinova, Invariant differentiation operator and its application for integrating systems of ordinary differential equations.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному заданию № 1.3103.2017/4.6.

Поступила 2 октября 2017 г.

Классическая теория дифференциальных инвариантов была заложена С. Ли [1] и получила развитие в работах А. Трессе [6], Л.В. Овсянникова [2]. Важным понятием этой теории является понятие оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) — линейного дифференциального оператора, действие которого на произвольный дифференциальный инвариант снова дает дифференциальный инвариант (как правило, более высокого порядка). Различные подходы к построению ОИД рассматриваются в [2, 7, 8]. В ряде работ ОИД используются для построения базиса дифференциальных инвариантов допускаемой алгебры в задачах классификации дифференциальных уравнений (см., например, [9]–[11]).

В работе [12] был предложен метод интегрирования систем двух ОДУ второго порядка с четырьмя симметриями, являющийся вариантом метода последовательного понижения порядка. Метод использует результат классификации систем двух ОДУ второго порядка с четырьмя симметриями и базируется на использовании ОИД для построения первых интегралов этих систем. При этом результат классификации систем ОДУ второго порядка использовался для доказательства того, что системы рассматриваемого вида имеют ОИД в виде, позволяющем использовать его для получения первого интеграла системы.

В данной работе предложенный в [12] метод обобщается на дифференциальные уравнения произвольного вида. В частности, показано, что для скалярных уравнений он эквивалентен известным методам понижения порядка. Изучена применимость метода к системам m ОДУ k-го порядка, допускающим km-мерную алгебру Ли операторов. Получено условие на допускаемую алгебру Ли, при выполнении которого можно построить ОИД в виде, позволяющем использовать его для понижения порядка рассматриваемой системы ОДУ. Также показано, что построенная таким образом редуцированная система допускает $(km-1)$-мерную алгебру Ли, и для нее возможно дальнейшее использование предложенного метода.

2. Построение оператора инвариантного дифференцирования

Рассмотрим систему

$$u^{(k)} = f\left(t, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k-1)}\right), \tag{1}$$

m обыкновенных дифференциальных уравнений k-го порядка, которая допускает $n = km$-мерную алгебру Ли L_n, порождаемую базисными операторами

$$X_i = \tau_i \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{m} \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Здесь t — независимая переменная, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор зависимых переменных, $u^{(k)}$ — вектор производных k-го порядка, τ_i, ξ_i^α — известные функции от t, u, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — вектор-функция указанных аргументов.

Дифференциальные инварианты алгебры L_n находятся как решения системы

$$X_i^{(k)} I = 0, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $X_i^{(k)}$ получается из оператора X_i продолжением на все производные до k-го порядка, а функции $I = I(t, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)})$ — искомые функции. Введем в рассмотрение матрицу

$$\Omega^{(k)} = \left\| \begin{array}{cccccccc} \tau_1 & \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^m & \zeta_1^{1(1)} & \ldots & \zeta_1^{m(k)} \\ \vdots & & & & & & \\ \tau_n & \xi_n^1 & \ldots & \xi_n^m & \zeta_n^{1(1)} & \ldots & \zeta_n^{m(k)} \end{array} \right\|,$$

составленную из координат продолженных операторов $X_i^{(k)}$, и пусть

$$\operatorname{rang} \Omega^{(k)} = n.$$

Тогда система (2) имеет $m+1$ функционально независимое решение. Если система (1) задает неособое многообразие относительно группы преобразований, порождаемой операторами алгебры L_n, то она может быть представлена в инвариантном виде (см., например, [2, 3]). В этом случае решение (1) определяет m независимых инвариантов $I_\alpha^{(k)}$ порядка k ($\alpha = 1, \ldots, m$) и один инвариант I меньшего порядка. Порядок инварианта I определяется следующим образом: если для l-го продолжения ($l = 0, \ldots, k-1$) ранг матрицы $\Omega^{(l)}$ меньше $(l+1)m+1$, то порядок I равен l. (В общем случае, $\operatorname{rang}\Omega^{(l)}$ равен $m(l+1)+1$ и из условия $\operatorname{rang}\Omega^{(k)} = n$ следует, что только для единственного l может выполняться приведенное неравенство.)

Пусть уравнение (1) имеет следующее инвариантное представление:

$$I_\alpha^{(k)} = F_\alpha(I), \ \ \alpha = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где F_α — некоторые функции. Построим ОИД λD_t, где $\lambda = \lambda(t, u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_1^{(k)}, \ldots, u_m^{(k)})$. Согласно [2], функцию λ можно найти из системы уравнений

$$X_i^{(k)}(\lambda) - \lambda D_t\left(\tau_i\right) = 0. \tag{4}$$

Применим построенный ОИД к инварианту младшего порядка:

$$\lambda D_t(I) = \Theta(I, I_1^{(k)}, \ldots, I_m^{(k)}),$$

где $\Theta = \Theta(I, I_1^{(k)}, \ldots, I_m^{(k)})$ — некоторая фунция. Рассматривая получившееся выражение на решении системы (3), получим

$$\lambda D_t(I)|_{(3)} = \hat{\Theta}(I), \tag{5}$$

где $\hat{\Theta}(I) = \Theta\left(I, F_1(I), \ldots, F_m(I)\right)$. Уравнение (5) также можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}I}{\hat{\Theta}(I)} = \frac{\mathrm{d}t}{\lambda}. \tag{6}$$

Заметим, что левая часть уравнения (6) интегрируема в квадратурах, а правая часть интегрируема, только если функция λ представима в специальном виде

$$\lambda = \frac{1}{D_t\left(\Phi\right)} \tag{7}$$

с некоторой функцией $\Phi = \Phi(t, u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_m^{(k-1)})$.

Покажем, что функцию λ для ОИД можно построить в виде (7). Подставляя выражение (7) в (4), получаем

$$-\frac{1}{\left(D_t\Phi\right)^2}\left(X_i^{(k)}\left(D_t\Phi\right) + D_t\Phi D_t\left(\xi_i\right)\right) = 0,$$

откуда (см., например, [2])

$$D_t\left(X_i^{(k-1)}\Phi\right) = 0.$$

Таким образом, функция Φ должна удовлетворять системе

$$X_i^{(k-1)}\Phi = C_i, \ \ i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

с некоторыми постоянными C_i. Система (8) является системой линейных неоднородных уравнений в частных производных первого порядка. Для того чтобы она имела решение, необходимо, чтобы она была совместна и полна.

Исследуем совместность системы (8), построенной для операторов, допускаемых системой ОДУ (1). Рассмотрим матрицу $\Omega^{(k-1)}$, составленную из координат операторов $X_i^{(k-1)}$. Это матрица размеров $n \times (n+1)$ и ее ранг равен n (в противном случае, если

$\operatorname{rang}\Omega^{(k-1)} < n$, система (1) не имеет инвариантного представления, так как допускаемая группа преобразований имеет больше, чем один, инвариантов младшего порядка и, соответственно, меньше, чем m, инвариантов k-го порядка). Следовательно, система (8) совместна при любых C_i.

Для исследования полноты системы (8) введем в рассмотрение операторы

$$Y_i = X_i^{(k-1)} + C_i \frac{\partial}{\partial \Phi}.$$

Согласно общему методу исследования (см., например, [13]) систем линейных неоднородных уравнений, полнота системы (8) равносильна замкнутости системы операторов $\{Y_i\}$ относительно операции коммутирования. Имеем

$$[Y_i, Y_j] = \left[X_i^{(k-1)} + C_i \frac{\partial}{\partial \Phi}, X_j^{(k-1)} + C_j \frac{\partial}{\partial \Phi}\right] = [X_i^{(k-1)}, X_j^{(k-1)}] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} c_{ij}^s X_s^{(k-1)} = \sum_{s=1}^{n} c_{ij}^s \left(Y_s - C_s \frac{\partial}{\partial \Phi}\right).$$

Отсюда следует, что система операторов $\{Y_i\}$ замкнута, если постоянные C_s удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} c_{ij}^s C_s = 0. \tag{9}$$

Система (9) имеет только тривиальное решение $C_s \equiv 0, s = 1, \ldots, n$, если $n \geq 3$ и ранг системы (9) равен n. В этом случае, полученная из системы (8) функция Φ является инвариантом допускаемой алгебры Ли, т.е. $\Phi = \Phi(I)$, и поэтому получаемый оператор не является ОИД, так как действие им на инвариант I не приводит к новым инвариантам (не повышается порядок дифференциального инварианта).

Если $n < 3$ или $n \geq 3$, а ранг системы (9) меньше, чем n, то уравнение (9) имеет ненулевое решение $(C_1^0, \ldots, C_n^0)^T$, где хотя бы одна константа $C_i^0 \neq 0$. В качестве функции Φ для ОИД можно выбрать любое частное решение системы (9) с константами $C_i = C_i^0$. Такая функция Φ инвариантна относительно линейных комбинаций вида $C_j^0 X_i - C_i^0 X_j$:

$$\left(C_j^0 X_i - C_i^0 X_j\right)(\Phi) = C_j^0 X_i (\Phi) - C_i^0 X_j (\Phi) = C_j^0 C_i^0 - C_i^0 C_j^0 = 0.$$

Покажем, что среди этих линейных комбинаций можно выделить $n-1$ линейно независимую, которые образуют алгебру Ли.

Пусть $C_1^0 \neq 0$ и рассмотрим операторы $\hat{X}_i = C_i^0 X_1 - C_1^0 X_i$, $i = 2, \ldots, n$.

1. Эти операторы по построению являются линейно независимыми, т.к. операторы $X_1, \ldots, X_n$ образуют базис алгебры Ли L_n.

2. Любые другие комбинации можно выразить через выбранные:

$$C_j^0 X_i - C_i^0 X_j = \frac{C_j^0}{C_1^0}\left(C_k^0 X_1 - \hat{X}_k\right) - \frac{C_k^0}{C_1^0}\left(C_j^0 X_1 - \hat{X}_j\right) = \frac{C_k^0}{C_1^0}\hat{X}_j - \frac{C_j^0}{C_1^0}\hat{X}_k.$$

3. Покажем, что множество операторов $\{\hat{X}_i\}$ замкнуто относительно операции коммутирования. Имеем:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = [C_i^0 X_1 - C_1^0 X_i, C_j^0 X_1 - C_1^0 X_j] = C_1^0\left(C_j^0[X_1, X_i] - C_i^0[X_1, X_j] + C_1^0[X_i, X_j]\right) =$$

$$= C_1^0 \sum_{r=1}^{n} \left(C_j^0 c_{1i}^r - C_i^0 c_{1j}^r + C_1^0 c_{ij}^r\right) X_r =$$

$$= C_1^0\left(C_j^0 c_{1i}^1 - C_i^0 c_{1j}^1 + C_1^0 c_{ij}^1\right) X_1 + \sum_{r=2}^{n}\left(C_j^0 c_{1i}^r - C_i^0 c_{1j}^r + C_1^0 c_{ij}^r\right)\left(C_r^0 X_1 - \hat{X}_r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(C_j^0 c_{1i}^r - C_i^0 c_{1j}^r + C_1^0 c_{ij}^r\right) C_r^0 X_1 - \sum_{r=2}^{n} \left(C_j^0 c_{1i}^r - C_i^0 c_{1j}^r + C_1^0 c_{ij}^r\right) \hat{X}_r =$$

$$= - \sum_{r=2}^{n} \left(C_j^0 c_{1i}^r - C_i^0 c_{1j} r + C_1^0 c_{ij}^r\right) \hat{X}_r,$$

где первая сумма в предпоследней строке равна нулю в силу (9). Тогда

$$[\hat{X}_i,\, \hat{X}_j] = \sum_{s=1}^{n} \hat{c}_{ij}^s \hat{X}_s, \text{ где } \hat{c}_{ij}^s = C_j^0 c_{1i}^s - C_i^0 c_{1j}^s + C_1^0 c_{ij}^s.$$

Таким образом, операторы $\hat{X}_i$ порождают $(n-1)$-мерную алгебру Ли L_{n-1}. Кроме инвариантов алгебры L_n, редуцированная алгебра L_{n-1} имеет еще один дополнительный инвариант — функцию Φ.

Вернемся к интегрированию уравнения (6). Оно может быть переписано в интегрируемом виде

$$\frac{D_t(I)}{\hat{\Theta}(I)} = D_t(\Phi)$$

и его решение вида

$$H(\Phi, I) = 0$$

с некоторой функцией H является первым интегралом системы уравнений (3). Добавляя это уравнение к системе (3) и удаляя дифференциальные следствия, приходим к системе порядка $km-1$, допускающей построенную ранее алгебру L_{n-1}.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть система из m ОДУ k-го порядка (1) допускает n-мерную ($n = km$) алгебру Ли L_n операторов X_i, $i = 1, \ldots, n$, и представима через дифференциальные инварианты $I^{(l)}, I_1^{(k)}, \ldots, I_m^{(k)}$ этой алгебры в виде (3) (l и k — порядки дифференциальных инвариантов). Пусть система линейных алгебраических уравнений (9):*

$$\sum_{s=1}^{n} c_{ij}^s C_s = 0,$$

где c_{ij}^s — структурные константы алгебры L_n, имеет нетривиальное решение. Тогда можно построить ОИД вида

$$\frac{1}{D_t\,(\Phi)} D_t,$$

такой, что справедливо соотношение

$$\frac{1}{D_t\,(\Phi)} D_t(I^{(l)})|_{(3)} = \hat{\Theta}(I^{(l)}),$$

которое интегрируемо и порождает первый интеграл системы (1). Система порядка $n-1$, получаемая из системы (3) добавлением первого интеграла, допускает $(n-1)$-мерную алгебру Ли L_{n-1} с базисными операторами, которые строятся как линейные комбинации операторов X_i с коэффициентами, определяемыми решением системы (9).

Замечание. Данную теорему можно обобщить на произвольную систему ОДУ n-го порядка, допускающую n операторов. В качестве иллюстрации см. пример 3.

3. Интегрирование скалярных ОДУ

3.1. Уравнение первого порядка. Рассмотрим процедуру применения ОИД для интегрирования уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{10}$$

допускающего один оператор

$$X = \tau(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Такой оператор имеет по одному независимому инварианту нулевого $I^{(0)}(t, x)$, и первого $I^{(1)}(t, x, \dot{x})$ порядков, а уравнение (10) имеет инвариантное представление

$$I^{(1)} = F(I^{(0)}). \tag{11}$$

Вычислим ОИД. Пусть $\lambda = (D_t\Phi)^{-1}$, где $\Phi = \Phi(t, x)$ находится из уравнения

$$X(\Phi) \equiv \tau\Phi_t + \xi\Phi_x = 1. \tag{12}$$

Применение ОИД к инварианту $I^{(0)}$ с учетом (11) приводит к соотношению

$$\left.\frac{D_t(I^{(0)})}{D_t(\Phi)}\right|_{(11)} = \alpha(I^{(0)}) \tag{13}$$

с некоторой функцией α, интегрирование которого дает решение уравнения (11).

Рассмотрим уравнение (10) в эквивалентном виде

$$M(t, x)\mathrm{d}t + N(t, x)\mathrm{d}x = 0. \tag{14}$$

Из системы характеристических уравнений

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{1},$$

для (12) в силу (14) имеем

$$\frac{M(x, y)}{\tau M + \xi N}\mathrm{d}t + \frac{N(x, y)}{\tau M + \xi N}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Phi,$$

что эквивалентно умножению уравнения (14) на интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{\tau M + \xi N}$ (см., например, [4]).

Таким образом, функция Φ является полным дифференциалом, получаемым для уравнения (14).

С другой стороны, построенные Φ и $I^{(0)}$ можно рассматривать как новые переменные. Тогда уравнение (13) допускает оператор переноса $\frac{\partial}{\partial \Phi}$. Следовательно, нахождение Φ также эквивалентно построению новой зависимой переменной при приведении допускаемого оператора к оператору переноса.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} + x^2 = \frac{2}{t^2}, \tag{15}$$

допускающее оператор $X = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x}$. Уравнение (15) запишем также в эквивалентном виде:

$$\mathrm{d}x + \left(x^2 - \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{16}$$

Инварианты оператора X имеют вид $I^{(0)} = tx$, $I^{(1)} = t^2\dot{x}$. Функция Φ для ОИД $(D_t\Phi)^{-1}$ находится из уравнения $X\Phi = 1$ и, значит, $\Phi = \ln t + \phi(tx)$, где $\phi(tx)$ — произвольная функция от инварианта оператора X. Выберем $\Phi = \ln t$. Тогда ОИД имеет вид tD_t.

Подействуем полученным ОИД на инвариант $I^{(0)}$:

$$tD_t(I^{(0)})|_{(15)} = I^{(0)} + 2 - (I^{(0)})^2.$$

Отсюда получим

$$\frac{\mathrm{d}I^{(0)}}{2 + I^{(0)} - (I^{(0)})^2} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{17}$$

или, в исходных переменных,

$$\frac{\mathrm{d}\,(tx)}{2 + tx - (tx)^2} = \mathrm{d}\,(\ln t)\,. \tag{18}$$

Легко видеть, что построение этого уравнения эквивалентно умножению уравнения (16) на интегрирующий множитель $\mu = \frac{t}{t^2x^2 - tx - 2}$.

3.2. Уравнение второго порядка. Применим рассмотренный алгоритм для интегрирования дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \tag{19}$$

допускающего алгебру Ли L_2 с базисными операторами

$$X_i = \tau_i(t,x)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x}, \;\; i = 1, 2.$$

Рассмотрим, например, случай, когда коммутатор допускаемых операторов $[X_1, X_2] = X_1$ и операторы X_1 и X_2 не являются линейно связными, то есть $X_1 \vee X_2 \equiv \tau_1\xi_2 - \tau_2\xi_1 \neq 0$ (см., например, [4]). Тогда алгебра L_2 имеет два дифференциальных инварианта $I^{(1)}(t, x, \dot{x})$ и $I^{(2)}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ и уравнение (19) можно переписать в виде

$$I^{(2)} = F(I^{(1)}) \tag{20}$$

с некоторой функцией F.

Построим ОИД в виде $(D_t\Phi)^{-1}\,D_t$. Из условия полноты соответствующей системы вида (8) следует, что функцию $\Phi(t,x)$ можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned} X_1\,(\Phi) &\equiv \tau_1\Phi_t + \xi_1\Phi_x = 0, \\ X_2\,(\Phi) &\equiv \tau_2\Phi_t + \xi_2\Phi_x = 1. \end{aligned}$$

Если I_0 — алгебраический инвариант оператора X_1, то общее решение первого уравнения системы записывается в виде $\Phi = \phi(I_0)$, а второе уравнение в силу условия $[X_1, X_2] = X_1$ определяет данную функцию ϕ. Таким образом, функция Φ является алгебраическим инвариантом оператора X_1. Тогда уравнение на первый интеграл записывается в виде

$$\left.\frac{D_t(I^{(1)})}{D_t(\Phi)}\right|_{(20)} = \hat{\Theta}(I^{(1)}) \tag{21}$$

с некоторой функцией $\hat{\Theta}$. Интегрирование этого уравнения дает первый интеграл исходного уравнения $\hat{H}(I^{(1)}, \Phi) = 0$. Получившееся уравнение допускает оператор X_1, следовательно, его можно проинтегрировать в квадратурах.

С другой стороны, по классическому методу понижения порядка для первого шага выбирается оператор X_1, образующий идеал допускаемой алгебры L_2. Тогда выбирая в качестве алгебраического инварианта для X_1 функцию $\phi(I_0)$, а в качестве инварианта первого порядка — инвариант $I^{(1)}$ алгебры L_2, получим аналогичное редуцированное уравнение первого порядка (21). Следовательно, показано, что при подходящем выборе дифференциальных инвариантов, классический метод последовательного понижения порядка и метод понижения порядка с использованием ОИД приводят к одному и тому же редуцированному уравнению.

Особенность метода понижения порядка с применением ОИД заключается в том, что редуцированное уравнение записывается в исходных переменных и его симметрия получается как линейная комбинация исходных операторов.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}}{x^2} - \frac{1}{tx}, \tag{22}$$

допускающее операторы

$$X_1 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x},$$

удовлетворяющие коммутационному соотношению $[X_1, X_2] = -X_1$.

Инварианты допускаемой алгебры имеют вид $I^{(1)} = x\dot{x} - \frac{x^2}{t}$, $I^{(2)} = x^3\ddot{x}$. Коэффициент ОИД находится из системы уравнений

$$X_1\left(\Phi\right) = 0, \;\; X_2^{(1)}\left(\Phi\right) = 1,$$

где $\Phi = \Phi(t, x)$. Получаем $\Phi = 2\ln\frac{t}{x}$, $\lambda D_t = \frac{tx}{2(x - t\dot{x})}D_t$ и применение ОИД к инварианту I_1 с учетом (22) дает выражение

$$\frac{\mathrm{d}I^{(1)}}{I^{(1)} + 1} = -\frac{1}{2}\mathrm{d}\Phi. \tag{23}$$

Интегрирование этого соотношения приводит к редуцированному уравнению

$$\frac{x(t\dot{x} - x)}{t} = C_1\frac{x}{t} - 1,$$

допускающему оператор X_1. Легко показать, что аналогичное редуцированное уравнение получается при использовании классического метода, если в качестве инвариантов оператора X_1 выбрать $I_0 = -2\ln\frac{x}{t}$ и $I_1 = x\dot{x} - \frac{x^2}{t}$.

4. Система двух ОДУ второго порядка

Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ \ddot{y} = g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \end{cases} \tag{24}$$

допускающие четырехмерные алгебры Ли операторов с базисом

$$X_i = \tau_i(t, x, y)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i(t, x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(t, x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \;\; i = 1, \ldots, 4.$$

Пусть система (24) имеет следующее инвариантное представление

$$I_1^{(2)} = F(I), \;\; I_2^{(2)} = G(I), \tag{25}$$

с некоторыми функциями F и G, где I — дифференциальный инвариант первого порядка или алгебраический инвариант, а $I_k^{(2)}$, $k = 1, 2,$ — дифференциальные инварианты второго порядка.

В работе [12] показано, что если система (24) имеет инвариантное представление (25), то система (9) всегда имеет нетривиальное решение. По-видимому, это связано с тем, что все четырехмерные алгебры Ли разложимы в прямую сумму подалгебр меньших размерностей, одна из которых является разрешимой. Поэтому для всех систем двух ОДУ второго порядка с четырьмя симметриями, допускающих инвариантное представление (25), возможна редукция к системе третьего порядка. Далее, если система вида (9) для редуцированной алгебры L_3 имеет нетривиальное решение, то порядок редуцированной системы также может быть понижен. Можно показать, что для всех разрешимых алгебр L_3 система вида (9) имеет нетривиальное решение, а для неразрешимых алгебр — нет. В последнем случае порядок редуцированной системы более не понижается.

Пример 3. Пусть система вида (24) допускает операторы
$$t\frac{\partial}{\partial t},\ x\frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y}.$$
Тогда инвариантное представление системы имеет вид (25), где
$$I=\frac{t\dot x}{x},\ \ I_1^{(2)}=\frac{t^2\ddot x}{x},\ \ I_2^{(2)}=\frac{t\ddot y}{\dot y}.$$
Функция $\Phi(t,x,y,\dot x,\dot y)$ в ОИД вида $(D_t\Phi)^{-1}D_t$ находится из следующей системы уравнений
$$\begin{aligned}&t\Phi_t-\dot x\Phi_{\dot x}-\dot y\Phi_{\dot y}=C_1,\\&x\Phi_x+\dot x\Phi_{\dot x}=C_2,\\&y\Phi_y+\dot y\Phi_{\dot y}=C_3,\\&\Phi_y=C_4.\end{aligned}$$
Из полноты этой системы следует, что $C_4=0$, а остальные постоянные могут быть произвольными. Пусть $C_1=-1$, $C_2=1$, $C_3=1$. Тогда $\Phi=\ln x\dot y$, а редуцированная система имеет вид
$$\ln x\dot y=H(I,K_1),\ \ I_1^{(2)}=F(I)$$
с некоторыми функциями H и F, K_1 — константа интегрирования, и допускает операторы
$$t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y}.$$
Для нового ОИД функция Φ находится из системы
$$\begin{aligned}&t\Phi_t+x\Phi_x-\dot y\Phi_{\dot y}=C_1,\\&x\Phi_x-y\Phi_y+\dot x\Phi_{\dot x}-\dot y\Phi_{\dot y}=C_2,\\&\Phi_y=C_3,\end{aligned}$$
причем условие полноты дает $C_3=0$, а C_1 и C_2 — произвольные. Пусть, например, $C_1=C_2=1$. Тогда $\Phi=\ln x$, новая редуцированная система имеет вид
$$\frac{t\dot x}{x}=H_1(\ln x,K_1,K_2),\ \ x\dot y=H_2(\ln x,K_1,K_2),\tag{26}$$
где H_1, H_2 — некоторые функции, K_i, $i=1,2$ — постоянные интегрирования, и допускает операторы
$$t\frac{\partial}{\partial t}+y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y}.$$
Для этих операторов функция Φ в ОИД находится из системы
$$t\Phi_t+y\Phi_y=C_1,\quad \Phi_y=C_2,$$
где из условия полноты следует, что $C_2=0$. Пусть $C_1=1$, тогда $\Phi=\ln t$, и система (26) сводится к виду
$$x=Q_1(\ln t,K_1,K_2,K_3),\ \ \dot y=Q_2(\ln t,K_1,K_2,K_3),\tag{27}$$
где Q_1, Q_2 — некоторые функции, а K_i, $i=1,2,3$ — константы интегрирования. Эта система допускает оператор
$$\frac{\partial}{\partial y}.$$
Функция Φ нового ОИД находится из уравнения
$$\Phi_y=C_1.$$
Пусть $C_1=1$, тогда $\Phi=y$, и получаем решение исходной системы:
$$x=Q_1(\ln t,K_1,K_2,K_3),\ \ y=\hat Q_2(\ln t,K_1,K_2,K_3,K_4),$$
где Q_1, $\hat Q_2$ — некоторые функции, а K_i, $i=1,2,3,4$ — константы интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли С., Шефферс Г. *Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями.* М.: Ижевск, 2011. 704 с.
2. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.:Наука. 1978. 399 с.
3. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М.: Мир. 1989. 639 с.
4. N.H. Ibragimov *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations.* Chichester: Wiley. 1999. p. 366.
5. G.W. Bluman, S.C. Anco *Symmetry and integration methods for differential equations.* Springer-Verlag New-York, Inc., 2002. p. 419.
6. Ar. Tresse *Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations.* (French) // Acta Math, 1894. V. 18, No. 1. Pp. 1-–3.
7. Широков И.В. *Дифференциальные инварианты группы преобразований однородного пространства* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 6, С. 1405–1421.
8. Гончаровский М.М., Широков И.В. *Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования проецируемого действия групп Ли* // ТМФ. 2015. Т. 183, № 2. С. 202–221.
9. Попович Р.Е., Бойко В.Н. *Дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований и интегрируемые уравнения Риккати* // Вестник СамГУ. 2001. № 4 (18), С. 49–56.
10. Гапонова О.В., Нестеренко М.О. *Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі* // Збірник праць Інституту математики НАН Украіни, Київ. 2006. V. 3, № 2, С. 71–91.
11. M. Ayub, F.M. Mahomed, M. Khan, M.N. Qureshi *Symmetries of second-order systems of ODEs and integrability* // Nonlinear Dyn. 2013. No. 74, pp. 969–989.
12. A.A. Gainetdinova, R.K. Gazizov *Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras* //Proc. R. Soc. A. The Royal Society, 2017. T. 473. № 2197. 20160461.
13. Гюнтер Н.М. *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.* ОНТИ, Ленинград–Москва. 1934. 359 с.

Рафаил Кавыевич Газизов,
Научно-исследовательская лаборатория
«Групповой анализ математических моделей естествознания,
техники и технологий»
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gazizovrk@gmail.com

Алия Айдаровна Гайнетдинова,
Научно-исследовательская лаборатория
«Групповой анализ математических моделей естествознания,
техники и технологий»
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gainetdinova.alia@gmail.com