ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 3-11.

УДК 517.91

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.К. АРАБОВ, Э.М. МУХАМАДИЕВ, И.Д. НУРОВ, Х.И. СОБИРОВ

Аннотация. Работа посвящена выявлению предельных циклов в окрестности состояний равновесий нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены новые условия для коэффициентов уравнений, которые обеспечивают существование предельного цикла. Использованы методы качественного анализа и компьютерного моделирования. Исследовано поведение особой точки в зависимости от вариации параметров. Применена теория устойчивости по Ляпунову. На основе полученных результатов проведено секторное разделение плоскости. Данное разделение позволяет прогнозировать поведение решений на том или ином участке плоскости. Разработан пакет программ для построения фазовых портретов в соответствующих областях.

Ключевые слова: динамические системы, негладкость, фазовая плоскость, предельный цикл, секторное разделение.

Mathematics Subject Classification: 34E

Предельные циклы имеют широкое применение во многих областях естествознания: радиофизике, автоматическом регулировании, химии, медицине, математической биологии и экономике и т.д. Поэтому исследование вопросов о существовании предельных циклов является важным разделом теории нелинейных колебаний. Известны различные достаточные условия существования предельных циклов. Классическими примерами уравнений, имеющих предельные циклы, являются уравнения Ван дер Поля и Рэлея [1–6]. Сравнительно недавно было обнаружено, что у кусочно-линейных уравнений вида

$$x'' + ax' + bx + c|x' - \lambda| = 0, \tag{1}$$

при определенных значениях коэффициентов a, b, c и параметра λ, возникают предельные циклы. А именно, в работе [7] с помощью компьютерного моделирования было установлено, что уравнение (1) при $a = 1$, $b = 1$, $c = 3/2$ и $\lambda > 0$ имеет предельный цикл. Более общее условие существования предельного цикла уравнения (1) получено в работе [8].

Как отмечают многие авторы (см., напр., [3]), вопрос об установлении существования предельных циклов является одним из наиболее трудных вопросов, и для его решения отсутствуют общие методы. Поэтому любой метод, который позволяет, хотя бы для частного класса уравнений, устанавливать существование циклов, представляет интерес.

В настоящей работе изучается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + ax' + bx + c|x' - \varphi(x, x')| = 0, \tag{2}$$

где a, b, c – вещественные числа, а функция $\varphi(x, y)$ – непрерывна и удовлетворяет некоторому условию роста при $|x| + |y| \to \infty$. Найдены условия на коэффициенты a, b, c и функцию $\varphi(x, y)$, которые обеспечивают существование предельного цикла у уравнения (2).

M.K. Arabov, E. Mukhamadiev, I.D. Nurov, Kh.I. Sobirov, Existence tests for limiting cycles of second order differential equations.

Поступила 19 апреля 2016 г.

Анализ фазового портрета однородного уравнения

Сначала приведем анализ фазового портрета траекторий однородного уравнения
$$x'' + ax' + bx + c|x'| = 0, \tag{3}$$
в зависимости от расположения коэффициентов (a, b, c) как точки трехмерного пространства R^3 (см. [8]). Если $c = 0$, то (3) есть линейное уравнение второго порядка, фазовый портрет которого хорошо известен (см., напр., [1,2, 4]). Ниже мы будем предполагать, что $c > 0$. Заметим, что если $c < 0$, то заменой x на $-x$ уравнение (3) сводится к такому же уравнению с коэффициентами $(a, b, -c)$.

Уравнение (3) "склеивается" из линейных уравнений
$$x'' + (a + c)x' + bx = 0, \quad \texttt{если} \quad x' > 0 \tag{4}$$
и
$$x'' + (a - c)x' + bx = 0, \quad \texttt{если} \quad x' \leqslant 0. \tag{5}$$
Обозначим через $\mu_1^{\pm}$ и $\mu_2^{\pm}$ корни характеристического уравнения
$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0, \tag{6}$$
соответствующего уравнениям (4) и (5):
$$\mu_1^{\pm} = -\frac{1}{2}\left\{(a \pm c) - \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b}\right\}, \qquad \mu_2^{\pm} = -\frac{1}{2}\left\{(a \pm c) + \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b}\right\}.$$

Из этих формул для корней характеристических уравнений (6) следует, что в полупространстве $\{(a, b, c) : c > 0\}$ коэффициентов уравнения (3) корни $\mu_1^{\pm}$ обращаются в нуль при $b = 0$ и меняют знак при возрастании b; корни $\mu_1^{\pm}, \mu_2^{\pm}$, соответственно, вещественны при $4b < (a \pm c)^2$, становятся кратными при $4b = (a \pm c)^2$ и комплексно сопряженными при $4b > (a \pm c)^2$.

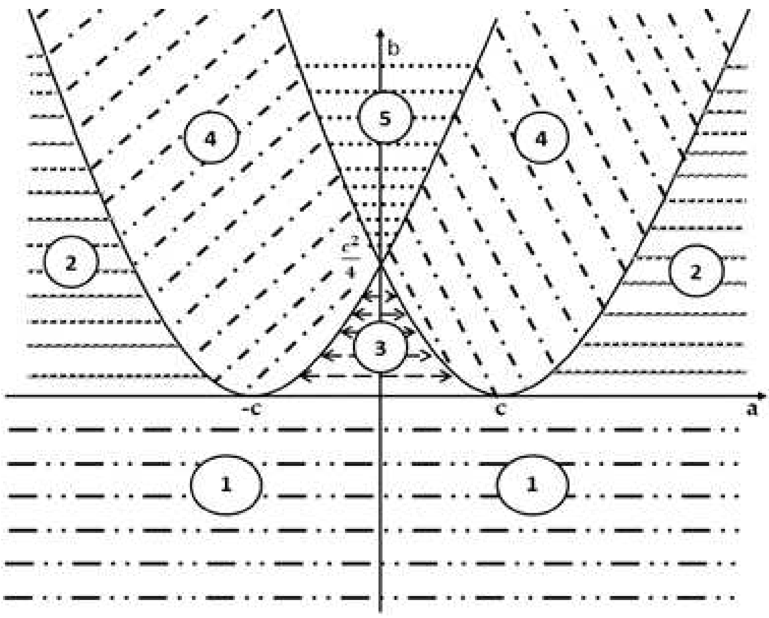


Рис. 1. Секторы

Исходя из этих свойств корней характеристических уравнений полупространство $\{(a, b, c) : c > 0\}$ разложим на следующие подмножества:

1. $\{(a, b, c) :\ b < 0\}$;
2. $\{(a, b, c) :\ 0 < 4b \leqslant (|a| - c)^2,\ |a| > c\}$;

3. $\{(a,b,c) : 0 < 4b \leqslant (|a|-c)^2, \; |a| < c\}$;
4. $\{(a,b,c) : (|a|-c)^2 < 4b \leqslant (|a|+c)^2\}$;
5. $\{(a,b,c) : (|a|+c)^2 < 4b\}$.

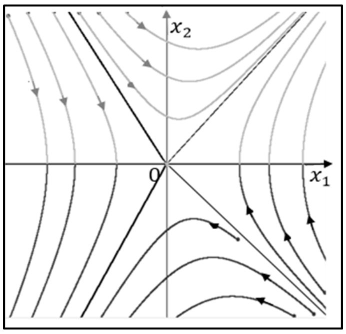
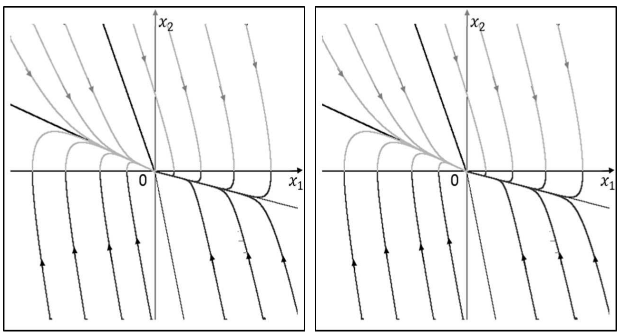
Проекция пересечений этих подмножеств с плоскостью $c = cont > 0$ на координатную плоскость (a,b) приведена на рис. 1.

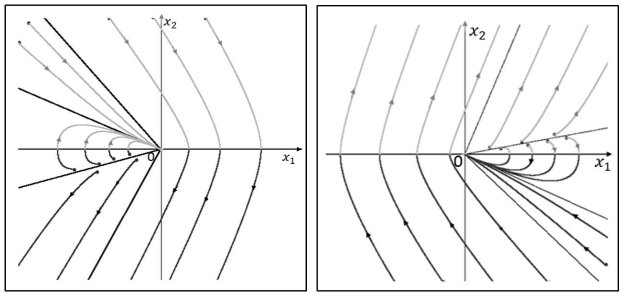
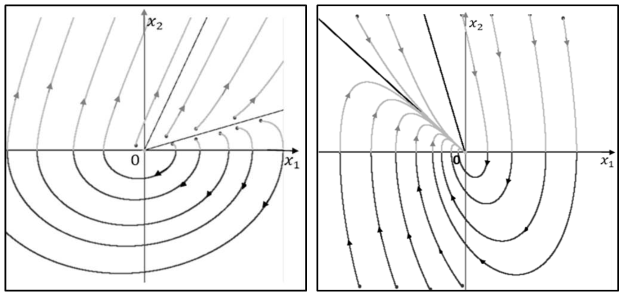
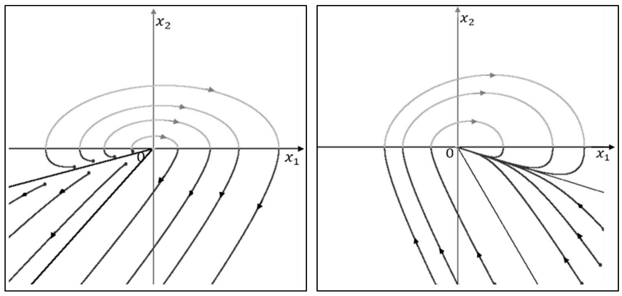
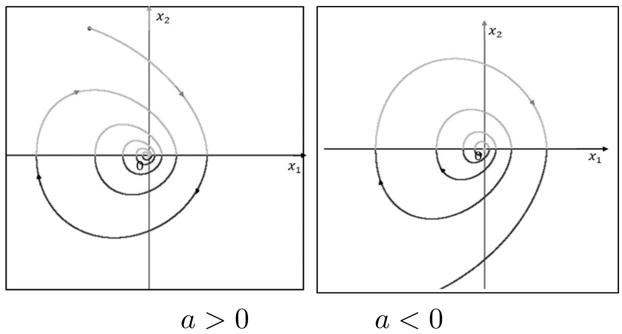
Отметим, что для коэффициентов (a,b,c), принадлежащих множествам 1–4, ненулевое решение $x(t)$ уравнения (3) с начальным значением $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = 0$ является решением линейного уравнения (4) при $(t-t_0)x_0 < 0$ и уравнения (5) при $(t-t_0)x_0 > 0$.

Уравнение (3) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ay - bx - c|y|. \end{cases} \tag{7}$$

Если $b \neq 0$, то система (7) имеет единственную особую точку $(0,0)$. Как и в случае линейного уравнения расположение корней характеристических уравнений (6) на комплексной плоскости однозначно определяет поведение траектории кусочно-линейной системы (7) в фазовой плоскости (x,y). Как видно из ниже приводимой таблицы, у кусочно-линейных систем возникают изолированные сложные особые точки, где появляется эллиптический сектор, состоящий из траекторий, которые приближаются к особой точке как при $t \to \infty$ так и при $t \to -\infty$.

№	Область в пространстве параметров	Корни характеристического уравнения	Качественная картина фазовых траекторий
1	$b < 0$	Числа $\mu^{\pm}_{1,2}$ — вещественны и разного знака	 Седло
2	$0 < 4b \leqslant$ $\leqslant \{|a|-c\}^2$, $|a| > c$.	Числа $\mu^{\pm}_1$, $\mu^{\pm}_2$ — вещественны и одного знака	 $a > 0$ $a < 0$ Узел

3	$0 < 4b \leqslant$ $\leqslant \{\lvert a\rvert - c\}^2$, $\lvert a\rvert < c$.	Если $\mu_1^+ > 0$, то $\mu_2^+ > 0$, $\mu_1^- < 0$ и $\mu_2^- < 0$, (что соответствует условию $c < 0$). Если $\mu_1^+ < 0$, то $\mu_2^+ < 0$, $\mu_1^- > 0$ и $\mu_2^- > 0$, (что соответствует условию $c > 0$)	 $c > 0$ $c < 0$ Узловой сектор и эллиптический сектор
4	$\{\lvert a\rvert - c\}^2 < 4b \leqslant$ $\leqslant \{\lvert a\rvert + c\}^2$	Либо $\mu_{1,2}^-$– вещественны и одного знака, и $\mu_{1,2}^+ = \alpha \pm i\beta$– комплексно сопряжённые, либо $\mu_{1,2}^+$– вещественны и одного знака, и $\mu_{1,2}^- = \alpha \pm i\beta$– комплексно сопряжённые	 $a < 0$, $c < 0$ $a > 0$, $c > 0$  $a < 0$, $c > 0$ $a > 0$, $c < 0$ Узел-фокус
5	$4b > \{\lvert a\rvert + c\}^2$	Числа $\mu_{1,2}^+, \mu_{1,2}^-$ – комплексные сопряженные	 $a > 0$ $a < 0$ Фокус (неустойчивый фокус, если $a < 0$, устойчивый фокус, если $a > 0$, центр, если $a = 0$)

В дальнейшем будем предполагать, что $b \neq 0$. В вышеприведенной таблице приведена классификация основных случаев поведения траекторий системы (7) на фазовой плоскости.

Условия ограниченности решений на полуоси

Теперь перейдем к изучению уравнения (2). Уравнение (2) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ay - bx_1 - c|y - \varphi(x,y)|. \end{cases} \tag{8}$$

Ниже будем предполагать, что функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{|\varphi(x,y)|}{|x|+|y|} = 0. \tag{9}$$

Условие (9) обеспечивает продолжимость решения системы (8) на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть имеет место (9) и коэффициенты системы (8) удовлетворяют условиям:* $b > 0, c > 0, a \notin [\min\{0, 2\sqrt{b} - c\}, \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}]$. *Тогда все решения системы (8) ограничены при* $t > 0$, *если* $a > 0$ *и при* $t < 0$, *если* $a < 0$, *т.е.* $a \neq 0$ *и для любого решения* $(x(t), y(t))$ *справедливо неравенство*

$$\sup\{|x(t)| + |y(t)| : \quad a \cdot t > 0\} < \infty.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Если некоторое решение $(x(t), y(t))$ системы (8) неограничено при $t > 0$, то существует последовательность t_k, $\quad 0 < t_k < t_{k+1}$, $\quad k = 1, 2, ...$ такая, что $t_k \to \infty$ и $|x(t_k)| + |y(t_k)| \to \infty$ при $k \to \infty$. Выберем числа $\tau_k \in [0, t_k]$ такие, что

$$|x(\tau_k)| + |y(\tau_k)| = \max_{0\leqslant t\leqslant t_k}(|x(t)| + |y(t)|).$$

Из неравенства $|x(\tau_k)| + |y(\tau_k)| \geq |x(t_k)| + |y(t_k)|$ следует $d_k \equiv |x(\tau_k)| + |y(\tau_k)| \to \infty$ и, следовательно, $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Вектор-функции

$$(u_k(t), v_k(t)) = (x(\tau_k + t)/d_k, y(\tau_k + t)/d_k) \quad -\tau_k \leqslant t \leqslant 0$$

удовлетворяют условиям

$$|u_k(t)| + |v_k(t)| \leqslant |u_k(0)| + |v_k(0)| = 1, \quad -\tau_k \leqslant t \leqslant 0$$

и являются решением системы

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -av - bu - c|v - h_k(t)|. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь функции $h_k(t)$ определяются равенством

$$h_k(t) = \varphi(u_k(t), v_k(t))/d_k$$

и, в силу выбора чисел d_k и условия (9), равномерно по t стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Пусть (u^*, v^*) – предельная точка последовательности $(u_k(0), v_k(0))$. Тогда решение системы (7), удовлетворяющее начальному условию $(x(0), y(0)) = (u^*, v^*)$, является ненулевым и ограниченным при $t \leqslant 0$. Но с другой стороны, в условиях теоремы, согласно п. 2 и 4, все решения системы (7) неограничены при $t \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы для случая $a > 0$.

Аналогично рассматривается случай $a < 0$. Теорема доказана.

Устойчивость изолированной особой точки

Рассмотрим общее уравнение второго порядка

$$x'' = f(x, x'), \tag{11}$$

где $f(x,y)$ – определенная на всей плоскости (x,y) непрерывная функция. Уравнение (11) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x,y). \end{cases} \tag{12}$$

Ниже мы будем предполагать, что любое решение системы (12) продолжимо на всю числовую ось. Как отметили выше, это предположение выполнено в частном случае, когда рассматривается уравнение (8), где функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условию (9).

Особые точки системы (12) лежат на оси абсцисс, т.е. имеют вид $(x_0, 0)$, где x_0 является решением скалярного уравнения

$$f(x, 0) = 0. \tag{13}$$

Пусть x_0 – решение скалярного уравнения (13). Следует отметить, что исследование поведения траекторий системы (12) в окрестности точек равновесия является одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства, связанные с качественным поведением траектории системы (12) в окрестности особой точки $(x_0, 0)$. Для описания этих свойств используем методы функции Ляпунова [2, 3].

Лемма 1. *Предположим, что функция $f(x,y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma, \quad \sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям:*

а) $f(x,0)(x - x_0) \leqslant 0$ и $f(x,0)$ тождественно не равна нулю в любом интервале $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta), \quad \delta > 0$;

б) $(f(x,y) - f(x,0))y \geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (12), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \geq 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0. \tag{14}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда существует решение $(x(t), y(t))$ системы (12), отличное от особой точки $(x_0, 0)$, и последовательность $t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ такие, что

$$\lim_{k \to \infty} |x(t_k) - x_0| + |y(t_k)| = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим множество $E = \{t : t \geq 0, |x(t) - x_0| + |y(t)| < \sigma_1\}$, где $0 < \sigma_1 < \min[\sigma, |x(0) - x_0| + |y(0)|]$. Отметим, что E – открытое множество и в силу (15) $t_k \in E$ начиная с некоторого номера k_0. Обозначим через (α_k, β_k) составляющие интервалы множества E, содержащие числа t_k. Не исключено, что интервалы (α_k, β_k), соответствующие различным номерам k совпадают и $\beta_k = \infty$ начиная с некоторого номера k. По определению составляющего интервала имеем:

$$|x(t) - x_0| + |y(t)| < |x(\alpha_k) - x_0| + |y(\alpha_k)| = \sigma_1, \quad \alpha_k < t \leqslant t_k. \tag{16}$$

Для решения $(x(t), y(t))$ справедливо тождество

$$\frac{d}{dt}\{y^2/2 + G(x)\} = h(x,y), \tag{17}$$

где

$$G(x) = -\int_{x_0}^{x} f(s,0)ds, \qquad h(x,y) = (f(x,y) - f(x,0))y.$$

Интегрируя тождество (17) на отрезке $[0, t_k]$, имеем

$$y(t_k)^2/2 + G[x(t_k)] - y(\alpha_k)^2/2 - G[\alpha_k)] = \int_{\alpha_k}^{t_k} h(x(s), y(s))ds. \tag{18}$$

В силу условия б) $h(x, y) \geq 0$ при $|x - x_0| + |y| < \sigma$, поэтому подынтегральная функция в правой части (18) неотрицательна. Следовательно имеет место неравенство

$$y(t_k)^2/2 + G[x(t_k)] - y(\alpha_k)^2/2 - G[\alpha_k)] \geq 0, k \geq k_0. \tag{19}$$

Так как в силу условия а) непрерывная функция $G(x)$ положительна при $0 < |x - x_0| < \sigma$, то $y^2/2 + G[x] \geq m > 0$ при $|x - x_0| + |y| = \sigma_1$. Поэтому неравенство (19) противоречит равенству (15). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что в случае, когда функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ в некоторой окрестности особой точки $(x_0, 0)$, для выполнения условий а) и б) леммы 1 достаточно выполнения неравенства $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) < 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) > 0$.

Следующая лемма является обобщением леммы 1.

Лемма 2. *Предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ и при заданном $\kappa \leqslant 0$ удовлетворяет условиям:*

а) функция $f(x, \kappa(x - x_0))(x - x_0) - \kappa^2(x - x_0)^2 \geq 0$, причем тождественно не равна нулю в любом интервале $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, $\delta > 0$;

б) $(f(x, \kappa(x - x_0) + y) - \kappa y - f(x, \kappa(x - x_0)))y \geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (12), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \geq 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0. \tag{20}$$

Аналогично лемме 1 доказывается следующая

Лемма 3. *Предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условию а) леммы 1 и условию:*

в) $(f(x, y) - f(x, 0))y \leqslant 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (12), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \leqslant 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0. \tag{21}$$

Свойство (21) решений системы (12) тесно связано со свойством устойчивости по Ляпунову стационарного решения $(x_0, 0)$. А именно имеет место

Теорема 2. *Стационарное решение $(x_0, 0)$ системы (12) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда для любого решения, отличного от него, имеет место неравенство (21).*

Признаки существования предельных циклов

Продолжим изучение системы (8) предполагая, что $b > 0, c > 0$, функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (9), $\varphi(0, 0) > 0$ и система (8) имеет единственную особую точку, т.е. скалярное уравнение

$$bx + c|\varphi(x, 0)| = 0 \tag{22}$$

имеет единственное решение x_0, причем $x_0 \neq 0$.

Теорема 3. *Предположим, что: а) коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям* $a > \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}$; *б) функция* $\varphi(x, y)$ *в некоторой окрестности* $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ *особой точки* $(x_0, 0)$ *удовлетворяет условиям:* $((c-a)y + c\varphi(x,y) - c\varphi(x,0))y \geq 0$. *Тогда для любого решения* $(x(t), y(t))$ *системы (8), отличного от стационарного, и любой последовательности* $h_k \to +\infty$ *существует подпоследовательность* h_{k_j} *такая, что решения* $(x(t + h_{k_j}), y(t + h_{k_j}))$ *равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (8) при* $j \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $(x(t), y(t))$ – произвольное решение системы (8), отличное от периодического и стационарного. В силу теоремы 1 это решение ограниченно при $t > 0$. Следовательно, для любой последовательности $h_k \to +\infty$ последовательность решений $(x(t + h_k), y(t + h_k))$ определена, ограничена и равностепенно непрерывна на каждом отрезке. В силу теоремы Арцела существует подпоследовательность h_{k_j} такая, что решения $(x_1(t + h_{k_j}), x_2(t + h_{k_j}))$ приближаются к некоторому решению $(x^*(t), y^*(t))$ системы (8) равномерно на каждом отрезке при $j \to +\infty$.

В силу леммы 1, множество $\omega-$ предельных точек решения $(x(t), y(t))$ не содержит единственную особую точку системы (8). Поэтому в силу теоремы Пуанкаре-Бендиксона [9] решение $(x_1^*(t), x_2^*(t))$ – периодическое. Теорема доказана.

Рис. 2 иллюстрирует утверждение теоремы.

Теорема 4. *Предположим, что: а) коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям* $a < \min\{0, 2\sqrt{b} - c\}$; *б) функция* $\varphi(x, y)$ *в некоторой окрестности* $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ *особой точки* $(x_0, 0)$ *удовлетворяет условиям:* $((c-a)y + c\varphi(x,y) - c\varphi(x,0))y \leqslant 0$. *Тогда для любого решения* $(x(t), y(t))$ *системы (8), отличного от стационарного, и любой последовательности* $h_k \to +\infty$ *существует подпоследовательность* h_{k_j} *такая, что решения* $(x(t - h_{k_j}), y(t - h_{k_j}))$ *равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (8) при* $j \to +\infty$.

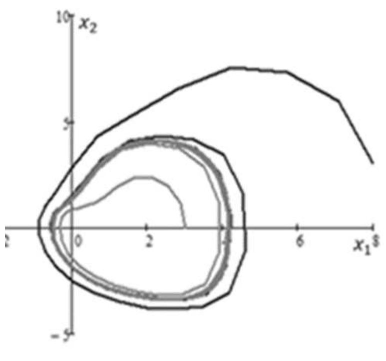


Рис. 2. Предельный цикл

В качестве примера рассмотрим функцию $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$. Она удовлетворяет условию (9) и $\varphi(0, 0) = 1 > 0$. Следующее утверждение определяет условию единственности решения уравнения (22).

Лемма 4. *Уравнение* $dx + |\cos(x)| = 0$, *где* d *– заданное число, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $|d|\sqrt{1 + x_1^2} > 1$, *где* $x_1 \in (\pi/2, \pi)$ *и является решением уравнения* $\cos(x) + x\sin(x) = 0$ $(x_1 \approx 2,798386$, $\sqrt{1 + x_1^2} \approx 0,336508)$.

Отметим, что утверждение леммы 4 в случае $|d| > 1$, является следствием принципа сжимающих отображений, а в случае, когда $1 < |d|\sqrt{1+x_1^2} \leqslant \sqrt{1+x_1^2}$ следует из анализа графиков функции $z = -|\cos(x)|$ и прямой $z = dx$.

Пусть коэффициенты b, c такие, что $0 < c < b\sqrt{1+x_1^2}$. Тогда уравнение $bx+c|\cos(x)| = 0$, согласно лемме 4, имеет единственное решение $x_0 = x_0(b/c) < 0$, зависящее от дроби b/c. Поэтому, если коэффициенты a, b, c системы (8) удовлетворяют неравенствам $\max\{0, \quad c - 2\sqrt{b}\} < a < c(1 - \sin(x_0))$, то выполнены все условия теоремы 3 при $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$. Следовательно уравнение (2) имеет предельный цикл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва-Ижевск: Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика». 2000. 400 с.
2. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* М.: УРСС. 2004. 239 с.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* М.: Наука. 1976. 496 с.
4. Юмагулов М.Г. *Введение в теорию динамических систем: учебное пособие.* СПб.: Из-во «Лань». 2015. 272 с.
5. Иванов А.П. *Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах. Нелинейная динамика* // 2012. Т. 8. № 2. С. 231–247.
6. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем.* М.: МЦНМО. 2005. 454 с.
7. R.I. Leine, D.H. Van Campen *Bifurcation phenotena in non-smooth dynamical systems* // European Journal of Mechanigs A/Solids. 5(2006). Pp. 595–616.
8. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш. *Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 1. С. 84–93.
9. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1970. 720 с.

Муллошараф Курбонович Арабов,
Институт математики им. А. Джураеви АН РТ,
ул. Айни 299/1,
734063 г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: cool.araby@mail.ru

Эргашбой Мухамадиев,
Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г. Вологда, Россия
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Исхокбой Джумаевич Нуров,
Таджикский национальный университет,
проспект Рудаки, 17,
734000, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: nid1@mail.ru

Хуршед Илхомиддинович Собиров,
Таджикский национальный университет,
проспект Рудаки, 17,
734000, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: hurshed.sobirov@mail.ru