ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 63-77.

УДК 517.956.226

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ЗАХВАТЕ В РЕЗОНАНС

Л.А. КАЛЯКИН

Аннотация. Две модельные задачи о захвате в резонанс анализируются методом усреднения, который приводит к адиабатическому приближению в главном члене асимптотики. Основной целью является приближенное (с использованием малого параметра) описание области захвата в резонанс. Эта область на фазовой плоскости состоит из точек, из которых стартуют резонансные решения с неограниченно растущей энергией. Область захвата зависит от дополнительного параметра, входящего в уравнения. Демонстрируется непригодность адиабатического приближения, когда область захвата становится узкой. В этом случае требуется значительное изменение метода усреднения. В результате для главного члена асимптотики возникает система нелинейных дифференциальных уравнений, которая не всегда оказывается интегрируемой.

Ключевые слова: нелинейные колебания, малый параметр, асимптотика, захват в резонанс, адиабатическое приближение.

Mathematics Subject Classification: 34D10, 34D20, 37J25, 34E13

1. Введение

Мнение об исключительной эффективности математических методов в научных исследованиях считается общепризнанным и создает впечатление о всесильности математики. Широкое использование компьютеров способствует распространению этого мифа. Между тем в прикладных исследованиях часто обнаруживается ограниченность математического подхода. Возникающие проблемы обычно объясняются недостатками в используемых моделях: либо излишней сложностью, либо чрезмерной упрощенностью. Эффективность математики в приложениях во многом держится на искусстве упрощения сложных моделей до приемлимого уровня. Наиболее отчетливо это проявляется в задачах, которые ставятся в форме дифференциальных уравнений. Сложные исходные уравнения подменяются уравнениями, более простыми и доступными для аналитического и численного анализа. Аккуратное математическое оформление упрощений выполняется с привлечением понятия асимптотического приближения [1, 2]. Такой подход не всегда бывает простым. Трудности, которые приходится преодолевать, связаны с неравномерностью асимптотик [3]. Предъявляемые асимптотические формулы иногда оказываются не пригодны в той или иной области. Например, в банальном примере $\exp(-x/\varepsilon)$ асимптотическая аппроксимация $\exp(-x/\varepsilon) \approx 0$ при $\varepsilon \to 0$ заведомо не пригодна в секторе $x/\varepsilon \leqslant 1$. Неравномерности в асимптотических разложениях обнаруживаются для функций нескольких переменных и обычно указывает на наличие существенно особых точек.

L.A. Kalyakin, Adiabatic approximation in a resonance capture problem.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01004).

Поступила 2 апреля 2017 г.

При исследовании решений дифференциальных уравнений широко практикуются разложения по малому параметру. Поскольку решение помимо параметра содержит зависимость, как минимум, от еще одной (независимой) переменной, то в таких задачах часто приходится сталкиваться с проблемой неравномерности разложений. Для построения равномерно пригодных асимптотических решений разработаны разные методы, основанные на идее многих масштабов [3]–[5]. При этом большинство исследователей предпочитают иметь дело с разложением по одному (скалярному) параметру. Наличие бóльшего числа независимых параметров приводит к дополнительным проблемам с равномерностью, которые редко обсуждаются. Между тем это направление исследований интересно для приложений и содержит новые математические проблемы, см., например, [6].

В данной работе анализируется задача о захвате в резонанс при наличии двух параметров в исходных уравнениях. Разложение по одному из них создает иллюзию несущественности второго параметра. Ошибочность такого представления вскрывается на двух примерах.

1.1. Постановка задачи. При анализе резонансных эффектов в динамических системах одним из целевых объектов является область захвата в резонанс – множество начальных точек, из которых стартуют резонансные траектории. Для нелинейных систем это множество, как правило, не совпадает со всем фазовым пространством. Характерный пример дает система двух уравнений

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha \sin\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \lambda - \rho, \quad t > 0. \tag{1}$$

В асимптотических конструкциях, из которых извлекаются эти уравнения, величины $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ интерпретируются как поправка к энергии и сдвиг фазы быстрых колебаний. Резонансные решения идентифицируются с неограниченно растущей функцией $\rho(t)$ и ограниченной фазой $\varphi(t)$. Такие решения бывают при переменных параметрах, например, при $\lambda = \mu t$, $(\mu, \alpha = \mathrm{const} > 0)$, [7]. В более общем случае $\lambda = \lambda_0 + \mu t$ константа λ_0 исключается сдвигом по переменной ρ. Отличия между резонансным и нерезонансным решениями показаны на рис. 1.

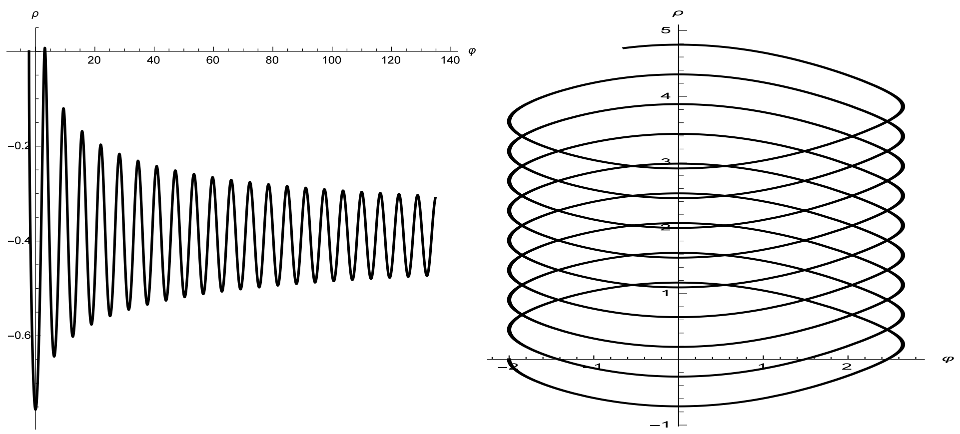

Рис. 1. Численное решение уравнений (1). Параметры $\mu = 0.02$, $\alpha = 0.2$. Слева траектория нерезонансного решения с начальной точкой $(-2.2, 0)$. Справа траектория резонансного решения с начальной точкой $(-2, 0)$

Область захвата для случая $\lambda = \mu t$ изображена на фазовой плоскости с декартовыми координатами (φ, ρ), рис. 2. Это множество описывается неравенствами (6), см. раздел 2. Из приведенных в (6) соотношений видно, что при $\mu \to 0$ область захвата расширяется до максимально возможной, ограниченной сепаратрисами математического маятника.

А при $\alpha \to 0$ уменьшается и вовсе исчезает при $|\alpha| < |\mu|$. Такой результат удается извлечь благодаря интегрируемости системы при $\lambda = \mu t$.

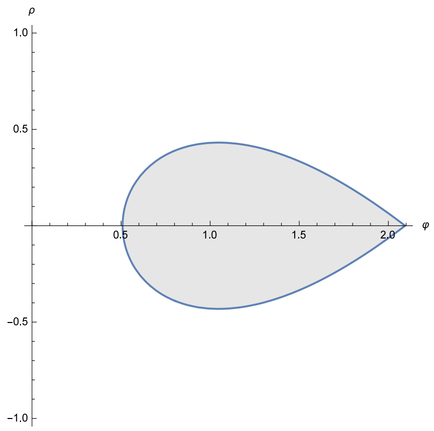

Рис. 2. Область захвата в резонанс при $\lambda = \mu t,\ \mu = \sqrt{3}/2,\ \alpha = 1$

Однако, столь явное описание области захвата возможно далеко не всегда. Менее тривиальный пример дает система уравнений главного резонанса:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha \cos\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} + r^2 - \lambda\Big] = -\alpha \sin\psi, \quad t > 0. \tag{2}$$

Здесь переменные r, ψ интерпретируются, как амплитуда и угол в полярных координатах на плоскости. В случае $\lambda = \lambda_0 + \mu t,\ (\alpha, \mu, \lambda_0 = \mathrm{const} > 0)$ наличие резонансных решений можно доказать, исследуя асимптотику решений на бесконечности. Для амплитуды, неограниченно растущей в главном члене, получается $r(t) = \sqrt{\mu t} + \mathcal{O}(1),\ t \to \infty$. Существует двухпараметрическое семейство таких решений [8]. Однако идентифицировать соответствующее множество начальных данных не удается [9]. Ситуация усугубляется наличием двухпараметрического семейства нерезонансных решений с ограниченной амплитудой. Невозможность аналитического описания области захвата иногда объясняется неинтегрируемостью системы (2), а точнее отсутствием формул связи, какие известны, например, для уравнений Пенлеве.

Заметим, что в приведенных примерах рост амплитуды обязан неавтономности уравнений. При $\lambda = \mathrm{const}$ каждая из систем имеет первый интеграл, и все решения ограничены в компоненте $\rho(t)$ или $r(t)$. Интегрируемость "замороженной задачи" можно использовать для исследования области захвата в частном случае слабой неавтономности, когда $\lambda = \lambda_0 + \mu t$ и множитель μ мал. Соответствующие подходы основаны на построении асимптотики по малому параметру $\mu \to 0$ и обычно связываются с термином "адиабатическое приближение" [5]. Однако в асимптотических конструкциях по малому параметру всегда возникает проблема равномерности по другим параметрам, входящим в уравнения. В рассмотренных системах проблемы возникают при $|\alpha| \ll 1$. Например, в первом примере условие, необходимое для существования области захвата, накладывает ограничение $|\mu/\alpha| \leqslant 1$, которое означает, что α не должно быть слишком малым.

Приведенные выше примеры выглядят довольно просто. В них параметр α можно исключить масштабным преобразованием, сведя дело к случаю $\alpha = 1$. Ясно, что при этом вместо μ появится новая комбинация. Например, в первом примере появляется отношение μ/α. В таком случае адиабатическое приближение имеет смысл лишь при $\mu/\alpha \to 0$.

В более сложных уравнениях не удается избавиться от дополнительных параметров столь простым способом. Таким примером может служить система двух дифференциальных уравнений

$$\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \partial_\psi Z(\gamma,\psi), \quad \gamma\frac{d\psi}{dt} = -\partial_\gamma Z(\gamma,\psi), \ t > 0, \tag{3}$$

определяемая функцией

$$Z(\gamma,\psi) \equiv \frac{1}{2}(\gamma-\lambda)^2 + \alpha\sqrt{\gamma^2+2b\gamma-d}\,\sin\psi. \tag{4}$$

Здесь $b, d > 0$ – фиксированные константы. Положительный нуль подкоренного выражения $\gamma_0 = \sqrt{b^2+d}-b$ определяет границу области $D = \{\gamma > \gamma_0, \ \psi \in \mathbb{R}^1\}$, где рассматривается задача. Уравнения в форме (3),(4) возникают при описании движения заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны, бегущей в направлении однородного магнитного поля [10], § 17; см. также [11].

Если $\lambda = \mathrm{const}$, то система (3) интегрируется, и на любом решении компонента $\gamma(t)$ ограничена. В неавтономном случае с $\lambda = \lambda_0+\mu t$ система (3) не интегрируется. Для случая слабой неавтономности с $|\mu| \ll 1$ обнаруживаются решения с неограниченно растущей компонентой $\gamma(t)$, [12]. Однако теперь α не исключается масштабными преобразованиями, и остается неясным, какие проблемы возникают в адиабатическом приближении из-за этого дополнительного параметра.

Надо иметь в виду, что в известных работах, посвященных анализу системы (3), адиабатическое приближение вовсе не используется. Например, предъявленная в [13, 14] конструкция не соответствует адиабатическому приближению. На первый взгляд игнорирование адиабатического приближения для слабо неавтономной системы выглядит странно, тем более, что приводит к более сложным асимптотическим конструкциям. Впрочем, такое игнорирование наблюдается и в других похожих ситуациях [9, 15].

В данной работе выясняются соотношения на параметры исходной системы, при которых адиабатическое приближение оказывается непригодным для описания области захвата в резонанс. Непригодность обнаруживается при малом коэффициенте α и проявляется в узости области захвата, которая схлопывается в линию при $\alpha \to 0$. Этот эффект не имеет отношения к явлению динамической бифуркации равновесия седло-центр, которое часто обсуждается в связи с задачей о захвате в резонанс, например, в [15]–[17]. Принципиальное отличие состоит в том, что схлопывание области захвата соответствует бифуркации на линию проскальзывания, состоящую из точек равновесия.

2. Пример смещенного маятника

Чтобы отчетливо выявить роль параметра α в адиабатическом приближении, полезно проанализировать задачу, для которой известно точное решение. В качестве таковой рассмотрим наиболее простую нелинейную слабо неавтономную систему (1). В ней малый параметр $0 < \mu \ll 1$ присутствует в коэффициенте $\lambda = \mu\, t$. Дифференциальные уравнения дополняются начальными условиями

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0.$$

Требуется:
1. Выяснить условия, при которых существуют точные решения с неограниченно растущей компонентой $\rho(t)$, т.е. определить точную область захвата в резонанс.
2. Получить приближенное описание области захвата на основе адиабатического приближения с малым параметром μ.
3. Выяснить ограничения на параметр α, при которых адиабатическое приближение становится непригодным для описания области захвата.

2.1. Точное решение. В случае когда $\lambda = \mu t$, система (1) сводится к уравнению математического маятника с постоянным крутящим моментом (уравнение смещенного маятника):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mu - \alpha \sin\varphi, \tag{5}$$

хорошо известному в задачах о захвате в резонанс [5, 7]. Уравнение интегрируется, поскольку имеется первый интеграл

$$\dot{\varphi}^2/2 - \mu\varphi - \alpha\cos\varphi = \text{const}.$$

Информацию о возможных решениях можно усмотреть на фазовом портрете в декартовых координатах $(\varphi, \dot{\varphi})$.

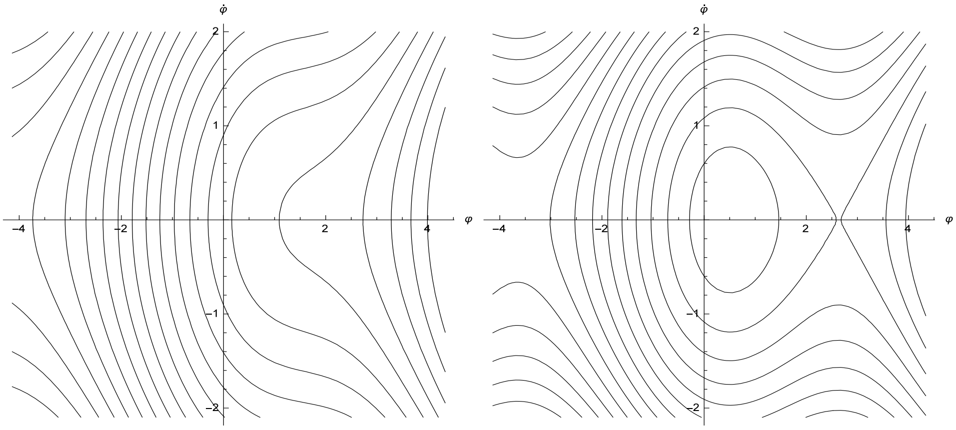

Рис. 3. Фазовый портрет уравнения маятника с крутящим моментом. Слева: $|\mu/\alpha| > 1$, справа: $|\mu/\alpha| < 1$

Если $|\mu/\alpha| > 1$, то неподвижных в уравнении (5) точек нет, и все траектории уходят на бесконечность, рис. 3. Такие решения с неограниченно растущей компонентой $\psi(t) = \mu t^2[1/2 + \mathcal{O}(t^{-1})]$, $t \to \infty$ соответствуют проскальзыванию фазы. Вторая компонента $\rho(t)$ на таких решениях ограничена.

Если $|\mu/\alpha| < 1$, то в уравнении (5) существуют неподвижные точки типа центр и седло. Сепаратрисная петля охватывает центр и образует границу области (см. правую часть рис. 3, внутри которой фазовые траектории замкнуты и соответствуют периодическим решениям с ограниченной фазой $\psi(t)$. Помимо того, существует много решений с проскальзыванием (неограниченным ростом) фазы.

Эти результаты, полученные для уравнения (5), позволяют полностью решить вопрос о резонансных решениях в системе (1). Такие решения существуют лишь при условии $|\mu/\alpha| \leqslant 1$. Их начальные значения (φ_0, ρ_0) либо находятся внутри сепаратрисной петлей, либо лежат на сепаратрисах, входящих в седло. У таких решений компонента $\varphi(t)$ ограничена, а $\rho(t)$, согласно второму уравнению из (1), растет:

$$\rho(t) = \lambda(t) - \dot{\varphi}(t) = \mu t + \mathcal{O}(1),\ t \to \infty.$$

Аналитическое описание начальной области захвата (множества начальных данных (φ_0, ρ_0)) дается формулами:

$$-\alpha\cos\varphi_c - \mu\varphi_c \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^2 - \alpha\cos\varphi_0 - \mu\varphi_0 \leqslant -\alpha\cos\varphi_s - \mu\varphi_s. \tag{6}$$

Здесь φ_c, φ_s– координаты неподвижных точек системы типа центр и седло, определяемые уравнением $\sin\varphi = \mu/\alpha$ с условиями $0 < \varphi_c < \varphi_s < \pi$. Ввиду 2π–периодичности по φ рассматривается одна петля на фазовой плоскости.

При $\mu \to 0$ предельное положение области захвата представляется ячейкой, ограниченной сепаратрисами маятника:

$$-\alpha \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^2 - \alpha\cos\varphi_0 \leqslant \alpha. \tag{7}$$

Эту область можно использовать как аппроксимацию точной области захвата при малых $\mu \ll 1$. Однако такое приближение не является равномерным по α. При малых $\alpha \approx \mu \ll 1$ ячейку (7) нельзя использовать для приближенного описания области захвата из-за больших ошибок. Так, например, при $\alpha < \mu$ резонансных решений вовсе нет, хотя ячейка (7) имеет ненулевую площадь порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha}),\ \alpha \to 0$.

Причину неравномерности можно выявить масштабным преобразованием. При замене $\rho = \sqrt{\alpha}\hat{\rho},\ t = \tilde{t}/\sqrt{a}$ получается уравнение с коэффициентами $\alpha = 1,\ \lambda = (\mu/\alpha)\tilde{t}$. Отсюда видно, что в качестве малого параметра следует использовать отношение μ/α, а при $\mu \approx \alpha$ никаких малых параметров в задаче нет и упростить ее нельзя.

Мы рассмотрим ниже систему в форме (1), чтобы акцентировать внимание на роли дополнительного параметра α, который в более сложных уравнениях не убирается столь простым преобразованием.

2.2. Адиабатическое приближение. Если параметр μ мал, то коэффициент $\lambda = \mu t$ меняется медленно. Идея адиабатического приближения состоит в использовании решения замороженной системы, в которой λ считается постоянным. Замороженная система (1) имеет первый интеграл

$$H(\rho,\varphi;\lambda) \equiv (\rho-\lambda)^2/2 - \alpha\cos\varphi = E = \mathrm{const}$$

и сводится к уравнению маятника сдвигом по ρ. Решение выписывается:

$$\rho = \lambda + \hat{\rho}(t,E),\ \ \varphi = \hat{\varphi}(t,E).$$

Здесь $\hat{\rho},\hat{\varphi}$ решение уравнения маятника со значением первого интеграла $\hat{\rho}^2/2 - \alpha\cos\hat{\varphi} = E$. Далее используется семейство периодических решений (при энергии $-\alpha < E < \alpha$). Их частота $\omega = \omega(E)$ зависит от E. Через эти функции ниже выписывается приближенное решение для "размороженной"задачи с $\lambda = \mu t$.

В формальных конструкциях удобно использовать функции с фиксированным периодом:

$$R(S,E) = \hat{\rho}(S/\omega,E),\ \ \Phi(S,E) = \hat{\varphi}(S/\omega,E)).$$

В силу уравнений маятника эти функции удовлетворяют тождествам по переменным S,E:

$$\omega\partial_s R = \alpha\sin\Phi,\quad \omega\partial_s\Phi = -R,\quad R^2/2 - \alpha\cos\Phi = E,\ \ R\partial_E R + \alpha\sin\Phi\,\partial_E\Phi = 1,\quad \forall\, S,E.$$

В исходной задаче с переменным коэффициентом $\lambda = \lambda(t)$ делается замена переменных по формулам

$$\rho(t) = \lambda(t) + R(S(t),E(t)),\quad \varphi(t) = \Phi(S(t),E(t)).$$

Для новых искомых функций $S(t),E(t)$ получаются уравнения

$$\frac{dS}{dt} = \omega(E) - \lambda'(t)\omega(E)\partial_E\Phi(S,E),$$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda'(t)\omega(E)\partial_S\Phi(S,E).$$

Если коэффициент $\lambda(t)$ медленно меняется, так что $\lambda'(t) = \mathcal{O}(\mu),\ \mu \to 0$, то главные члены асимптотики зависят от медленного времени:

$$E = E_0(\tau) + \mathcal{O}(\mu),\ \ S = \mu^{-1}S_0(\tau) + \mathcal{O}(1),\ \ \mu \to 0,\ \ (\tau = \mu t).$$

Они определяются из усредненных уравнений

$$\frac{dE_0}{d\tau} = 0,\ \frac{dS_0}{d\tau} = \omega(E_0).$$

Таким образом, в главном члене асимптотики функция $E(t) = \mathrm{const} + \mathcal{O}(\mu)$ остается постоянной (является адиабатическим инвариантом) на временах $0 < \tau < \mathcal{O}(1)$, или в быстром масштабе $0 < t < \mathcal{O}(\mu^{-1})$.

В адиабатическом приближении решение описывается через решение маятника формулами:

$$\rho(t) = \lambda(t) + \hat{\rho}(t, E_0) + \mathcal{O}(\mu),\ \varphi = \hat{\varphi}(t + \mathcal{O}(1), E_0) + \mathcal{O}(\mu),\quad \mu \to 0,\ 0 < t < \mathcal{O}(\mu^{-1}).$$

Приближенные решения при $\lambda = \mu t$ имеют амплитуду $\rho = \mu t + \hat{\rho}(t, E) + \mathcal{O}(\mu)$, медленно растущую по времени $\rho = \mu t + \mathcal{O}(1),\ t \to \infty$. Начальные данные, при которых функции $\hat{\rho}, \hat{\varphi}$ ограничены, соответствуют сепаратрисной ячейке маятника (7).

Из этих формул может создаться впечатление, что ячейка (7) представляет собой область захвата в резонанс. Однако из сравнения с точной областью захвата видно, что из точек вблизи границы стартуют нерезонансные решения с проскальзыванием фазы. Численное решение уравнений (1) приведено на рис. 1. Слева решение с начальной точкой $(-2.2, 0)$ из приближенной области захвата, оно оказывается нерезонансным. Справа резонансное решение с начальной точкой $(-2, 0)$ из точной области захвата.

Отличия между областями представлены на рис. 4 и 5. Разница между точной (6) и приближенной (7) областями захвата имеет порядок $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ при $\mu \to 0$, если фиксировано значение $\alpha \neq 0$. Если же вместе с $\mu \to 0$ стремится к нулю параметр $\alpha \to 0$, то область захвата как приближенная, так и точная сжимаются и ширина их имеет порядок $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha})$. Вместе с тем происходит смещение точной области захвата, так что ошибка по фазе оказывается порядка единицы, если $\alpha = \mathcal{O}(\mu)$.

Как указывалось выше, подходящим малым параметром является отношение μ/α, а разница между областями захвата имеет порядок $\mathcal{O}(\sqrt{\mu/\alpha})$. Приведем на этот счет точные результаты.

2.3. Погрешность области захвата в адиабатическом приближении. Неподвижная седловая точка φ_s исходного точного уравнения (5) находится из уравнения $\sin\varphi = \mu/\alpha$. Ее асимптотика в главном члене равна π и определяет расстояние до седловой точки маятника:

$$\pi - \varphi_s = \mu/\alpha + \mathcal{O}((\mu/a)^2),\ \mu/\alpha \to 0.$$

Сепаратрисная траектория для уравнения (5) (при $\dot{\varphi} = \rho$) удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2}\rho^2 - \alpha\cos\varphi - \mu\varphi = -\alpha\cos\varphi_s - \mu\varphi_s = \alpha - \mu\pi + \mu\mathcal{O}((\mu/a)),\ \mu/\alpha \to 0,$$

которое определяет точную границу области захвата $\rho = \rho_{ex}(\varphi)$. Асимптотическое описание двух ветвей этой границы дается формулой

$$\rho_{ex} = \pm\sqrt{\alpha}\Big[\sqrt{2(\cos\varphi + 1)} + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\varphi - \pi}{2\sqrt{2(\cos\varphi + 1)}} + \mathcal{O}((\mu/\alpha)^2)\Big],\ \mu/\alpha \to 0.$$

Уравнение границы для приближенной области захвата $\rho = \rho_{as}(\varphi)$ соответствует сепаратрисам маятника

$$\rho_{as} = \pm\sqrt{\alpha}\sqrt{2(\cos\varphi + 1)}.$$

Разность этих функций описывает "вертикальный зазор"между границами. Для него выписывается асимптотика

$$|\rho_{as}(\varphi) - \rho_{ex}(\varphi)| = \sqrt{\alpha}\Big[\frac{\mu}{\alpha}\frac{\pi - \varphi}{2\sqrt{2(\cos\varphi + 1)}} + \mathcal{O}((\mu/\alpha)^2)\Big],\ \mu/\alpha \to 0$$

на промежутке $\varphi_0 < \varphi < \varphi_s$, где определена сепаратрисная петля исходной системы.

Левая граница $\varphi = \varphi_0$ этого промежутка является точкой пересечения сепаратрисной петли с осью $\rho = 0$. Она определяется из уравнения

$$-\alpha \cos\varphi - \mu\varphi = -\alpha\cos\varphi_s - \mu\varphi_s = \alpha - \mu\pi + \mu\mathcal{O}((\mu/\alpha)), \ \mu/\alpha \to 0,$$

и ее асимптотика определяет расстояние до $-\pi$ (левой седловой точки маятника)

$$\pi + \varphi_0 = \sqrt{\mu/\alpha}\, 2\sqrt{\pi} + \mathcal{O}(\mu/a), \ \mu/\alpha \to 0.$$

Таким образом, на бо́льшей части промежутка $\varphi_0 < \varphi < \varphi_s$ расстояние между границами оценивается величиной порядка $\mathcal{O}(\mu/\alpha)$, $\mu/\alpha \to 0$. Однако вблизи точки поворота сепаратрисы ($\rho = 0$, $\varphi = \varphi_0$) расстояние увеличивается до $\mathcal{O}(\sqrt{\mu/\alpha})$, рис. 4,5. Этот результат соответствует известной оценке для области пригодности метода усреднения [18].

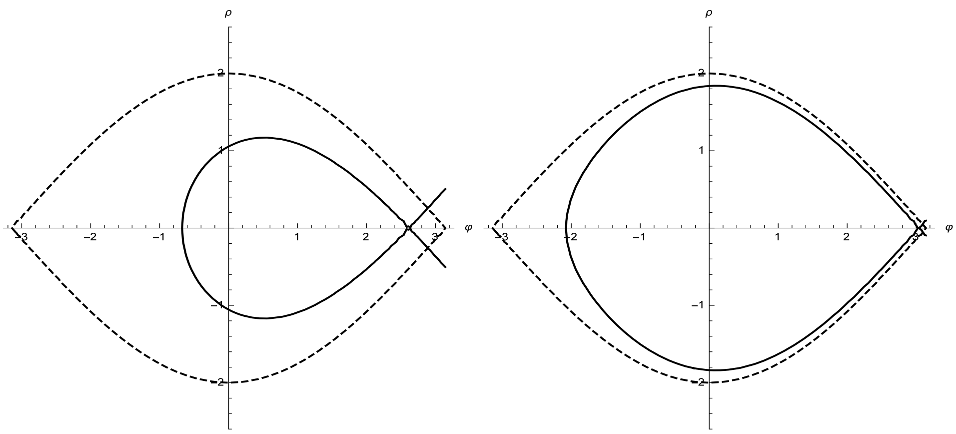

Рис. 4. Сепаратрисы маятника (пунктирные линии) ограничивают область захвата в резонанс в адиабатическом приближении. Сепаратрисная петля (сплошная линия) ограничивает точную область захвата в резонанс. При фиксированном $\alpha = 1$ разность зависит от параметра μ. Слева $\mu = 0.5$; справа $\mu = 0.1$

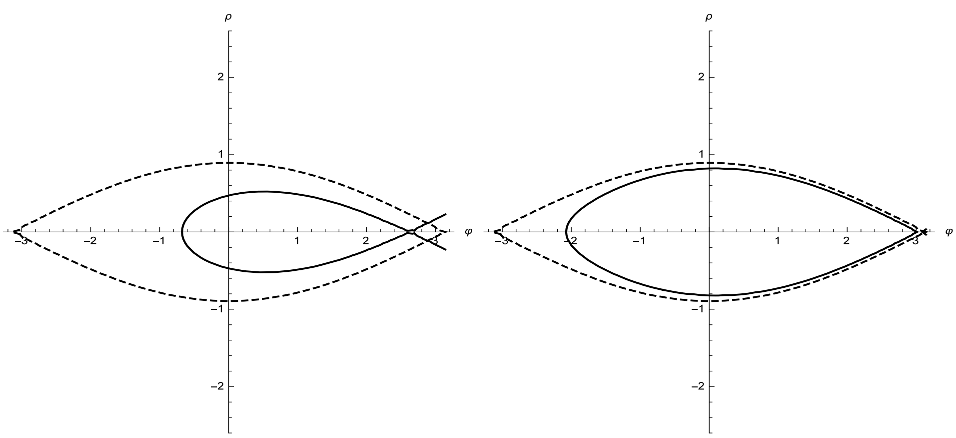

Рис. 5. Сепаратрисы маятника (пунктирные линии) ограничивают область захвата в резонанс в адиабатическом приближении. Сепаратрисная петля (сплошная линия) ограничивает точную область захвата в резонанс. При малых a, μ разность зависит от отношения μ/a. Слева $\mu = 0.1$, $\alpha = 0.2$; справа $\mu = 0.02$, $\alpha = 0.2$. Этот рисунок соответствует масштабному сжатию рис. 4

Обсуждаемые асимптотические формулы имеют смысл при $\mu/\alpha \to 0$. Если же оба параметра имеют один порядок малости $\mu/\alpha \approx 1$, то рассуждения о близости областей захвата становятся неверными. Хотя обе области оказываются узкими: $\rho^2 \leqslant \alpha$, но происходит сильное изменение по фазе ψ из-за смещения точки $\varphi_0 = -\pi + \mathcal{O}(\sqrt{\mu/\alpha})$. Точная область захвата вовсе исчезает при $\alpha < \mu$.

Вывод. *Адиабатическое приближение не годится для описания области захвата при малой амплитуде $\alpha \approx \mu$.*

В рассмотренном примере интегрируемость исходной неавтономной системы (1) играет решающую роль для исчерпывающего анализа задачи. Это свойство позволяет описать точную область захвата и сравнить ее с результатом асимптотического приближения.

3. Система главного резонанса

Еще один сравнительно простой пример дает известная система уравнений главного резонанса (2). Коэффициент $\lambda = \lambda_0 + \mu t$ берется зависящим от медленного времени, т.е. $0 < \mu \ll 1$ считается малым параметром. Кроме того, малым может быть положительный коэффициент $\alpha > 0$. Рассматривается вопрос о резонансных решениях с неограниченно растущей амплитудой $r(t)$. Основная цель: *в задаче по определению области захвата в резонанс выяснить непригодность адиабатического приближения при малых α.*

Константа $\lambda_0 = \mathrm{const} > 0$ берется фиксированной, положительной. Без ограничения общности можно считать $\lambda_0 = 1$, поскольку к этому случаю уравнения сводятся перенормировкой переменных $r = \tilde{r}\sqrt{\lambda_0}$, $t = \tilde{t}/\lambda_0$ и остальных коэффициентов $\alpha = \tilde{\alpha}\lambda_0^{3/2}, \mu = \tilde{\mu}/\lambda_0^2$. Далее знак волны опускается.

Задача с $\lambda = 1 + \mu t$ позволяет немного уменьшить громоздкость формул и более отчетливо выявить роль оставшейся пары параметров μ, α. Для уравнений (2) известно существование двухпараметрического семейства резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой $r(t)$, [8]. Однако множество начальных точек для таких решений (область захвата в резонанс) остается неизвестным.

3.1. Замороженная система. Для автономной (замороженной) системы с $\lambda = \mathrm{const}$ имеется первый интеграл:

$$J(r, \psi) \equiv \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}\lambda r^2 + \alpha\, r \sin\psi = \mathrm{const}.$$

Структура фазового портрета (линий уровня первого интеграла) зависит от параметров α, λ, рис. 6. Никаких резонансных решений в автономной системе не существует.

3.2. Адиабатическое приближение. Если параметр μ мал, то возможно адиабатическое приближение. Оно основано на решении замороженной системы. Асимптотическая конструкция выполняется методом усреднения аналогично предыдущему примеру; детали приведены в работе [19]. В этом приближении можно идентифицировать часть области захвата. Она ограничена сепаратрисными петлями, которые берутся из фазового портрета при начальном значении λ, в рассматриваемом случае при $\lambda = 1$. Определенная таким образом область захвата (точнее, ее детерминированная часть) зависит от параметра α. На рис. 7 приведены примеры для разных значений α. Здесь не обсуждается захват в резонанс из множества точек, которое находится вне сепаратрисной петли и описывается в вероятностных терминах [18].

При изменении коэффициента λ фазовый портрет деформируется. В частности, сепаратрисные петли уходят на бесконечность с ростом λ. Вместе с ними смещаются замкнутые траектории, которые соответствуют периодическим решениям замороженной системы. Для размороженной системы точные траектории похожи на спирали. Они приближенно описываются с использованием решений усредненной системы. Площадь, охватываемая

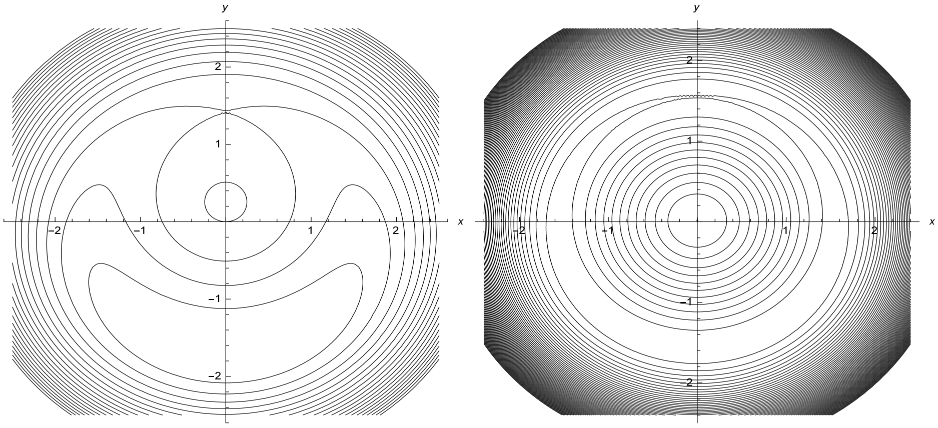

Рис. 6. Фазовый портрет замороженной системы главного резонанса зависит от параметров α и λ

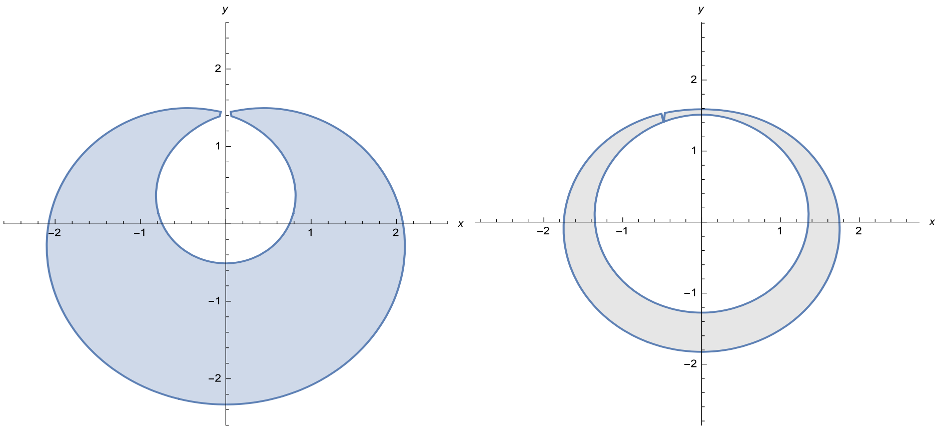

Рис. 7. Область захвата в резонанс для системы главного резонанса в адиабатическом приближении извлекается из фазового портрета при начальном значении λ. Эта область сужается при уменьшении параметра α

такой приближенной траекторией, остается постоянной в главном члене асимптотики по малому параметру $\mu \to 0$. В таком случае площадь есть адиабатический инвариант, а соответствующее приближение называется адиабатическим. Поскольку площадь между сепаратрисами растет с ростом λ, то траектории, стартующие из области захвата медленно уходят на бесконечность. Этот эффект идентифицируется с явлением захвата в резонанс.

Однако, надо помнить, что такое приближение не всегда соответствует точному решению. Решения, стартующие вблизи границы указанной приближенной области захвата, могут оказаться нерезонансными. Ширина такой приграничной полоски оценивается величиной порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\mu}|\ln\mu|)$ при $\mu \to 0$, [18]. Это означает, что захват в резонанс гарантируется из более узкой области, нежели та, что заключена между сепаратрисами. Более того, описание области захвата в адиабатическом приближении может оказаться вовсе неверным, если расстояние между сепаратрисами слишком мало. Как раз такой эффект наблюдается при малых значениях параметра α. Дело здесь не в оценках погрешности, которые могут оказаться грубыми. Численные эксперименты показывают, что траектории, стартующие из узкой области захвата, бóльшей частью оказываются нерезонансными. Оценки ширины приграничной области, для которой захват в резонанс не гарантируется, известны [18] в терминах адиабатического параметра μ. Ниже даются оценки ширины области захвата через параметр α. Все вместе это позволяет сформулировать ограничения на пару параметров α, μ, когда приграничная полоска перекрывает всю область, и захват в резонанс из точек между сепаратрисами не гарантируется.

Теорема 1. *Расстояние между сепаратрисами при $\lambda = 1$ имеет асимптотику*

$$2\sqrt{\alpha}\,[1+\mathcal{O}(\alpha)],\ \textit{при}\ \alpha \to 0. \tag{8}$$

Доказательство. Неподвижные точки системы находятся на лучах с углом $\psi = \pm\pi/2$. Их радиус-координаты находятся из уравнений $r^3 - r \pm \alpha = 0$. Отсюда легко выписывается асимптотика для радиус-координат седла $r_+(\alpha)$ в верхней полуплоскости и центра $r_-(\alpha)$ в нижней полуплоскости

$$r_\pm(\alpha) = 1 \mp \alpha/2 + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad \alpha \to 0.$$

Для значений первого интеграла $J_\pm$ в этих точках получается соотношение

$$J_\pm = J(r_\pm, \pm\pi/2) = \frac{1}{4} r_\pm [r_\pm^3 - 2r_\pm \mp 4\alpha] = \frac{1}{4} r_\pm [\pm 3\alpha - r_\pm],$$

так что для разности получается асимптотика

$$J_+ - J_- = -\frac{1}{4}[(r_+ + r_-)3\alpha + r_+^2 - r_-^2] = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

Уравнение для сепаратрис $J(r,\psi) = J_+$ рассмотрим на луче $\psi = -\pi/2$ и воспользуемся разложением Тейлора в неподвижной точке r_-:

$$J_- + \frac{1}{2} J_{rr}(r_-, -\pi/2)(r - r_-)^2 + \mathcal{O}(r - r_-)^3 = J_+.$$

Поскольку

$$J_{rr}(r_-, -\pi/2) = 3r_-^2 - 1 = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$$

То получаем

$$(r - r_-)^2[1 + \mathcal{O}(\alpha)] + \mathcal{O}(r - r_-)^3 = J_+ - J_- = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

Следовательно расстояние от центра до сепаратрисы: $|r - r_-| = \sqrt{\alpha}[1 + \mathcal{O}(\alpha)]$. Отсюда вытекает асимптотическая оценка расстояния между сепаратрисами.

Похожим образом оценивается расстояние на других лучах. Впрочем, монотонность по углу расстояния между сепаратрисами видна из фазового портрета. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если параметр α не слишком мал: $\alpha \gg \mathcal{O}(\mu|\ln\mu|)$, $\mu \to 0$, то для системы* (2) *применим метод адиабатического приближения по малому параметру $\mu \to 0$. Границы области захвата приближенно описываются сепаратрисами замороженной системы при $t = 0$,* [18].

Следствие 2. *Если параметр α слишком мал: $\alpha \leqslant \mathcal{O}(\mu)$, $\mu \to 0$, то метод адиабатического приближения по малому параметру $\mu \to 0$ не применим, и область захвата в резонанс не определяется сепаратрисами замороженной системы.*

Доказательство следствий следует из результатов об оценке ширины приграничной области величиной $\mathcal{O}(\mu|\ln\mu|)$ в комбинации с оценкой (8).

3.3. Приближение смещенного маятника. Из оценки (8) следует, что область захвата сужается при уменьшении α. Этот эффект в точности соответствует тому, что был продемонстрирован в предыдущем примере. В той, более простой задаче известно положение точной области захвата. Ошибка адиабатического приближения выявляется из сравнения. Эта ошибка оказывается большой, если параметр α мал, например, при $\alpha = \mathcal{O}(\mu)$. Более того, выяснено, что при $\alpha = \mathcal{O}(\mu)$ путем масштабного преобразования исходная система редуцируется к уравнениям (1) с $\alpha = 1$, $\mu = \mathcal{O}(1)$ (или, что то же, к смещенному маятнику (5)) без каких либо малых параметров. Точная область захвата ограничена сепаратрисной петлей такой системы.

Рассматриваемая здесь система (2) более сложная, и исключить параметры масштабным преобразованием не возможно. Однако, такую операцию можно проделать в асимптотическом приближении. На этом пути в главном члене асимптотики обнаруживается тот же смещенный маятник (5), который в случае $\alpha = \mathcal{O}(\mu)$ не содержит малых параметров. Сепаратрисная петля для такой системы определяет положение области захвата в асимптотическом приближении при $\alpha \approx \mu \to 0$.

Теорема 2. *Если малые параметры α, μ находятся в отношении: $\mathcal{O}(\mu) \leqslant \alpha \ll 1$, то область захвата будет узкой порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha})$. Ее граница приближенно описывается сепратрисной петлей смещенного маятника, который соответствует системе*

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \sin\psi, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \nu\tau - \rho, \quad \tau > 0 \tag{9}$$

с коэффициентом $\nu = \mu/2\alpha$ и $\tau = \sqrt{2\alpha}\, t$.

Доказательство. Если параметр $\alpha \ll 1$ мал, то сепаратрисы замороженной в начальной момент системы (2) оказываются вблизи окружности $r = 1$. Поэтому естественной выглядит попытка уточнить положение узкой (при малых α) области захвата вблизи этой линии. С этой целью делается сдвиг и масштабное преобразование для амплитуды $r(t) = 1 + \sqrt{\alpha/2}\,\rho(\tau)$, $\psi = \varphi - \pi/2$, $\tau = \sqrt{2\alpha}\, t$. После такой замены получается система

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \sin\psi, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} + \rho - \nu\tau = \sqrt{\alpha}\Big[\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{\alpha}\,\rho}\cos\psi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^2\Big], \quad \tau > 0.$$

с коэффициентом $\nu = \mu/2\alpha$. После этого ставится задача о поиски решений с неограниченно растущей функцией $\rho(\tau)$. Задача решается в асимптотическом приближении по параметру $\alpha \to 0$ при условии, что второй параметр $\nu \leqslant \mathrm{const} < \infty$ не велик. Для главных членов асимптотики

$$\rho(\tau) = \rho_0(\tau) + \mathcal{O}(\sqrt{a}), \ \varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \mathcal{O}(\sqrt{a})$$

получается система (9) которая редуцируется к смещенному маятнику (5). Сепаратрисная петля на фазовом портрете этого уравнения существует при $|\nu| < 1$ и описывает границу области захвата в этом приближении. Очевидно при $|\alpha| < \mu/2$ такой области не существует. Теорема доказана.

Если параметр α не слишком мал $|\alpha| \gg \mu$, то в уравнении смещенного маятника параметр ν оказывается малым. Здесь снова возможно адиабатическое приближение при $\nu \to 0$. Получаемая в этом приближении область захвата совпадает с ячейкой, ограниченной сепаратрисами маятника. Учитывая условия перехода к смещенному маятнику, получаем ограничения $\mu \ll |\alpha| \ll 1$.

Таким образом, плоскость параметров α, μ в окрестности нуля разбивается на несколько секторов. Область захвата в каждом из них описывается разными формулами. Эти формулы асимптотически совпадают в областях перекрытия секторов. Более того, в области перекрытия можно выписать отдельную формулу, получаемую в адиабатическом приближении для системы (9). Эти результаты соответствуют идеям о согласовании асимптотических разложений [3], которые обычно применяются к разложениям в разных областях независимых переменных.

3.4. Приближение главного резонанса. В исходной системе (2) с $\lambda = \lambda_0 + \mu t$ содержится еще один параметр λ_0. До сих пор он считался фиксированной положительной константой. Однако, если этот параметр мал, либо равен нулю, то приведенный выше анализ не годится. В частности, адиабатическое приближение не определяет область захвата,

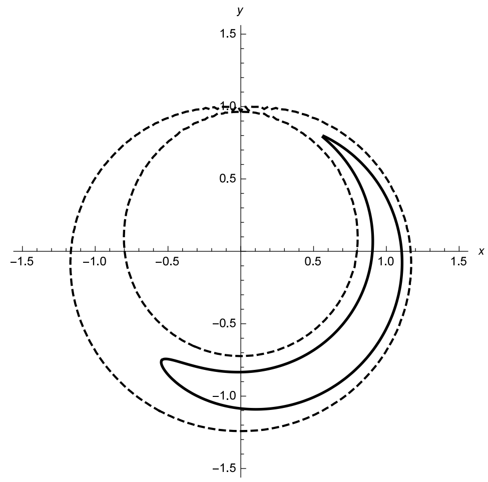

Рис. 8. Отличия в определении области захвата между: адиабатическим приближением (пунктирная линия) и приближением смещенного маятника (сплошная линия) при малых $\alpha \approx \mu \ll 1$. Результат аналогичен рис. 5

хотя бы уже потому что при $\lambda = 0$ фазовый портрет системы не содержит сепаратрис. В этом случае удобно сделать перенормировку переменных, исключив один из параметров: $t = \alpha^{-2/3}\tau,\ r = \alpha^{1/3}R(\tau)$. В результате для новых функций $R, \psi(\tau)$ получается система

$$\frac{dR}{dt} = \cos\psi, \quad R\Big[\frac{d\psi}{dt} + R^2 - \Lambda\Big] = -\sin\psi, \quad t > 0 \tag{10}$$

с коэффициентом $\Lambda = \lambda_0\alpha^{-2/3} + \mu\alpha^{-4/3}\tau$.

Если в этом коэффициенте параметр $\mu\alpha^{-4/3} \ll 1$ мал, а $\lambda_0\alpha^{-2/3} \leqslant \mathcal{O}(1)$ не велико, то возможно адиабатическое приближение. Область захвата приближенно определяется величиной $\lambda_0\alpha^{-2/3}$. Это приближение может оказаться не годным, если λ_0 слишком мало.

Если параметр $\mu\alpha^{-4/3} = \mathcal{O}(1)$ не мал, а $\lambda_0\alpha^{-2/3} \leqslant \mathcal{O}(1)$ не велико, то адиабатическое приближение не возможно. В этом случае полная система уравнений главного резонанса (10) представляет собой модельную задачу, которая не допускает дальнейшего упрощения. Область захвата определяется в численных экспериментах.

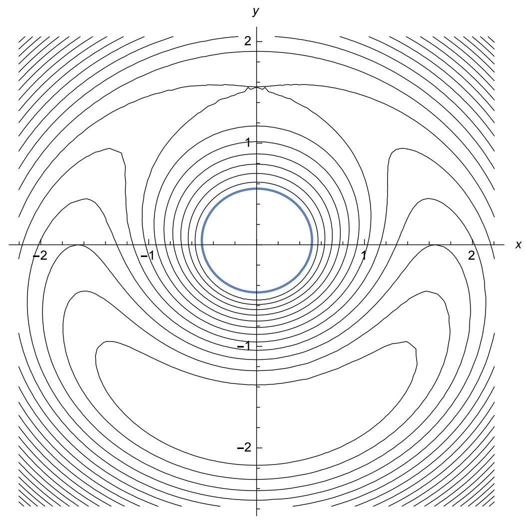

Рис. 9. Фазовый портрет замороженной системы (3),(4)

4. Асимптотическое приближение для общей системы

Похожая ситуация имеет место для более общих уравнений (3),(4). Неавтономная система здесь также не интегрируются, и никакой информации о точной области захвата в резонанс нет.

Анализ задачи в адиабатическом приближении основан на первом интеграле для замороженной системы.

$$Z(\gamma,\psi) \equiv \frac{1}{2}(\gamma-\lambda)^2 + \alpha\sqrt{\gamma^2+2b\gamma-d}\,\sin\psi = \mathrm{const}.$$

Фазовый портрет похож на систему главного резонанса. Фазовые траектории за исключением пары сепаратрис представляют собой замкнутые кривые на плоскости с полярными координатами ψ,γ. Область захвата в резонанс находится между сепаратрисными петлями. Эта область сужается при $\alpha \to 0$. Детальное исследование узкой области захвата изложено в [22].

Отметим, что уточнение положения узкой области захвата приводит либо к задаче для смещенного маятника, либо к системе главного резонанса [22]. Такие результаты соответствуют известным работам физиков в [13, 14]. Они объясняют причину, по которой адиабатическое приближение игнорировалось в этих и в других работах, например, [20, 21].

5. Заключение

Задачи о захвате в резонанс можно исследовать приближенно методом усреднения, если исходные дифференциальные уравнения содержат медленно меняющиеся коэффициенты. В общей ситуации это приближение не будет равномерным относительно других параметров, входящих в уравнения. Условия применимости используемого приближения выявляются при анализе роли дополнительных параметров. Критическими оказывается значения параметров, при которых приближенная область захвата схлопывается в линию. Вблизи таких значений используется другая форма метода усреднения, которая в главном члене асимптотики приводит либо к уравнению смещенного маятника, либо к системе уравнений главного резонанса. Вопрос об оценке точности описания области захвата в таком подходе остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Искусство асимптотики* // Вестник ЛГУ. 1977. №13. С. 5–12.
2. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. *Асимптотическая математика и синергетика.* М.: УРСС, 2004.
3. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989. 336 с.
4. Боголюбов Н.Н.,Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
5. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ, 1985.
6. Брюнинг Й., Доброхотов С. Ю., Потеряхин М. А. *Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами* // Матем. заметки. 2001. Т. 70, вып. 5. С. 660–669.
7. Чириков Б.В. *Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс* // Доклады АН СССР. 1959. Т.125, № 5. С. 1015–1018.
8. Калякин Л.А. *Асимптотики решений уравнений главного резонанса* // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 137, № 1. С.142–152.
9. Калякин Л.А. *Асимптотический анализ моделей авторезонанса* // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 5. С. 3–72.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Терия поля.* М.: Наука. 1973.

11. Милантьев В.П. *Циклотронный авторезонанс (к 50-летию открытия явления)* // Успехи физ. наук. 2013. Т.180, №8. С. 875–884.
12. Калякин Л.А. *Асимптотический анализ модели циклотронного гиромагнитного авторезонанса* // Вестник ЧелГУ, Физика. 2015 Вып. 21. С. 68–74.
13. K.S. Golovanivsky *Autoresonant Acceleration of Electrons at Nonlinear ECR in a Magnetic Field Which is Smoothly Growing in Time* // Physica Scripta. V. 22. 1980. P. 126–133.
14. K.S. Golovanivsky *The Gyromagnetic Autoresonance* // IEEE Transactions on plasma science. V. PS-1 1, № 1. 1983. P. 28–35.
15. A.P. Itin, A.I. Neishtadt, A.A. Vasiliev *Capture into resonance in dynamics of a charged partice in magnetic field and electrostatic wave* // Physica D. 2000 V. 141, № 4. P. 281–296.
16. R. Haberman, E.K. Ho *Boundary of the basin of attraction for weakly damped primery resonance* // J.Appl. Mech. 1990. V. 62, №3. P. 941–946.
17. O.M. Kiselev and S.G. Glebov *An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle–centre bifurcation point* // Nonlinearity. 2003. V.16, P. 327–362.
18. Нейштадт А.И. *Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром* // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, № 4. С. 621–632.
19. L.A. Kalyakin *Asymptotic Analysis of an Autoresonance Model* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2002. Vol. 9, №. 1. P. 84–95.
20. T. Armon and L. Friedland *Chirped resonance dynamics in phase space* // J. Plasma Phys. 2016. V. 82, 705820501.
21. T. Armon and L. Friedland *Capture into resonance and phase-space dynamics in an optical centrifuge* // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. 043406.
22. Калякин Л.А. *Асимптотический анализ модели гиромагнитного авторезонанса* // ЖВММФ. 2017 Т. 57, №2. С. 285–301.

Леонид Анатольевич Калякин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: klenru@mail.ru