

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ОБРАЗА КРУГА

Б.А. КЛИЩУК, Р.Р. САЛИМОВ

Аннотация. В работе рассматриваются Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля на комплексной плоскости при $p > 2$. Получена нижняя оценка площади образа круга при таких отображениях. Решена экстремальная проблема о минимизации функционала площади образа круга.

Ключевые слова: p -модуль семейства кривых, p -емкость конденсатора, квазиконформные отображения, Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля.

Mathematics Subject Classification: 30C65

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об искажении площадей при квазиконформных отображениях берет свое начало в работе Б. Боярского, см. [1]. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [2]–[4].

Впервые верхняя оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М.А. Лаврентьева, см. [5]. В монографии [6], см. предложение 3.7, получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также ранее в работах [7]–[8] были получены верхние оценки искажения площади круга для кольцевых и нижних Q -гомеоморфизмов. В данной работе получены нижние оценки площади образа круга при Q -гомеоморфизмах относительно p -модуля при $p > 2$.

Для простоты изложения ограничимся только плоским случаем. Напомним некоторые определения. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости \mathbb{C} . Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ , пишут $\varrho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \varrho(z) |dz| \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (1)$$

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда p -модулем семейства Γ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \varrho^p(z) dm(z). \quad (2)$$

Предположим, что D — область в комплексной плоскости \mathbb{C} , т.е. связное открытое подмножество \mathbb{C} и $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля, если

$$\mathcal{M}_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(z) \varrho^p(z) dm(z) \quad (3)$$

для любого семейства Γ кривых в D и любой допустимой функции ϱ для Γ .

Исследование неравенств типа (3) при $p = 2$ восходит к Л. Альфорсу (см., напр., теорему 3, разд. D, гл. I, [9]), а также О. Лехто и К. Вертанену (см. неравенство (6.6), разд. 6.3,

В.А. КЛИЩУК, Р.Р. САЛИМОВ, LOWER BOUNDS FOR THE AREA OF THE IMAGE OF A CIRCLE.

© Клищук Б.А., Салимов Р.Р. 2017.

Поступила 16 июня 2016 г.

гл. V в [10]). В работе В.Я. Гутлянского (совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Vuorinen) доказан многомерный аналог неравенства (3) для квазиконформных отображений (см. [11]).

Отметим также, что если в (3) функцию Q считать ограниченной п.в. некоторой постоянной $K \in [1, \infty)$ и $p = 2$, то приходим к классическим квазиконформным отображениям, которые были впервые введены в работах Грётча, Лаврентьева и Морри.

Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция. Для любого числа $r > 0$ обозначим

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$$

— среднее интегральное значение функции Q по окружности $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Теорема 1. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и $f : D \rightarrow D'$ — Q -гомеоморфизм относительно p -модуля, $p > 2$, $Q \in L^1_{\text{loc}}(D \setminus \{z_0\})$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \quad (4)$$

где $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Отметим, что при $p > 2$ и $Q(z) \leq K$ из теоремы 1 приходим к результату для круга из работы [12], см. лемму 7.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Приведем некоторые вспомогательные сведения о емкости конденсатора. Следуя работе [13], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором*. Конденсатор \mathcal{E} называется *кольцевым конденсатором*, если $\mathfrak{R} = A \setminus C$ — кольцевая область, т.е., если \mathfrak{R} — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{R}$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор \mathcal{E} называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D , то (fA, fC) также конденсатор в fD . Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Обозначим через $\mathcal{C}_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dm(z), \quad (5)$$

где

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \quad (6)$$

называют p -ёмкостью конденсатора \mathcal{E} . В дальнейшем мы будем использовать установленное в работе [14] равенство

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \mathcal{M}_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \quad (7)$$

где для множеств \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 и \mathcal{F} в \mathbb{C} , $\Delta(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2; \mathcal{F})$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 в \mathcal{F} .

Известно, что при $p \geq 1$, см. предложение 5 из [15],

$$\text{cap}_p \mathcal{E} \geq \frac{[\inf l(\sigma)]^p}{|A \setminus C|^{p-1}}. \quad (8)$$

Здесь $l(\sigma)$ — длина гладкой (бесконечно дифференцируемой) кривой σ , которая является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U , содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием \bar{U} в A , а точная нижняя грань берется по всем таким σ .

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор, где $A = \{z \in D : |z - z_0| < t + \Delta t\}$, $C = \{z \in D : |z - z_0| \leq t\}$, $t + \Delta t < d_0$. Тогда $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ — кольцевой конденсатор в D' и согласно (7) имеем равенство

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} = \mathcal{M}_p(\Delta(\partial fA, \partial fC; f(A \setminus C))). \quad (9)$$

В силу неравенства (8) получим

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} \geq \frac{[\inf l(\sigma)]^p}{|fA \setminus fC|^{p-1}}. \quad (10)$$

Здесь $l(\sigma)$ — длина гладкой (бесконечно дифференцируемой) кривой σ , которая является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U , содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием \bar{U} в A , а точная нижняя грань берется по всем таким σ .

С другой стороны, в силу определения Q -гомеоморфизма относительно p -модуля, имеем

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} \leq \int_D Q(z) \varrho^p(z) dm(z) \quad (11)$$

для любой $\varrho \in \text{adm } \Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)$.

Легко проверить, что функция

$$\varrho(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z - z_0| \ln \frac{t + \Delta t}{t}}, & z \in A \setminus C \\ 0, & z \notin A \setminus C \end{cases}$$

является допустимой для семейства $\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)$ и поэтому

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} \leq \frac{1}{\ln^p \left(\frac{t + \Delta t}{t} \right)} \int_R \frac{Q(z)}{|z - z_0|^p} dm(z), \quad (12)$$

где $R = \{z \in D : t \leq |z - z_0| \leq t + \Delta t\}$.

Комбинируя неравенства (10) и (12), получим

$$\frac{[\inf l(\sigma)]^p}{|fA \setminus fC|^{p-1}} \leq \frac{1}{\ln^p \left(\frac{t + \Delta t}{t} \right)} \int_R \frac{Q(z)}{|z - z_0|^p} dm(z). \quad (13)$$

По теореме Фубини имеем

$$\int_R \frac{Q(z)}{|z - z_0|^p} dm(z) = \int_t^{t + \Delta t} \frac{d\tau}{\tau^p} \int_{S(z_0, \tau)} Q(z) |dz| = 2\pi \int_t^{t + \Delta t} \tau^{1-p} q_{z_0}(\tau) d\tau, \quad (14)$$

где $q_{z_0}(\tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{S(z_0, \tau)} Q(z) |dz|$ и $S(z_0, \tau) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \tau\}$. Таким образом,

$$\inf l(\sigma) \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \frac{|fA \setminus fC|^{\frac{p-1}{p}}}{\ln\left(\frac{t+\Delta t}{t}\right)} \left[\int_t^{t+\Delta t} \tau^{1-p} q_{z_0}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (15)$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf l(\sigma) \geq 2\sqrt{\pi|fC|}, \quad (16)$$

получим

$$2\sqrt{\pi|fC|} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \frac{|fA \setminus fC|^{\frac{p-1}{p}}}{\ln\left(\frac{t+\Delta t}{t}\right)} \left[\int_t^{t+\Delta t} \tau^{1-p} q_{z_0}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (17)$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного гомеоморфизма f следующим образом

$$\Phi(t) = |fB(z_0, t)|, \quad (18)$$

где $B(z_0, t) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq t\}$. Тогда из соотношения (17) следует, что

$$2\sqrt{\pi\Phi(t)} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \frac{[\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}]^{\frac{p-1}{p}}}{\frac{\ln(t+\Delta t) - \ln t}{\Delta t}} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \tau^{1-p} q_{z_0}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (19)$$

Устремляя в неравенстве (19) $\Delta t \rightarrow 0$, и учитывая монотонное возрастание функции Φ по $t \in (0, d_0)$, для п.в. t имеем:

$$\frac{2\pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{2(p-1)}}(t)}. \quad (20)$$

Отсюда легко вытекает следующее неравенство:

$$\frac{2\pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \left(\frac{\Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(t)}{\frac{p-2}{2(p-1)}} \right)'. \quad (21)$$

Поскольку $p > 2$, то функция $g(t) = \frac{\Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(t)}{\frac{p-2}{2(p-1)}}$ является неубывающей на $(0, d_0)$, где $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Интегрируя обе части неравенства по $t \in [\varepsilon, r]$ и учитывая, что

$$\int_{\varepsilon}^r \left(\frac{\Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(t)}{\frac{p-2}{2(p-1)}} \right)' dt = \int_{\varepsilon}^r g'(t) dt \leq g(r) - g(\varepsilon) \leq \frac{\Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(r) - \Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(\varepsilon)}{\frac{p-2}{2(p-1)}}, \quad (22)$$

см., напр., теорему IV. 7.4 в [16], получаем

$$2\pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \int_{\varepsilon}^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \frac{\Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(r) - \Phi^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(\varepsilon)}{\frac{p-2}{2(p-1)}}. \quad (23)$$

Устремляя в неравенстве (23) $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к оценке

$$\Phi(r) \geq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}. \quad (24)$$

Наконец, обозначая в последнем неравенстве $\Phi(r) = |fB(z_0, r)|$, имеем

$$|fB(z_0, r)| \geq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \quad (25)$$

и тем самым завершаем доказательство теоремы 1.

3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ 1.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Воспользовавшись условием $q_{z_0}(t) \leq q_0 t^{-\alpha}$, оценим правую часть неравенства (4) и проведя элементарные преобразования приходим к следующему результату.

Следствие 1. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и $f : D \rightarrow D'$ — Q -гомеоморфизм относительно p -модуля при $p > 2$. Предположим, что функция Q удовлетворяет условию

$$q_{z_0}(t) \leq q_0 t^{-\alpha}, \quad q_0 \in (0, \infty), \quad \alpha \in [0, \infty) \quad (26)$$

для $z_0 \in D$ и п.в. всех $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$ имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq \pi^{-\frac{\alpha}{p-2}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} |B(z_0, r)|^{1+\frac{\alpha}{p-2}}. \quad (27)$$

В частности, полагая здесь $\alpha = 0$, получаем следующее заключение.

Следствие 2. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и $f : D \rightarrow D'$ — Q -гомеоморфизм относительно p -модуля, $p > 2$ и $q_{z_0}(t) \leq q_0 < \infty$ для п.в. $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq q_0^{\frac{2}{2-p}} |B(z_0, r)| \quad (28)$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $Q(z) \leq K < \infty$ для п.в. $z \in D$. Тогда имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq K^{\frac{2}{2-p}} |B(z_0, r)| \quad (29)$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Замечание 1. Следствие 3 является частным случаем результата Геринга для $E = B(z_0, r)$, см. лемму 7 в [12].

Следствие 4. Пусть $f : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ — Q -гомеоморфизм относительно p -модуля при $p > 2$. Предположим, что функция $Q(z)$ удовлетворяет условию

$$q(t) \leq \frac{q_0}{t \ln^{p-1} \frac{1}{t}}, \quad q_0 \in (0, \infty), \quad (30)$$

при п.в. всех $t \in (0, 1)$, где $q(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{S_t} Q(z) |dz|$ — среднее интегральное значение над окружностью $S_t = \{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$. Тогда при всех $r \in (0, 1)$ имеет место оценка

$$|fB_r| \geq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} \left(r \ln \frac{e}{r} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \quad (31)$$

где $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОЩАДИ

Пусть $Q : \mathbb{B} \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$q(t) \leq q_0, \quad q_0 \in (0, \infty) \quad (32)$$

при п.в. $t \in (0, 1)$, где $q(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{S_t} Q(z) |dz|$ — среднее интегральное значение над окружностью $S_t = \{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_0, p, \mathbb{B})$ — множество всех Q -гомеоморфизмов $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ относительно p -модуля при $p > 2$ с условием (32). Рассмотрим на классе \mathcal{H} функционал площади

$$\mathbf{S}_r(f) = |fB_r|. \quad (33)$$

Теорема 2. Для всех $r \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\min_{f \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_r(f) = \pi q_0^{\frac{2}{2-p}} r^2. \quad (34)$$

Доказательство. В силу следствия 2 немедленно вытекает оценка

$$\mathbf{S}_r(f) \geq \pi q_0^{\frac{2}{2-p}} r^2. \quad (35)$$

Укажем гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}$ на котором реализуется минимум функционала $\mathbf{S}_r(f)$. Пусть $f_0 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$, где

$$f_0(z) = q_0^{\frac{1}{2-p}} z \quad (36)$$

Очевидно, что равенство в (35) достигается на отображении f_0 . Осталось показать, что отображение, определенное таким образом, является Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля с $Q(z) = q_0$. Действительно,

$$l(z, f_0) = L(z, f_0) = q_0^{\frac{1}{2-p}}, \quad J(z, f_0) = q_0^{\frac{2}{2-p}} \quad (37)$$

и

$$K_{I,p}(z, f_0) = \frac{J(z, f_0)}{l^p(z, f_0)} = q_0. \quad (38)$$

По теореме 1.1 из работы [17] отображение f_0 является Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля с $Q(z) = K_{I,p}(z, f_0) = q_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский Б.В. *Гомеоморфные решения систем Белътрами* // Доклады Академии наук. 1955. Т. 102. С. 661–664.
2. F.W. Gehring, E. Reich *Area distortion under quasiconformal mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 388. 1966. P. 1–15.
3. K. Astala *Area distortion of quasiconformal mappings* // Acta Math. 1994. V. 173 P. 37–60.
4. A. Eremenko, D.H. Hamilton *On the area distortion by quasiconformal mappings* // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. Т. 123. P. 2793–2797.
5. Лаврентьев М.А. *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа* // М. 1962. 136 с.
6. В. Wojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane* // EMS Tracts in Mathematics, Vol. 19. EMS Publishing House. 2013. 214 p.
7. Ломако Т.В., Салимов Р.Р. *К теории экстремальных задач* // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. 2010. Т. 7, № 2. С. 264–269.
8. Салимов Р.Р. *Нижние оценки p -модуля и отображения класса Соболева* // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 6. С. 143–171.
9. Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям* // М. Мир. 1969. 133 с.
10. O. Lehto, K. Virtanen *Quasiconformal Mappings in the Plane* // New York etc. Springer. 1973. 258 p.
11. C.J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen *On conformal dilatation in space* // Intern. J. Math. and Math. Scie. 2003. V. 22. P. 1397–1420.
12. F.W. Gehring *Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space* // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969. Ann. of Math. Studies. 1971. V. 66. P. 175–193.
13. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 1969. V. 448. P. 1–40.
14. Шлык В.А. *О равенстве p -емкости и p -модуля* // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 216–221.
15. Кругликов В.И. *Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем* // Математический сборник. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.
16. Сакс С. *Теория интеграла* // Издательство ИЛ, М. 1949. 495 с.
17. R. Salimov, E. Sevost'yanov *The Poletskii and Vaisala inequalities for the mappings with (p, q) -distortion* // Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. V. 59, № 2. P. 217–231.

Богдан Анатольевич Клищук,
 Институт математики НАН Украины,
 ул. Терещенковская, 3,
 01601, г. Киев, Украина
 E-mail: bogdanklishchuk@mail.ru

Руслан Радикович Салимов,
 Институт математики НАН Украины,
 ул. Терещенковская, 3,
 01601, г. Киев, Украина
 E-mail: ruslan623@yandex.ru