ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 147-155.

УДК 512.518.66

ОБ АБСОЛЮТНОЙ ЧЕЗАРОВСКОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ В НУЛЕ

Ю.Х. ХАСАНОВ

Аннотация. В работе установлены некоторые признаки абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти–периодических в смысле Безиковича функций. Рассматривается случай, когда показатели Фурье имеют предельную точку в нуле, и в качестве структурной характеристики свойств исследуемой функции используется модуль усреднения высшего порядка.

Ключевые слова: абсолютная суммируемость, почти–периодические функции, ряды Фурье, показатели Фурье, предельная точка в нуле, модуль усреднения.

Mathematics Subject Classification: 42A24, 42A75

1. Введение

Числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

называется абсолютно суммируемым методом Чезаро порядка α $(-1 < \alpha < \infty)$ или $|C,\alpha|$–суммируемым, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| < \infty,$$

где

$$\sigma_n^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (A_n^\alpha)^{-1} A_{n-k}^\alpha a_k \ (n = 1, 2, \cdots), \ \ A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}.$$

Работы, исследующие абсолютную чезаровскую суммируемость произвольных ортогональных рядов и, в частности, тригонометрических рядов Фурье начали появляться в начале 60-х гг. прошлого века и принадлежали в основном советским и венгерским математикам [1]–[6]. Основные результаты этих исследований можно найти в работах [5] и [7].

По тригонометрической системе для периодической периода 2π функции $f(x) \in L_2$, имеющей ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Л. Лейндлер [1] установил некоторые достаточные условия $|C,\alpha|$-суммируемости рядов Фурье для различных значений $\alpha > -1$. В этой же работе установлены аналогичные результаты и для рядов по произвольным ортонормированным системам функций $\{\varphi(x)\}$,

Yu.Kh. Khasanov, On absolute Cesáro summablity of Fourier series for almost-periodic functions with limiting points at zero.

Поступила 16 октября 2015 г.

заданных на конечном отрезке [a,b]. Частный случай результата Лейндлера, соответствующий $|C,1|$–суммируемости почти всюду ряда Фурье, установлен в работе К. Тандори [2].

Аналоги результатов Лейндлера для функций $f(x) \in L_p$ $(1 < p \leqslant 2)$ в общих конструктивных либо структурных терминах рассмотрены в работах М.Ф. Тимана [3] и Л.В. Грепачевской [5]. Авторами установлено, что в случае монотонности коэффициентов Фурье, рассматриваемые условия являются и необходимыми. При $\alpha = 0, p = 2$ результаты Л.В. Грепачевской [5] получены С.Б. Стечкиным [4]. Отметим также, что Л.В. Грепачевская [5] установила необходимость $|C,\alpha|$-суммируемости рядов Фурье по системе Радемахера в случае монотонности их коэффициентов.

В этой работе приводим некоторые достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье почти–периодических в смысле Безиковича функций.

Через B_p $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначим пространство почти–периодических функций Безиковича, с нормой

$$\|f\|_{B_p} = \left\{\overline{M}\ [\ |f(x)|^p]\ \right\}^{1/p} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} < \infty,\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Определения и основные свойства функций из пространства B_p $(1 \leqslant p < \infty)$ можно найти в работах [9] или [10].

Пусть ряд Фурье почти–периодических в смысле Безиковича функций, имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{1}$$

где

$$A_n = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)e^{-i\lambda_n x}dx$$

– коэффициенты Фурье функций $f(x) \in B_p$, а $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – показатели Фурье (или спектр функции).

Некоторые достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье функций $f(x) \in B_p$ $(p \geq 1)$ изучены в работах [7], [11], [12]. В отличие от периодических, в случае почти-периодических функций, требуемые условия накладываются не только на гладкости функций, но и на поведение спектра рассматрываемой функции $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому рассматриваются два случая: когда спектр функции (показатели Фурье) имеет единственную предельную точку в бесконечности или в нуле. В работе [7] установлены некоторые признаки абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье функций $f(x) \in B_2$, когда ее спектр имеет единственную предельную точку в бесконечности:

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n,\ |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|\ (n = 1, 2, \cdots);\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty.$$

Настоящая заметка является продолжением работы [7] для рядов вида (1), когда показатели Фурье стремятся к нулю, точнее

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n,\ |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|\ (n = 1, 2, \cdots);\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = 0. \tag{2}$$

При этом в качестве структурной характеристики свойств функций используем величину $W_k(f;H)_{B_2}$ – модуль усреднения порядка k функции $f(x) \in B_2$, на $(-\infty, \infty)$

$$W_k(f;H)_{B_2} = \sup_{T \geq H} \|f_{T^k}(x)\|_{B_2}\,, \tag{3}$$

где $H > 0, k \in \mathbf{N}$,

$$f_{T^k}(x) = (2T)^{-k} \int\limits_{x-T}^{x+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int\limits_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) dt_k.$$

Можно проверить, что при $k = 1$ величина $W_k(f;H)$ обладает всеми свойствами аналогичными свойствам модуля непрерывности $\omega_1(f;h)$:

1. $W(f;H)$ монотонно убывает при $H \to +\infty$.

2. Если n натуральное число, то

$$W(f;nH) \leqslant nW(f;H),$$

а если λ – любое положительное число, то

$$W(f;\lambda H) \leqslant (\lambda + 1)W(f;H).$$

3. Функция $W(f;H)$ полуаддитивна, т.е для любых $T_1 > 0,\ T_2 > 0$

$$W(f;T_1 + T_2) \leqslant W(f;T_1) + W(f;T_2).$$

4. Функция $W(f;H)$ непрерывна на интервале $0 < H < \infty$.

Заметим, что величина $W_k(f;H)_{B_p}$, ранее нами использована при исследовании признаков абсолютной сходимости рядов Фурье функций $f(x) \in B_p,\ (1 \leqslant p < \infty)$ (см., например [13]).

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения, которые использованы в работе [7].

Лемма 1. *Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

сходится, то при $0 < \alpha < 1$*, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{\alpha})^{-1} u_n$$

суммируем методом $|C, \alpha|$.

Лемма 2. *Пусть равномерно сходящаяся последовательность измеримых, интегрируемых на каждом конечном отрезке функций* $\{f_n(x)\}$ *такова, что:*

А) $\{f_n(x)\} \in B_2,\ n = 1, 2, \ldots;$

Б) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots;$

В) $\overline{M}\{f_n(x)\} \leqslant K$ *(*K *– некоторая постоянная, не зависящая от* n*, тогда существует функция* $f(x) \in B_1$ *такая, что почти всюду*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{M}\{f_n(x)\} = \overline{M}\{f(x)\}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число и $N(\varepsilon)$ выбрано таким, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если τ есть $\frac{\varepsilon}{3}$–почти–период функции $f_N(x)$, то имеем

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant |f(x+\tau) - f_N(x+\tau)| + |f_N(x+\tau) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Так как множество $\frac{\varepsilon}{3}$–почти-периодов функции $f_N(x)$ относительно плотно и в силу последнего неравенства каждый $\frac{\varepsilon}{3}$–почти-период функции $f_N(x)$ является ε–почти-периодом функции $f(x)$, то отсюда вытекает

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Доказательство второй части леммы следует непосредственно из оценки

$$|\overline{M}\{f(x)\} - \overline{M}\{f_n(x)\}| \leqslant \overline{M}\{|f(x) - f_n(x)|\} \leqslant \sup_x |f(x) - f_n(x)|.$$

С помощью леммы 2 устанавливается следующее утверждение, доказательство которого приводится в работе [7].

Лемма 3. *Если задана последовательность функций* $\{\varphi_n(x)\} \in B_1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *и почти всюду* $\varphi_n(x) \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, *то из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}\{\varphi_n(x)\} < \infty$$

вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

почти всюду сходится.

2. Основные результаты

Теперь приводим основные результаты статьи. С этой целью сначала устанавливаем достаточные условия $|C, \alpha|$ – суммируемости рядов Фурье функций $f(x) \in B_2$ для отрицательных значений α. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям (2) и* $\lambda_n = O(n^{-\delta})$ $(\delta > 0)$. *Если при*

$$0 < \beta < 2,\ 0 \leqslant \gamma < 1,\ k > \frac{\gamma + 1 - \beta/2}{\beta\delta},\ \rho = \frac{\gamma + 1 - \beta/2}{\delta}$$

выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f; n)_{B_2} < \infty, \tag{4}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta}$$

суммируем методом $|C, -\gamma|$.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$$

есть ряд Фурье функции $f(x) \in B_2$. Так как

$$\frac{1}{(2T)^k} \int\limits_{x-T}^{x+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int\limits_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} e^{i\lambda_n t_k} dt_k = e^{i\lambda_n x} \left\{ \frac{sin\lambda_n T}{i\lambda_n T} \right\}^k,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x} \left\{ \frac{sin\lambda_n T}{i\lambda_n T} \right\}^k,$$

будет рядом Фурье функции $f_{T^k}(x)$.

Применяя равенство Парсеваля, получим

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| A_n \left\{ \frac{sin\lambda_n T}{i\lambda_n T} \right\}^k \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \| f_{T^k}(x) \|_{B_2}. \tag{5}$$

Пусть $\Lambda\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$$N_\nu = \{ n : 2^{-\nu}\pi \leqslant \lambda_n \leqslant 2^{-(\nu-1)}\pi \}$$

и $m(N_\nu)$ – означает набор показателей $\{\lambda_n\}$, которые попадают во множестве N_ν при каждом фиксированном ν. Тогда при $\nu = 0$, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\sum_{n \in N_\nu} |A_n|^\beta \leqslant \{ m(N_\nu) \}^{1-\frac{\beta}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^2 \right\}^{\frac{\beta}{2}}. \tag{6}$$

По условие теоремы $\lambda_n = O(n^{-\alpha})$ $(\alpha > 0)$, значит, имеет место
$K_1 \cdot \frac{1}{2^{\nu+1}} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant K_2 \cdot \frac{1}{2^\nu}$, или $K_1 \leqslant n^\alpha \leqslant K_2 2^{\nu+1}$,
где $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ – некоторые постоянные.
Следовательно, равномерно по ν, получим, $m(N_\nu) = O\{2^{\nu/\alpha}\}$.
Так как справедливо $\frac{\pi}{2^{\nu+1}} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{\pi}{2^\nu}$, то $\frac{\pi T}{2^{\nu+1}} \leqslant \lambda_n T \leqslant \frac{\pi T}{2^\nu}$.
Положив $T = 2^{\nu-1}$, получаем, что $\lambda_n T \leqslant \frac{\pi}{2}$. Отсюда имеем

$$sin\lambda_n T \geq \frac{2}{\pi} \lambda_n T.$$

Поэтому из соотношения (5) следует, что выполняется оценка

$$\left\{ \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \preceq W_k(f; 2^\nu)_{B_2}. \tag{7}$$

Так как $m(N_\nu) = O\{2^{\nu/\alpha}\}$, то с помощью оценки (7) неравенство (6) запишем в следующем виде

$$\sum_{n \in N_\nu} |A_n|^\beta \preceq 2^{\frac{\nu}{\alpha}(1-\frac{\beta}{2})} W_k^\beta(f; 2^\nu)_{B_2}.$$

Пусть $\gamma > 0$. Тогда применяя неравенство Гельдера, будем иметь

$$\sum_{n\in N_\nu}|A_n|^\beta n^\gamma \leqslant \left\{\sum_{n\in N_\nu} n^{2\cdot\frac{\gamma}{2-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{2}}\cdot\left\{\sum_{n\in N_\nu}|A_n|^2\right\}^{\frac{\beta}{2}} \preceq$$
$$\preceq 2^{\frac{\nu\gamma}{\alpha}}\cdot 2^{\nu\cdot\frac{1-\beta/2}{\alpha}}\cdot W_k^\beta(f;2^\nu)_{B_2} = 2^{\frac{\nu}{\alpha}(\gamma+1-\frac{\beta}{2})}\cdot W_k^\beta(f;2^\nu)_{B_2}.$$

Суммируя по ν последнее неравенство, находим, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in N_\nu}|A_n|^\beta n^\gamma \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\frac{\nu}{\alpha}(\gamma+1-\frac{\beta}{2})}\cdot W_k^\beta(f;2^\nu)_{B_2}.$$

Отсюда, принимая во внимание монотонность величины $W_k(f;H)_{B_2}$ $(H\to\infty)$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^\beta n^\gamma \preceq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\alpha}-1}\cdot W_k^\beta(f;n)_{B_2}.$$

В силу условия (4)и на основании леммы 1, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^\beta$$

является $|C,-\gamma|$ – суммируемым. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть спектр $\Lambda\{\lambda_n\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ функции $f(x)\in B_2$ удовлетворяет условиям (2) и $\lambda_n = O(n^{-\delta})$ $(\delta>0)$. Тогда при $-1<\alpha<\frac{1}{2}$, из условия*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(\frac{1}{2}-\alpha)}W_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}<\infty; \tag{8}$$

при $\alpha=\frac{1}{2}$, из условия

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}W_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}<\infty; \tag{9}$$

при $\alpha>\frac{1}{2}$, из условия

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}(\ln 2^\nu)^{-1/2}W_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}<\infty, \tag{10}$$

следует $|C,\alpha|$ – суммируемость почти всюду ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n exp(i\lambda_n x), \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n^\alpha(x)-\sigma_{n-1}^\alpha(x)| = \sum_{n=1}^{\infty}(nA_n^\alpha)^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}kA_k exp(i\lambda_k x)\right|, \tag{12}$$

где $\sigma_n^\alpha(x)$ – n-ые чезаровские средние порядка α $(\alpha>-1)$ и A_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)\in B_2$.

Согласно лемме 3, для доказательства сходимости почти всюду ряда (12) достаточно установить сходимость ряда

$$G(f;\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{M}\{|\sigma_n^{\alpha}(x)-\sigma_{n-1}^{\alpha}(x)|\}. \tag{13}$$

Известно [7], что

$$G(f;\alpha)\leqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\alpha+\frac{1}{2})}\left\{\left(\sum_{n=1}^{2^{\nu}-1}\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}+\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\sum_{k=n}^{2^{\nu+1}-1}\right)\frac{n^2A_n^2}{(n-k+1)^{2(1-\alpha)}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

1. Если $-1<\alpha<\frac{1}{2}$, то $2\alpha<1$ или $2(1-\alpha)>1$ Поэтому (см. например, [14], стр. 117),

$$\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}(k-n+1)^{2(\alpha-1)}<K, \tag{15}$$

где K – некоторая постоянная. Значит из соотношения (14) при $-1<\alpha<\frac{1}{2}$, принимая во внимание неравенство (15), получим

$$G(f;\alpha)\preceq\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\alpha+\frac{1}{2})}\sum_{k=0}^{\nu}2^{k+1}\left\{\sum_{n=2^{k}}^{2^{k+1}-1}A_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Переставляя порядок суммирования в последнем неравенстве, имеем

$$G(f;\alpha)\preceq\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\alpha-\frac{1}{2})}\left\{\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}A_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Из оценки (7) при любом $\nu=1,2,\ldots$ вытекает, что

$$\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}A_n^2\leqslant W_k^2(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}$$

или

$$\left\{\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}A_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant W_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}. \tag{17}$$

Отсюда, согласно неравенству (16) и в силу оценки (17), получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\alpha-\frac{1}{2})}\left\{\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}A_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\preceq\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(\frac{1}{2}-\alpha)}W_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}.$$

Из оценки (9) следует, что ряд (13) сходится почти всюду. Это означает, что в силу леммы 3 и ряд (12) сходится почти всюду. Следовательно, при $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ ряд (11) суммируем методом $|C,\alpha|$.

2. Пусть $\alpha=\frac{1}{2}$. Тогда из соотношения (14) получим

$$G(f;\alpha)\preceq\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}\left\{\left(\sum_{n=1}^{2^{\nu}-1}\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}+\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\sum_{k=n}^{2^{\nu+1}-1}\right)\frac{n^2A_n^2}{n-k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}\left\{\sum_{n=1}^{2^{\nu+1}-1}n^2A_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}\left\{\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{n=2^{k}}^{2^{k+1}-1}n^2A_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} 2^{k+1} \left\{ \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} A_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, применяя неравенство [15]

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\delta} \leqslant c_\beta \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} d_\nu \right)^{\delta}, \ 0 < \delta < 1, \ d_n \geq 0,$$

будем иметь

$$G(f;\alpha) \preceq \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \left\{ \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда применяя оценку (17), получим

$$G(f;\alpha) \preceq \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} W_k(f; \lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2},$$

что в силу леммы 1 и условия (9) влечет $|C; \frac{1}{2}|$суммируемости ряда (11).

3. Пусть теперь $\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда $2 - 2\alpha < 1$. Следовательно, после перестановки порядка суммирования и применения оценки

$$\sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{(n-\nu+1)^{2(1-\alpha)}} = O\left(2^{m(\alpha+\frac{1}{2})}\right),$$

из (14) получим

$$G(f;\alpha) \preceq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\alpha+\frac{1}{2})} 2^{n(\alpha+\frac{1}{2})} \left\{ \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A_\nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A_\nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

После применения неравенства [5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} A_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sum_{k=n}^{\infty} A_k^2)^{\frac{1}{2}}}{n(\ln n)^{1/2}}$$

будем иметь

$$G(f;\alpha) \preceq \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} (\ln n)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} (\ln 2^\nu)^{-\frac{1}{2}} W_k(f; \lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}.$$

Отсюда, из условия (10) вытекает сходимость почти всюду ряда (13), что в силу леммы 1, при $\alpha = \frac{1}{2}$ влечет $|C, \alpha|$–суммируемость ряда (11). Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Leindler *Uber die absolute summierbarkeit der Orthogonalreihen* // Acta Sci. Math. V.22. 1961. P. 243–268.
2. K. Tandori *Uber die orthogonalen funktionen IX. (Absolute summation)* // Acta Sci. Math. V.21. 1960. P. 292–299.
3. Тиман М.Ф. *Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье* // Сообщ. АН Груз. ССР. 26, №6. 1961. С. 641–646.
4. Стечкин С.Б. *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов* // Докл. АН СССР. Т.102, № 2. 1955. С. 37–40.
5. Грепачевская Л.В. *Абсолютная суммируемость ортогональных рядов* // Матем. сб. Т.65(107), № 3. 1964. С. 370–389.
6. G. Sunouchi *On the absolute summability of Fourier series* // Journ.of the Math.Soc. of Japan. V.1, № 2. 1949. P. 57–65.
7. Хасанов Ю.Х. *Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций* // Anal.Math. V.39. 2013. P. 259–270.
8. Барон С.А. *Введение в теорию суммируемости рядов*. Таллинн: Валгус. 1977. 280 с.
9. A. Besicovitch *Almost periodic functions*. Cembridge. 1932. 180 p.
10. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции*. М.: ГИТТЛ. 1953. 396 с.
11. Тиман М.Ф., Хасанов Ю.Х. *Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича* // Укр.мат.журн. Т.61, № 9. 2009. С. 1267–1276.
12. Хасанов Ю.Х. *Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций* //Укр.мат.журн. Т.65, № 12. 2013. С. 1716–1722.
13. Хасанов Ю.Х. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций* // Мат.заметки. Т.94, № 5. 2013. С. 745–756.
14. Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов*. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 360 с.
15. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. *Неравенства*. М.: ГИИЛ. 1948. 456 с.

Юсуфали Хасанович Хасанов,
Российско-Таджикский (славянский) университет,
ул. М. Турсунзода, 30,
734025, г. Душанбе, Республика Таджикистан
E-mail: `yukhas60@mail.ru`