

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_{xx} + Q(x)u - P(u) = 0$, НЕ ИМЕЮЩИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Г.Л. АЛФИМОВ, П.П. КИЗИН

Аннотация. Работа посвящена изучению задачи Коши для уравнения $u_{xx} + Q(x)u - P(u) = 0$, где $Q(x)$ – π -периодическая функция. Известно, что для достаточно широкого класса нелинейностей $P(u)$ «большая часть» решений задачи Коши для этого уравнения является сингулярными, то есть стремящимися к бесконечности в некоторой точке числовой прямой. Ранее в случае $P(u) = u^3$ это обстоятельство позволило предложить подход для полного описания решений этого уравнения, ограниченных на всей числовой прямой. Одним из элементов этого подхода является изучение множества \mathcal{U}_L^+ , определяемого как множество тех точек (u_*, u'_*) на плоскости начальных данных, для которых решение задачи Коши $u(0) = u_*$, $u_x(0) = u'_*$ не является сингулярным на промежутке $[0; L]$. В данной работе доказывается ряд утверждений о множестве \mathcal{U}_L^+ , и на их основании классифицируются возможные типы геометрии таких множеств. Представленные результаты численного счета хорошо согласуются с теоретическими утверждениями.

Ключевые слова: уравнения с периодическими коэффициентами, сингулярные решения, нелинейное уравнение Шредингера.

Mathematics Subject Classification: 34L30, 34C11, 35Q55, 37B10

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение

$$u_{xx} + Q(x)u - P(u) = 0 \tag{1}$$

возникает в многочисленных задачах различной физической природы. В частности, оно описывает стационарные распределения поля в неоднородном волноводе [1] и структуры, возникающие в конденсате Бозе-Эйнштейна [2]. Соответственно, вопрос о возможных типах решений этого уравнения представляет значительный интерес для различных физических приложений.

Несколько лет назад для изучения структур, описываемых уравнением (1), было предложено использовать следующее обстоятельство [3]. При некоторых ограничениях на нелинейность $P(u)$ «большая часть» решений задачи Коши для уравнения (1) оказывается *сингулярными*, то есть стремящимися к бесконечности в некоторой точке числовой прямой. Соответственно, множество решений, ограниченных на всей числовой прямой (и наиболее интересных для физических приложений), оказывается значительно более «бедным». Общее представление об этом множестве можно получить путем численного решения задачи Коши для большой области на плоскости начальных данных (u, u_x) . В случае, когда $Q(x)$

G.L. ALFIMOV, P.P. KIZIN, ON SOLUTIONS OF CAUCHY PROBLEM FOR EQUATION $u_{xx} + Q(x)u - P(u) = 0$ WITHOUT SINGULARITIES IN A GIVEN INTERVAL.

© Алфимов Г.Л., Кизин П.П., 2016.

Поступила 17 марта 2016 г.

является периодической функцией, возможно более детальное исследование этого множества при помощи отображения Пуанкаре [4], порождаемого уравнением (1). При этом для описания множества несингулярных решений в терминах отображения Пуанкаре удастся применить методы символической динамики.

В работе [3] данный подход был реализован для случая, когда $P(u) = u^3$ и $Q(x) = \omega - A \cos 2x$, где A и ω – действительные параметры. Было показано, что при выполнении трех достаточных условий существует гомеоморфизм между множеством всех ограниченных решений уравнения (1) и множеством всех би-инфинитных последовательностей, составленных из символов некоторого конечного алфавита. При помощи численного счета были выделены области на плоскости параметров (ω, A) , в которых эти условия выполняются. В дальнейшем этот подход был применен к случаю, когда нелинейность имеет вид $R(x)u^3$, где $R(x)$ – также периодическая функция [5].

Одним из основных понятий, используемых при реализации этого подхода, является множество начальных условий задачи Коши, $(u(0), u_x(0))$, таких, что соответствующие решения уравнения (1) остаются ограниченными на некотором промежутке S . В работе [3] это множество обозначалось \mathcal{U}_L^+ , если $S = [0; L]$ и \mathcal{U}_L^- , если $S = [-L; 0]$. В этих терминах начальные условия задачи Коши для решений, определенных на всей числовой оси, принадлежат множеству $\mathcal{U}_\infty = \mathcal{U}_\infty^+ \cap \mathcal{U}_\infty^-$. Если $Q(x)$ является π -периодической функцией, структура множества \mathcal{U}_∞ может быть описана при помощи множеств \mathcal{U}_π^+ , \mathcal{U}_π^- и действия на них отображения Пуанкаре.

Таким образом, в случае, когда $Q(x)$ является π -периодической функцией, вопрос о возможной геометрии множеств \mathcal{U}_π^+ и \mathcal{U}_π^- представляет значительный интерес. Настоящая работа посвящена исследованию возможных типов этих множеств при достаточно типичных предположениях относительно нелинейности $P(u)$.

Работа имеет следующую структуру. В секции 2 представлены основные определения, используемые в работе, и сформулированы ограничения, накладываемые на неоднородность $Q(x)$ и нелинейность $P(u)$. В секции 3 доказаны некоторые технические утверждения. Одним из них является утверждение о непрерывной зависимости точки сингулярности решения от начальных данных задачи Коши. Это утверждение уточняет классическое утверждение о полунепрерывности границ интервала существования решения ([6], глава 5) для заданного класса уравнений. В секции 4 утверждения секции 3 используются для доказательства основных теорем работы. Основным результатом статьи является, представленная в секции 4, Теорема 3, налагающая запрет на существование «дырок» у множеств \mathcal{U}_π^\pm и на существование ограниченных компонент связности у этих множеств. Секция 5 базируется на результатах секции 4, и посвящена описанию возможных форм множества \mathcal{U}_π^+ . В секции 6 представлены результаты численных исследований множеств \mathcal{U}_π^+ для некоторых случаев нелинейности $P(u)$, представляющих интерес для приложений. Наконец, в Заключение 7 сформулированы выводы и намечены некоторые направления развития полученных результатов.

2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

На протяжении всей работы мы будем считать, что функция $Q(x)$ удовлетворяет следующим требованиям

$$(Q1) \quad Q(x) \in C^1(\mathbb{R});$$

$$(Q2) \quad Q(-x) = Q(x);$$

$$(Q3) \quad Q(x + \pi) = Q(x).$$

Далее, мы будем предполагать, что на функцию $P(u)$ наложены следующие ограничения

(P1) $P(u) \in C^1(\mathbb{R})$;

(P2) существуют такие $C, \lambda, A > 0$, что $P(A) > 0$, и при $u > A$ выполняется неравенство

$$P_u(u) > Cu^\lambda. \quad (2)$$

Замечание. Из условия (P2) следует, что константу C в (2) можно выбрать такой, что одновременно с (2) при $u > A$ выполняется неравенство

$$P(u) > Cu^{\lambda+1}. \quad (3)$$

В дальнейшем мы будем полагать C, λ, A такими, что выполняются одновременно неравенства (2) и (3).

Далее, в ряде утверждений будет предполагаться, что

(P3) функция $-P(-u)$ удовлетворяет условию (P2).

Введем следующие определения.

Сингулярные решения. Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (1) сингулярно, если существует значение $x = x_1$, такое, что $\lim_{x \rightarrow x_1} u(x) = \pm\infty$. В такой ситуации мы будем говорить, что $u(x)$ *коллапсирует к $+\infty$* в точке $x = x_1$, если $\lim_{x \rightarrow x_1} u(x) = +\infty$, или что $u(x)$ *коллапсирует к $-\infty$* в точке $x = x_1$, если $\lim_{x \rightarrow x_1} u(x) = -\infty$.

Функции $h^\pm(x, u, u')$. Введем функцию $h^+ : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $h^+(x_0, u_0, u'_0) = x_1 - x_0$, если решение $u(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $u(x_0) = u_0$ и $u_x(x_0) = u'_0$ коллапсирует (неважно, к $+\infty$ или $-\infty$) в точке $x = x_1$, $x_1 > x_0$. При этом будем полагать, что $h^+(x_0, u_0, u'_0) = +\infty$, если для начальных данных (u_0, u'_0) в точке $x = x_0$ решение задачи Коши не коллапсирует ни при каком $x > x_0$. Аналогично, определим функцию $h^- : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, положив, что $h^-(x_0, u_0, u'_0) = x_0 - x_1$ если решение $u(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $u(x_0) = u_0$ и $u_x(x_0) = u'_0$ коллапсирует в точке $x = x_1$, $x_1 < x_0$.

Пример. Пусть $Q(x) \equiv 0$ и $P(u) = u^3$. Очевидно, такой выбор $Q(x)$ и $P(u)$ удовлетворяет условиям (Q1)-(Q3) и (P1)-(P2). Решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = u_x(0) = \sqrt{2}$ имеет вид

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{1-x}.$$

Соответственно, имеем, что $u(x)$ коллапсирует к $+\infty$ в точке $x = 1$, при этом $h^+(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1$. С другой стороны, $u(x)$ определена на всей полуоси $x < 0$, поэтому $h^-(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = +\infty$.

Укажем некоторые свойства функций $h^\pm(x, u, u')$.

- В силу (Q3) имеем $h^\pm : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, где \mathbb{S}^1 – окружность.
- В силу (Q2) имеем $h^+(0, u, u') = h^-(0, u, -u')$.
- Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1), тогда для $\alpha \in \mathbb{R}$

$$h^+(x_0 + \alpha, u(x_0 + \alpha), u_x(x_0 + \alpha)) = h^+(x_0, u(x_0), u_x(x_0)) - \alpha,$$

$$h^-(x_0 + \alpha, u(x_0 + \alpha), u_x(x_0 + \alpha)) = h^-(x_0, u(x_0), u_x(x_0)) + \alpha.$$

Особую роль в дальнейшем изложении будут играть функции $h^\pm(x, u, u')$ при $x = 0$, рассматриваемые как функции u и u' . Соответственно, введем обозначение

$$h_0^\pm(u, u') \equiv h^\pm(0, u, u').$$

Функции $H^\pm(u, u', \Lambda)$. Положим, что $H^+(u_0, u'_0, \Lambda) = x_1$, если решение $u(x)$ задачи Коши для уравнения

$$u_{xx} + \Lambda u - P(u) = 0 \quad (4)$$

с начальными условиями $u(0) = u_0, u_x(0) = u'_0$ коллапсирует в точке $x = x_1, x_1 > 0$. Функция $H^-(u_0, u'_0, \Lambda)$ определяется аналогично, $H^-(u_0, u'_0, \Lambda) = -x_1$, если решение $u(x)$ уравнения (4) с начальными условиями $u(0) = u_0, u_x(0) = u'_0$ коллапсирует в точке $x = x_1, x_1 < 0$.

Для дальнейшего оказывается важным, что функции $H^\pm(u, u', \Lambda)$ могут быть выражены при помощи квадратур (см. Лемму 2) и являются непрерывными.

Множества \mathcal{U}_L^\pm и \mathcal{U}_L . Определим множества \mathcal{U}_L^\pm и \mathcal{U}_L следующим образом:

$$\mathcal{U}_L^+ = \{(u_*, u'_*) \mid h_0^+(u_*, u'_*) > L\},$$

$$\mathcal{U}_L^- = \{(u_*, u'_*) \mid h_0^-(u_*, u'_*) > L\},$$

$$\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_L^+ \cap \mathcal{U}_L^-.$$

Другими словами, множество \mathcal{U}_L^\pm состоит из тех точек плоскости начальных данных (u, u_x) , которые порождают решения, коллапсирующие «позже», чем заданное значение L (или вовсе не коллапсирующие).

Укажем некоторые свойства множеств \mathcal{U}_L^\pm .

- Обозначим I отображение симметрии относительно оси u в плоскости (u, u_x) . В силу четности функции $Q(x)$ (свойство (Q2)) справедливо соотношение $\mathcal{U}_L^+ = I[\mathcal{U}_L^-]$.
- Если $P(u)$ является нечетной функцией, то множества \mathcal{U}_L^+ и \mathcal{U}_L^- симметричны друг другу относительно начала координат.

Отображение Пуанкаре. Определим отображение Пуанкаре $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, порожденное уравнением (1), следующим образом (см. [4], глава 1)

$$T \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\pi) \\ u_x(\pi) \end{pmatrix},$$

где $u(x)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = u_0, u_x(0) = u'_0$.

Укажем некоторые свойства отображения T и множеств \mathcal{U}_π^\pm .

- T является диффеоморфизмом, сохраняющим площади.
- T определено только на множестве \mathcal{U}_π^+ . Соответственно, обратное отображение T^{-1} определено на множестве \mathcal{U}_π^- , причем

$$T\mathcal{U}_\pi^+ = \mathcal{U}_\pi^-, \quad T^{-1}\mathcal{U}_\pi^- = \mathcal{U}_\pi^+.$$

- Отображение IT , где I – отображение симметрии относительно оси u , см. выше, является автоморфизмом множества \mathcal{U}_π^+ .

На протяжении всей статьи открытый круг с центром в точке (u_0, u'_0) и радиусом ε будет обозначаться $V_\varepsilon(u_0, u'_0)$

$$V_\varepsilon(u_0, u'_0) = \{(u_*, u'_*) \mid (u_* - u_0)^2 + (u'_* - u'_0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $h^+(x, u, u')$ И $h^-(x, u, u')$

3.1. Предельные свойства функций $h_0^+(u, u')$ и $h_0^-(u, u')$. Определим функцию $H_0(u, \Lambda)$ формулой

$$H_0(u, \Lambda) \equiv \int_u^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{F(u, \xi) - \Lambda(\xi^2 - u^2)}}, \quad (5)$$

где

$$F(u, \xi) \equiv 2 \int_u^\xi P(\eta) d\eta. \quad (6)$$

Лемма 1. Пусть $F(u, \xi)$ задана формулой (6), а $P(u)$ удовлетворяет условиям (P1)-(P2). Тогда при любом $\Lambda \in \mathbb{R}$ существует достаточно большое $A_1 > 0$, такое, что при $u > A_1$ функция $H_0(u, \Lambda)$ корректно определена и справедливо утверждение

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} H_0(u, \Lambda) = 0.$$

Доказательство. Введем обозначение $Z(u, \xi) \equiv F(u, \xi) - \Lambda(\xi^2 - u^2)$. Очевидно, $Z(u, u) = 0$, и интеграл (5) имеет особенность в точке $\xi = u$. Вместе с тем в силу свойства (P2), при достаточно больших значениях u выполняется неравенство $Z_\xi(u, u) = 2P(u) - 2\Lambda u > 0$. Следовательно, при таких значениях u верно, что нуль функции $Z(u, \xi)$ в точке $\xi = u$ является простым, и особенность интеграла (5) в точке $\xi = u$ является интегрируемой. Далее заметим, что при $\xi > u$ и $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\xi^2 - u^2 < \frac{2}{u^\lambda(\lambda + 2)} \cdot (\xi^{2+\lambda} - u^{2+\lambda}).$$

Поэтому, во-первых, при достаточно больших значениях u и при $\xi > u$ функция $Z(u, \xi)$ положительна, а во-вторых, справедлива оценка

$$\frac{1}{\sqrt{Z(u, \xi)}} < \frac{\sqrt{\lambda + 2}}{\sqrt{C(\xi^{2+\lambda} - u^{2+\lambda}) - \Lambda(\lambda + 2)(\xi^2 - u^2)}} < \frac{1}{C_1(u, \Lambda)\sqrt{\xi^{2+\lambda} - u^{2+\lambda}}},$$

где

$$C_1(u, \Lambda) = \sqrt{\frac{1}{\lambda + 2} \cdot \left(C - \frac{2\Lambda}{u^\lambda} \right)}.$$

После замены $\xi = u\zeta$ получаем

$$0 < H_0(u, \Lambda) < \frac{1}{C_1(u, \Lambda)u^{\lambda/2}} \int_1^{+\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^{2+\lambda} - 1}}.$$

Из последнего неравенства и следует утверждение леммы. \square

Введем обозначения

$$m = \min_{x \in [0; \pi]} Q(x), \quad M = \max_{x \in [0; \pi]} Q(x).$$

Лемма 2. Пусть $Q(x)$ и $P(u)$ удовлетворяют условиям (Q1)-(Q3) и (P1)-(P2) соответственно. Тогда существует $A_2 > 0$, такое, что для начальных данных задачи Коши для уравнения (1), находящихся в секторе

$$R^+(A_2) = \{(u_*, u'_*) \mid u_* \geq A_2, u'_* \geq 0\},$$

решение уравнения (1) коллапсирует к $+\infty$, при этом $\lim_{u \rightarrow +\infty} h_0^+(u, u') = 0$ равномерно по u' , и верна оценка

$$0 < h_0^+(u, u') \leq H_0(u, M). \quad (7)$$

Доказательство. Возьмем точку $(u_0, u'_0) \in R^+(A_2)$. Решение задачи Коши для уравнения (4), где мы положим $\Lambda = M$, с начальными данными $u(0) = u_0$, $u_x(0) = u'_0$ записывается в неявном виде

$$x = \pm \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{F(u_0, \xi) - M(\xi^2 - u_0^2) + (u'_0)^2}}, \quad (8)$$

где знак «+» или «-» перед интегралом соответствует знаку u'_0 . Пусть $u_0 > A_1$ из Леммы 1 и $u'_0 \geq 0$. В этом случае знаменатель в (8) не обращается в нуль при $\xi > u_0$, и интеграл

$$x_1 = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{F(u_0, \xi) - M(\xi^2 - u_0^2) + (u'_0)^2}} \quad (9)$$

сходится. При этом соответствующее решение $u(x)$ задачи Коши для уравнения (4) коллапсирует к $+\infty$, а для точки сингулярности x_1 справедлива оценка

$$x_1 \leq \int_{u_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{F(u_0, \xi) - M(\xi^2 - u_0^2)}} \equiv H_0(u_0, M).$$

Оценим функцию $h_0^+(u, u')$ в точке (u_0, u'_0) . Перепишем уравнения (1) и (4) в следующем виде

$$u_{xx} - f(x, u) = 0, \quad f(x, u) = P(u) - Q(x)u, \quad (10)$$

$$u_{xx} - \check{f}(u) = 0, \quad \check{f}(u) = P(u) - Mu. \quad (11)$$

Рассмотрим задачи Коши $u(0) = u_0, u_x(0) = u'_0$ для уравнений (10) и (11). Обозначим решения этих задач соответственно $u(x)$ и $\check{u}(x)$. По построению, $f(x, u) \geq \check{f}(u)$ при всех x и $u > 0$. В силу свойства (P2), имеется $A_3 > 0$, такое, что при $u > A_3$ функция $\check{f}(u)$ является монотонно возрастающей. При $u_0 \geq A_2 > \max\{A_1, A_3\}$ и $u'_0 \geq 0$ по Лемме сравнения (см. прил. А) имеем $u(x) \geq \check{u}(x)$ при $x \geq 0$. Из этого следует, что во-первых $u(x)$ сингулярно, а во-вторых $h_0^+(u_0, u'_0) \leq H_0(u_0, M)$, что доказывает утверждение леммы. \square

Следствие. Пусть $Q(x)$ и $P(u)$ удовлетворяют условиям (Q1)-(Q3) и (P1)-(P2) соответственно. Тогда существует $A_2 > 0$, такое, что для начальных данных задачи Коши для уравнения (1), находящихся в секторе

$$R^-(A_2) = \{(u_*, u'_*) \mid u_* \geq A_2, u'_* \leq 0\},$$

верна оценка

$$0 < h_0^-(u, u') \leq H_0(u, M). \quad (12)$$

Доказательство. Утверждение следует из обратимости уравнения (1), которая имеет место в силу свойства (Q2). \square

Лемма 3. Пусть $Q(x)$ и $P(u)$ удовлетворяют условиям (Q1)-(Q3) и (P1), (P3) соответственно. Тогда существует $\tilde{A}_2 < 0$, такое, что для начальных данных задачи Коши для уравнения (1), находящихся в секторе

$$L^-(\tilde{A}_2) = \{(u_*, u'_*) \mid u_* \leq \tilde{A}_2, u'_* \leq 0\},$$

решение уравнения (1) коллапсирует к $-\infty$, при этом $\lim_{u \rightarrow -\infty} h_0^+(u, u') = 0$ равномерно по u' .

Доказательство. Утверждение следует из Леммы 2 после замены $u \rightarrow -u$ в уравнении (1). \square

Следствие. Пусть $Q(x)$ и $P(u)$ удовлетворяют условиям (Q1)-(Q3) и (P1), (P3) соответственно. Тогда существует $\tilde{A}_2 < 0$, такое, что для начальных данных задачи Коши для уравнения (1), находящихся в секторе

$$L^+(\tilde{A}_2) = \{(u_*, u'_*) \mid u_* \leq \tilde{A}_2, u'_* \geq 0\},$$

решение уравнения (1) коллапсирует к $-\infty$, при этом $\lim_{u \rightarrow -\infty} h_0^-(u, u') = 0$ равномерно по u' .

Полученные результаты, характеризующие поведение функций $h_0^\pm(u, u')$ на плоскости (u, u_x) при $u \rightarrow \pm\infty$, схематически представлены на рис. 1.

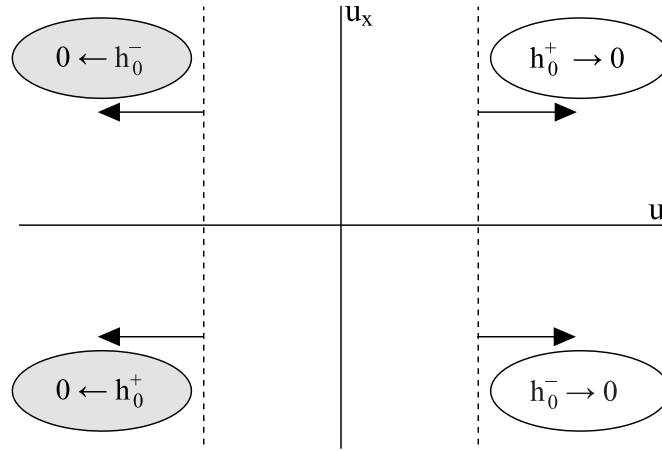


РИС. 1. Поведение функций $h_0^\pm(u, u')$ на плоскости (u, u_x) . Белый овал: на $P(u)$ накладываются условия (P1), (P2). Серый овал – условия (P1), (P3). Пунктирные линии указывают на равномерность стремления к нулю функций $h_0^\pm(u, u')$ при $u \rightarrow \pm\infty$

3.2. Непрерывность функций $h_0^+(u, u')$ и $h_0^-(u, u')$.

Лемма 4. Пусть решение $u(x)$ уравнения (1) коллапсирует к $+\infty$ в точке $x = x_1$ при приближении к этой точке слева. Тогда:

(а) существует полукрестность $(x_1 - \Delta; x_1)$ точки $x = x_1$, такая, что для $\xi \in (x_1 - \Delta; x_1)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} H^+(u(\xi), u_x(\xi), m(\xi)) &< x_1 - \xi = \\ &= h^+(\xi, u(\xi), u_x(\xi)) < H^+(u(\xi), u_x(\xi), M(\xi)), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$m(\xi) = \min_{x \in [\xi; x_1]} Q(x), \quad M(\xi) = \max_{x \in [\xi; x_1]} Q(x);$$

(б) при любом $\xi \in (x_1 - \Delta; x_1)$ существует окрестность $V_\varepsilon(u(\xi), u_x(\xi))$, такая, что в каждой точке этой окрестности значения

$$H^+(u, u', m(\xi)), \quad h^+(\xi, u, u'), \quad H^+(u, u', M(\xi))$$

конечны и

$$H^+(u, u', m(\xi)) \leq h^+(\xi, u, u') \leq H^+(u, u', M(\xi)). \quad (14)$$

Доказательство. (а) Пусть ξ – некоторое значение, $\xi \in (0; x_1)$. Обозначим $u_0 = u(\xi)$, $u'_0 = u_x(\xi)$. Запишем уравнение (1) в виде

$$u_{xx} - f(x, u) = 0, \quad f(x, u) = P(u) - Q(x)u \quad (15)$$

и рассмотрим следующие уравнения

$$u_{xx} - \hat{f}(\xi, u) = 0, \quad \hat{f}(\xi, u) = P(u) - m(\xi)u, \quad (16)$$

$$u_{xx} - \check{f}(\xi, u) = 0, \quad \check{f}(\xi, u) = P(u) - M(\xi)u. \quad (17)$$

Обозначим $\hat{u}(x)$, $\check{u}(x)$ соответственно решения задач Коши для (16), (17) с начальными условиями $u(\xi) = u_0$, $u_x(\xi) = u'_0$.

По условию, решение $u(x)$ коллапсирует к $+\infty$ в точке $x = x_1$. Это означает, что $u(x)$ определено на $x \in [\xi; x_1)$, и, приближая ξ к x_1 , можно добиться того, чтобы решение $u(x)$ на промежутке $x \in [\xi; x_1)$ было бóльшим A из условия (P2). Тогда справедливо неравенство

$$\hat{f}(\xi, u) \geq f(x, u),$$

а функция $f(\xi, u)$ является монотонно возрастающей по u . По Лемме сравнения (см. прил. А) при $x \geq \xi$ имеем $\hat{u}(x) \geq u(x)$. Это означает, что $H^+(u_0, u'_0, m(\xi))$ конечно, решение $\hat{u}(x)$ коллапсирует к $+\infty$ и

$$H^+(u_0, u'_0, m(\xi)) \leq h^+(\xi, u_0, u'_0). \quad (18)$$

В силу того, что $\lim_{\xi \rightarrow x_1} (m(\xi) - M(\xi)) = 0$, а функция $H^+(u, u', \Lambda)$ является непрерывной, можно выбрать ξ настолько близким к x_1 , чтобы решение $\check{u}(x)$ также коллапсировало к $+\infty$. В этом случае значение $H^+(u_0, u'_0, M(\xi))$ также конечно. Применим Лемму сравнения к уравнениям (15) и (17). В результате заключаем, что при $x \geq \xi$ справедливо неравенство $\check{u}(x) \leq u(x)$ и

$$h^+(\xi, u_0, u'_0) \leq H^+(u_0, u'_0, M(\xi)). \quad (19)$$

Комбинируя (18) и (19), получаем двойное неравенство (13), которое выполняется для всех ξ , принадлежащих достаточно малой левой полуокрестности x_1 .

(б) Из того, что функция $H^+(u, u', \Lambda)$ является непрерывной, следует, что $H^+(u, u', M(\xi))$ конечно не только в точке $u_0 = u(\xi)$, $u'_0 = u_x(\xi)$, но и в некоторой окрестности $V_\varepsilon(u(\xi), u_x(\xi))$. Применяя лемму сравнения к решениям задачи Коши с начальными условиями из окрестности $V_\varepsilon(u(\xi), u_x(\xi))$ для уравнений (15), (16), (17), получаем, что все три решения коллапсируют, причем для точек сингулярности выполняется неравенство (14). \square

Следствие. Если решение $u(x)$ уравнения (1) коллапсирует к $-\infty$ в точке $x = x_1$, приближаясь к ней слева, утверждения Леммы 4 остаются справедливыми, с точностью до перемены местами $m(\xi)$ и $M(\xi)$ в формулах (13) и (14).

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству Леммы 4.

Лемма 5. Пусть точка (u_0, u'_0) такова, что $h_0^+(u_0, u'_0) = x_1 < +\infty$. Тогда $h_0^+(u, u')$ непрерывна в точке (u_0, u'_0) .

Доказательство. Имеем, что решение $u(x)$ задачи Коши $u(0) = u_0$, $u_x(0) = u'_0$ для уравнения (1) коллапсирует к $+\infty$ в точке $x = x_1$. В силу Леммы 4, пункт (а), существует такое Δ , что для любого $\xi \in (x_1 - \Delta; x_1)$ выполняется неравенство

$$H^+(u(\xi), u_x(\xi), m(\xi)) \leq h^+(\xi, u(\xi), u_x(\xi)) \leq H^+(u(\xi), u_x(\xi), M(\xi)), \quad (20)$$

где

$$m(\xi) = \min_{x \in [\xi; x_1]} Q(x), \quad M(\xi) = \max_{x \in [\xi; x_1]} Q(x).$$

В силу пункта (б) Леммы 4, для любого $\xi \in (x_1 - \Delta; x_1)$ существует окрестность $V_{\varepsilon_1}(u(\xi), u_x(\xi))$, такая, что для любой точки из этой окрестности справедлива оценка

$$-H^+(u, u', M(\xi)) \leq -h^+(\xi, u, u') \leq -H^+(u, u', m(\xi)). \quad (21)$$

Складывая (20) и (21), получаем

$$\begin{aligned} H^+(u(\xi), u_x(\xi), m(\xi)) - H^+(u, u', M(\xi)) &\leq h^+(\xi, u(\xi), u_x(\xi)) - h^+(\xi, u, u') \leq \\ &\leq H^+(u(\xi), u_x(\xi), M(\xi)) - H^+(u, u', m(\xi)). \end{aligned}$$

В силу того, что $\lim_{\xi \rightarrow x_1} (m(\xi) - M(\xi)) = 0$, и непрерывности функции $H^+(u, u', \Lambda)$, для любого $\delta > 0$ существуют такие ε_2 , $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $\eta \in (x_1 - \Delta; x_1)$, что для любой точки из $V_{\varepsilon_2}(u(\eta), u_x(\eta))$ справедливы оценки

$$-\delta < H^+(u(\eta), u_x(\eta), m(\eta)) - H^+(u, u', M(\eta)) < \delta,$$

$$-\delta < H^+(u(\eta), u_x(\eta), M(\eta)) - H^+(u, u', m(\eta)) < \delta.$$

Это означает, что для любой точки из $V_{\varepsilon_2}(u(\eta), u_x(\eta))$ выполняется

$$|h^+(\eta, u(\eta), u_x(\eta)) - h^+(\eta, u, u')| < \delta,$$

то есть $h^+(\eta, u, u')$ определена в некоторой окрестности точки $(u(\eta), u_x(\eta))$ и является в ней непрерывной функцией u и u' . Рассмотрим теперь отображение \mathcal{T}_η , порождаемое сдвигом вдоль траекторий уравнения (1), переводящее точку $(u(0), u_x(0))$ в точку $(u(\eta), u_x(\eta))$. Это отображение является непрерывным, при этом обратное к нему отображение \mathcal{T}_η^{-1} также непрерывно. Соответственно, имеется окрестность точки $(u(0), u_x(0))$,

$$V_\varepsilon(u(0), u_x(0)) \subset \mathcal{T}_\eta^{-1}V_{\varepsilon_2}(u(\eta), u_x(\eta)),$$

в которой функция $h_0^+(u, u')$ определена и непрерывна. \square

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо для функции $h_0^-(u, u')$. А именно, если точка (u_0, u'_0) такова, что $h_0^-(u_0, u'_0) = x_1 < +\infty$, то $h_0^-(u, u')$ конечна в некоторой окрестности $V_\varepsilon(u_0, u'_0)$ и непрерывна в точке (u_0, u'_0) . Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству Леммы 5.

4. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ \mathcal{U}_L^\pm И \mathcal{U}_L

Опираясь на результаты раздела 3, опишем некоторые свойства множеств \mathcal{U}_L^\pm , $0 < L < \infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (Q1)-(Q3), (P1)-(P2) и L таково, что множества \mathcal{U}_L^\pm непусты. Тогда

- (а) \mathcal{U}_L^\pm являются открытыми множествами;
- (б) граница \mathcal{U}_L^\pm состоит из точек (u_*, u'_*) , таких, что $h_0^\pm(u_*, u'_*) = L$.

Доказательство. Докажем утверждения теоремы для \mathcal{U}_L^+ , доказательство для \mathcal{U}_L^- полностью аналогично.

(а) Пусть точка $p = (u_*, u'_*) \in \mathcal{U}_L^+$. Это значит, что $h_0^+(u_*, u'_*) > L$. Однако в силу непрерывности $h_0^+(u, u')$ существует окрестность $V_\varepsilon(u_*, u'_*)$, такая, что $h_0^+(u, u') > L$ для всех точек этой окрестности, то есть $V_\varepsilon(u_*, u'_*) \subset \mathcal{U}_L^+$, что и означает открытость множества \mathcal{U}_L^+ .

(б) Если точка $p = (u_*, u'_*)$ принадлежит границе \mathcal{U}_L^+ , то существует последовательность точек $p_n = (u_n, u'_n)$, $p_n \in \mathcal{U}_L^+$, сходящаяся к p . Для каждой из точек p_n справедливо неравенство $h_0^+(u_n, u'_n) > L$, следовательно, $h_0^+(u_*, u'_*) \geq L$. Но если $h_0^+(u_*, u'_*) > L$, то p – внутренняя точка области, следовательно, $h_0^+(u_*, u'_*) = L$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2. Пусть L – фиксировано, выполнены условия (Q1)-(Q3), (P1)-(P2), и множества \mathcal{U}_L^\pm непусты. Тогда существует $B > 0$, такое, что множество \mathcal{U}_L , а также его замыкание, расположены в полуплоскости $u \leq B$.

Доказательство. В силу Леммы 2 найдется такое $B_1 > 0$, что секторе $R^+(B_1)$ верна оценка (7) для $h_0^+(u, u')$, а в секторе $R^-(B_1)$ – оценка (12) для $h_0^-(u, u')$. В силу Леммы 1 найдется такое $B_2 > 0$, что для любого $u > B_2$ справедливо неравенство $H_0(u, M) < L$. Обозначим $B = \max\{B_1, B_2\}$. Тогда верно, что в секторе $R^+(B)$ нет точек множества \mathcal{U}_L^+ , а в секторе $R^-(B)$ нет точек множества \mathcal{U}_L^- . Соответственно, пересечение $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_L^+ \cap \mathcal{U}_L^-$

расположено в полуплоскости $u \leq B$, и там же расположено его замыкание. Теорема доказана. \square

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (Q1)-(Q3) и (P1)-(P2), и множество \mathcal{U}_π^+ непусто. Тогда

- (а) множество \mathcal{U}_π^+ состоит из конечного или счетного числа компонент связности V_1, V_2, \dots , каждая из которых является областью, то есть открытым связным множеством;
- (б) каждая компонента связности V_k односвязна, то есть каждый замкнутый контур можно непрерывно стянуть в точку, не выходя за пределы V_k ;
- (в) каждая компонента связности V_k неограничена.

Доказательство. В силу того, что \mathcal{U}_π^+ является открытым множеством, его можно представить в виде объединения конечного или счетного числа непересекающихся областей V_k , $\mathcal{U}_\pi^+ = \bigcup_k V_k$ (см. [7], глава 4, Теорема 17), которые и являются компонентами связности \mathcal{U}_π^+ . Тем самым пункт (а) доказан.

Докажем пункт (б). Рассмотрим одну из компонент связности V . Пусть она не является односвязной. Это значит, что существует замкнутый жорданов контур $\Gamma \subset V$, который нельзя стянуть в точку, оставаясь в пределах компоненты V . Обозначим Δ_1 область, которую охватывает Γ . Имеем, что в Δ_1 имеются точки, не принадлежащие V , то есть такие, что $h_0^+(u, u') \leq \pi$. Рассмотрим множество

$$\Theta = \{(u_*, u'_*) \in \Delta_1, h_0^+(u_*, u'_*) > \pi\}, \quad \Theta \subset \Delta_1, \quad \Theta \subset V,$$

а также его замыкание $\bar{\Theta}$. В силу непрерывности функции $h_0^+(u, u')$, в $\bar{\Theta}$ имеется точка $P = (U, U') \in \Delta_1$, такая, что $h_0^+(U, U') = \pi$. При этом точку P можно соединить с некоторой точкой $N \in \Gamma$ непрерывной кривой $\alpha \in \Theta$.

Применим теперь отображение Пуанкаре T к Γ , Θ и α . T -образом Γ является замкнутый жорданов контур $T\Gamma$, который делит \mathbb{R}^2 на внутреннюю часть, Δ_2 , и внешнюю часть, $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2$. Множество Δ_2 является ограниченным, множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2$ ограниченным не является. T -образом α является кривая $T\alpha$, один из концов которой лежит на $T\Gamma$, а другой уходит в бесконечность. T -образом Θ является множество $T\Theta$, которое находится во внешности контура $T\Gamma$, $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2$, содержит кривую $T\alpha$, и, следовательно, является неограниченным.

Рассмотрим $\bar{T\Theta}$, замыкание $T\Theta$. Покажем, что

$$\bar{T\Theta} = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2. \tag{22}$$

Очевидно, $\bar{T\Theta} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2$. Докажем обратное включение. Пусть имеется точка q , такая, что $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_2$, но $q \notin \bar{T\Theta}$. Соединим q с произвольной точкой контура $T\Gamma$ конечной кривой β . На кривой β имеется точка $\tilde{q} = (v_*, v'_*)$, являющаяся граничной точкой $\bar{T\Theta}$. Это означает, что в любой окрестности \tilde{q} имеются точки, не принадлежащие $\bar{T\Theta}$, при этом имеется последовательность точек $q_n = (v_n, v'_n)$, $q_n \in T\Theta$, сходящаяся к \tilde{q} . Рассмотрим T -прообразы точек q_n , $p_n = T^{-1}q_n = (u_n, u'_n)$. В силу того, что T – диффеоморфизм, последовательность $\{p_n\}$ также сходится к некоторой точке $\tilde{p} = (u_*, u'_*)$. Так как $h_0^+(u_n, u'_n) > \pi$, то $h_0^+(u_*, u'_*) \geq \pi$. Если $h_0^+(u_*, u'_*) = \pi$, то $q_n \rightarrow \infty$, что не имеет места, следовательно, $h_0^+(u_*, u'_*) > \pi$. Но тогда $\tilde{q} = T\tilde{p}$, и \tilde{q} является внутренней точкой $T\Theta$, а не его граничной точкой. Таким образом (22) доказано.

Таким образом, имеем

$$\Theta \subseteq V \subseteq \mathcal{U}_\pi^+,$$

поэтому

$$T\Theta \subseteq TV \subseteq T\mathcal{U}_\pi^+ = \mathcal{U}_\pi^-$$

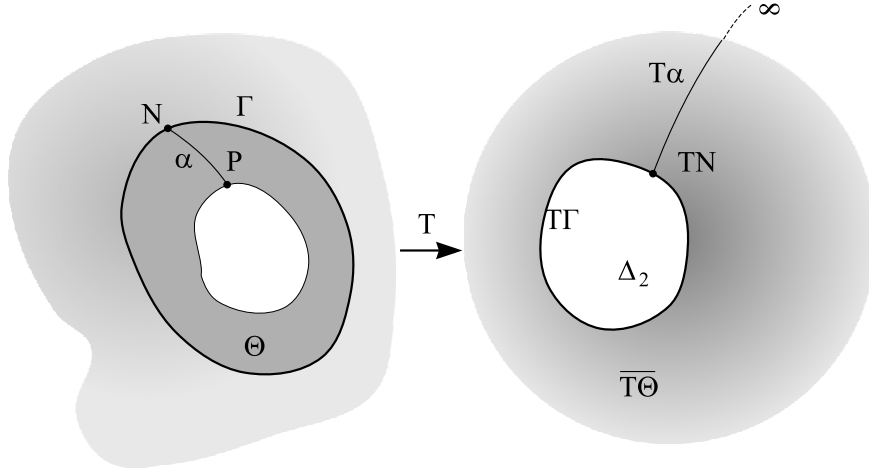


Рис. 2. К доказательству пункта (б) теоремы 3

и

$$\overline{T\Theta} \subseteq \overline{U_\pi^-}. \quad (23)$$

Рассмотрим множество $\Theta_0 = I[\overline{T\Theta}] \cap \overline{T\Theta}$, где I , как и раньше, означает преобразование симметрии относительно оси u . В силу (22), каждое из множеств $I[\overline{T\Theta}]$ и $\overline{T\Theta}$ представляет собой всю плоскость без конечной области, поэтому включают в себя внешность некоторого (достаточно большого) круга. Отсюда следует, что Θ_0 также включает в себя внешность некоторого круга. С другой стороны, в силу (23)

$$\Theta_0 \subseteq I[\overline{U_\pi^-}] \cap \overline{U_\pi^-} = \overline{U_\pi^+} \cap \overline{U_\pi^-} = \overline{U_\pi^-}.$$

Но множество $\overline{U_\pi^-}$ по Теореме 2 лежит в левой полуплоскости $u \leq B$ при некотором B . Полученное противоречие доказывает пункт (б).

Докажем пункт (в). Пусть компонента связности V является ограниченной. Рассмотрим произвольный жорданов контур Γ , расположенный целиком внутри V . Обозначим $\Delta_1 \subset V$ область, которую охватывает Γ . Введем обозначение

$$\Theta = V \setminus \Delta_1.$$

Рассмотрим $T\Gamma$ и $T\Theta$. Очевидно, $T\Gamma$ является жордановым контуром в \mathbb{R}^2 . Обозначим Δ_2 область, которую он охватывает. Что касается $T\Theta$, то оказывается справедливым утверждение (22), причем доказательство (22) совершенно аналогично соответствующему доказательству в пункте (б). Далее, как и в пункте (б), рассмотрим множество $\Theta_0 = I[\overline{T\Theta}] \cap \overline{T\Theta}$ которое, с одной стороны, включает в себя внешность некоторого круга, а с другой – содержится в $\overline{U_\pi^-}$, которое лежит в левой полуплоскости $u \leq B$ при некотором B . Таким образом, пункт (в) также доказан. \square

Замечание. В силу того, что множества U_π^- и U_π^+ расположены симметрично относительно оси u , Теорема 3 остается справедлива также если всюду в формулировке теоремы заменить U_π^+ на U_π^- .

Замечание. Теорема 3 остается справедлива также для множеств $U_{k\pi}^\pm$, где $k > 1$ – целое число.

Замечание. Приведенное выше доказательство можно было бы существенно упростить, если считать границы множества U_π^+ достаточно «хорошими» кривыми. По всей видимости, границы U_π^+ действительно являются C^1 -гладкими кривыми в достаточно общем случае, однако доказательства этого факта авторам на текущий момент неизвестно.

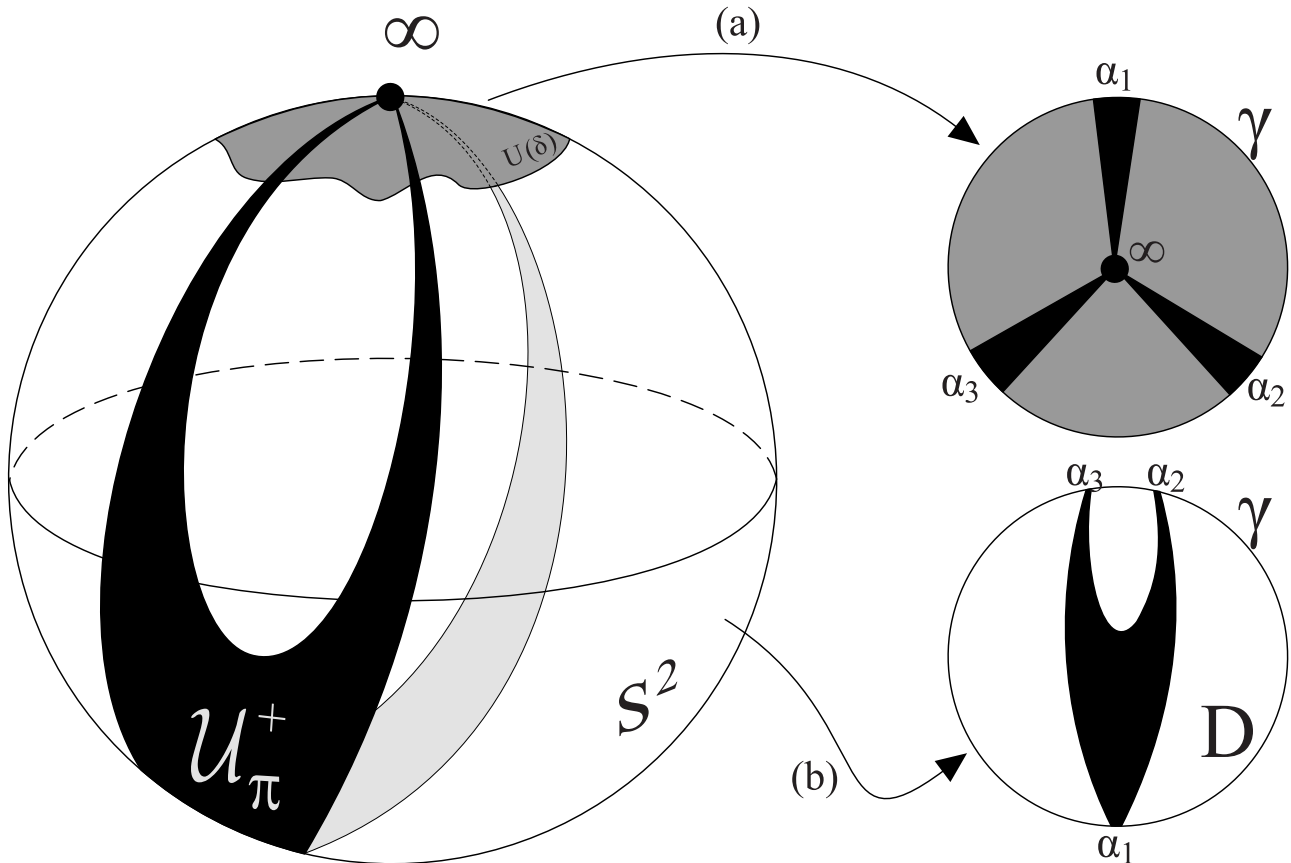


РИС. 3. Сфера Римана $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. На сфере изображена конфигурация множества U_π^+ , аналогичная рис. 5(с)

5. ВОЗМОЖНЫЕ ТИПЫ МНОЖЕСТВ U_π^+

Теоремы 1, 2 и 3 позволяют нам описать возможные топологически различные типы множеств U_π^+ . Для этого проведем следующие нестрогие рассуждения. Рассмотрим сферу Римана, полученную путем пополнения плоскости (u, u_x) бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$, $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Заметим, что в силу Теоремы 3:

1. Множество U_π^+ не может покрывать точку $\{\infty\}$.
2. Каждая из компонент связности U_π^+ примыкает к точке $\{\infty\}$.

Чтобы классифицировать возможные расположения компонент связности U_π^+ , используем следующую визуализацию. Рассмотрим окрестность W точки $\{\infty\}$ на S^2 , с границей, проходящей по параллели, «достаточно близкой» к точке $\{\infty\}$. Будем предполагать, что пересечение U_π^+ с W представлено несколькими разделенными между собой компонентами, каждая из которых примыкает к $\{\infty\}$. На границе W эти компоненты высекают дуги $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Число дуг n может быть конечным или бесконечным. Вопрос о возможных конфигурациях U_π^+ сводится к возможным типам замыканий компонент связности U_π^+ между дугами $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ в $S^2 \setminus W$. Количество компонент связности k при этом не обязательно равно n , см. ниже.

Интерпретируя теперь $S^2 \setminus W$ как круг большого радиуса, расположим n дуг $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ на его границе, окружности γ . В случае, когда $n = 1$, на γ имеется единственная дуга α_1 , и для U_π^+ возможна единственная конфигурация, схематически показанная на рис. 4(a). Если $n = 2$, на γ имеются две дуги, α_1 и α_2 , и для U_π^+ возможны две топологически различные конфигурации, показанные на рис. 4(b,c).

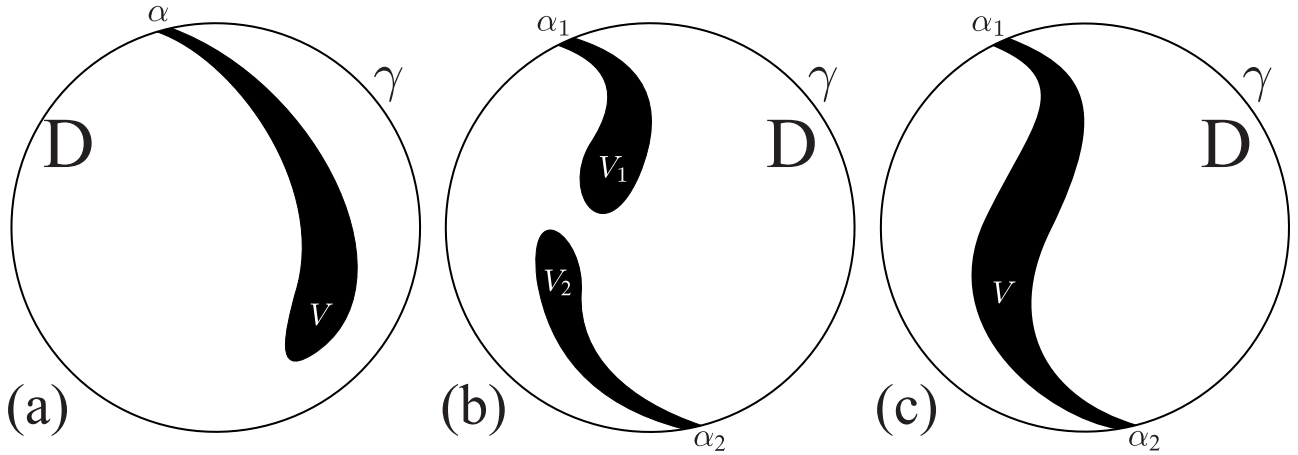


РИС. 4. Всевозможные различные конфигурации множества \mathcal{U}_π^+ для уравнения (1) при $n = 1, 2$. (a): $n = 1, k = 1$. (b): $n = 2, k = 2$. (c): $n = 2, k = 1$.

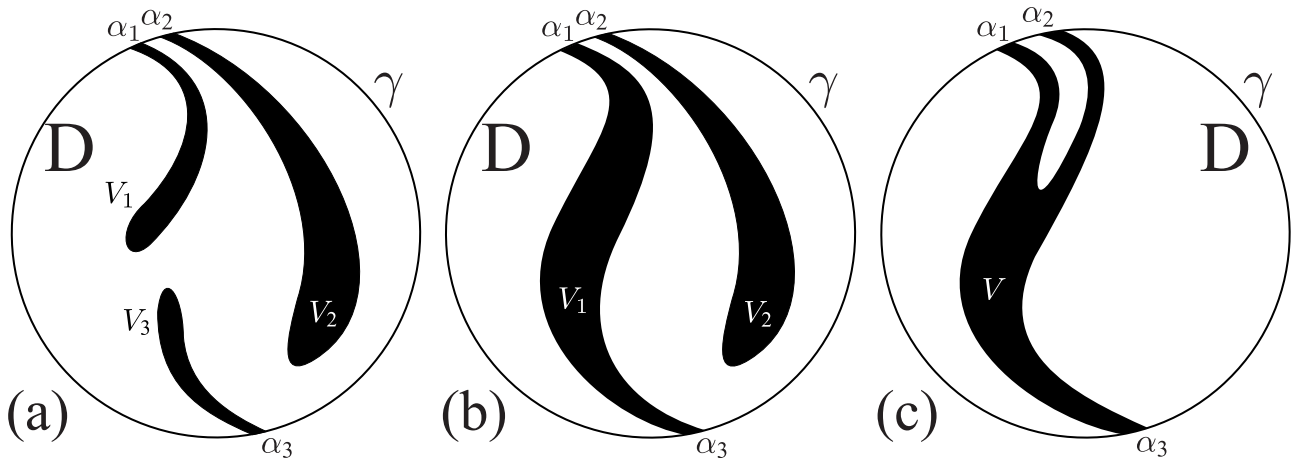


РИС. 5. Всевозможные различные конфигурации множества \mathcal{U}_π^+ для уравнения (1) при $n = 3$. (a): $k = 3$. (b): $k = 2$. (c): $k = 1$.

На рис. 5 и рис. 6 схематически показаны все топологически различные конфигурации, соответствующие случаям $n = 3$ и $n = 4$. Отметим, что на рис. 6(b) и 6(c) изображены топологически различные множества \mathcal{U}_π^+ , однако для них набор $(n, k) = (4, 3)$ одинаков. Аналогично, на рис. 6(d) и 6(e) показаны различные конфигурации \mathcal{U}_π^+ с одинаковым набором $(n, k) = (4, 2)$. Вопрос о количестве возможных конфигураций для случая произвольного n представляется нетривиальным. Нетрудно показать, что нижней границей числа возможных топологически различных конфигураций для заданного числа дуг n является число разбиений n на слагаемые $p(n)$. Вместе с тем каждое из таких разбиений может порождать несколько топологически различных конфигураций.

6. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВ \mathcal{U}_π^\pm : ПРИМЕРЫ

Если $Q(x)$ и $P(u)$ заданы, для исследования множеств \mathcal{U}_π^\pm можно использовать численный счет. В его основу естественно положить сканирование плоскости начальных данных (u, u_x) , с целью нахождения «рельефа» функции $h_0^+(u, u')$ и выделения тех точек этой плоскости, для которых $h_0^+(u, u') > \pi$. В приведенных ниже примерах исследование проводилось следующим образом. На плоскости (u, u_x) вводилась сетка размера $M \times N$, покрывающая прямоугольник $[A; B] \times [C; D]$, с достаточно мелкими шагами $\tau_1 = (B - A)/M$ по u и $\tau_2 = (D - C)/N$ по u_x соответственно. Для каждого узла сетки (u_i, u'_j) , $1 \leq i \leq M$,

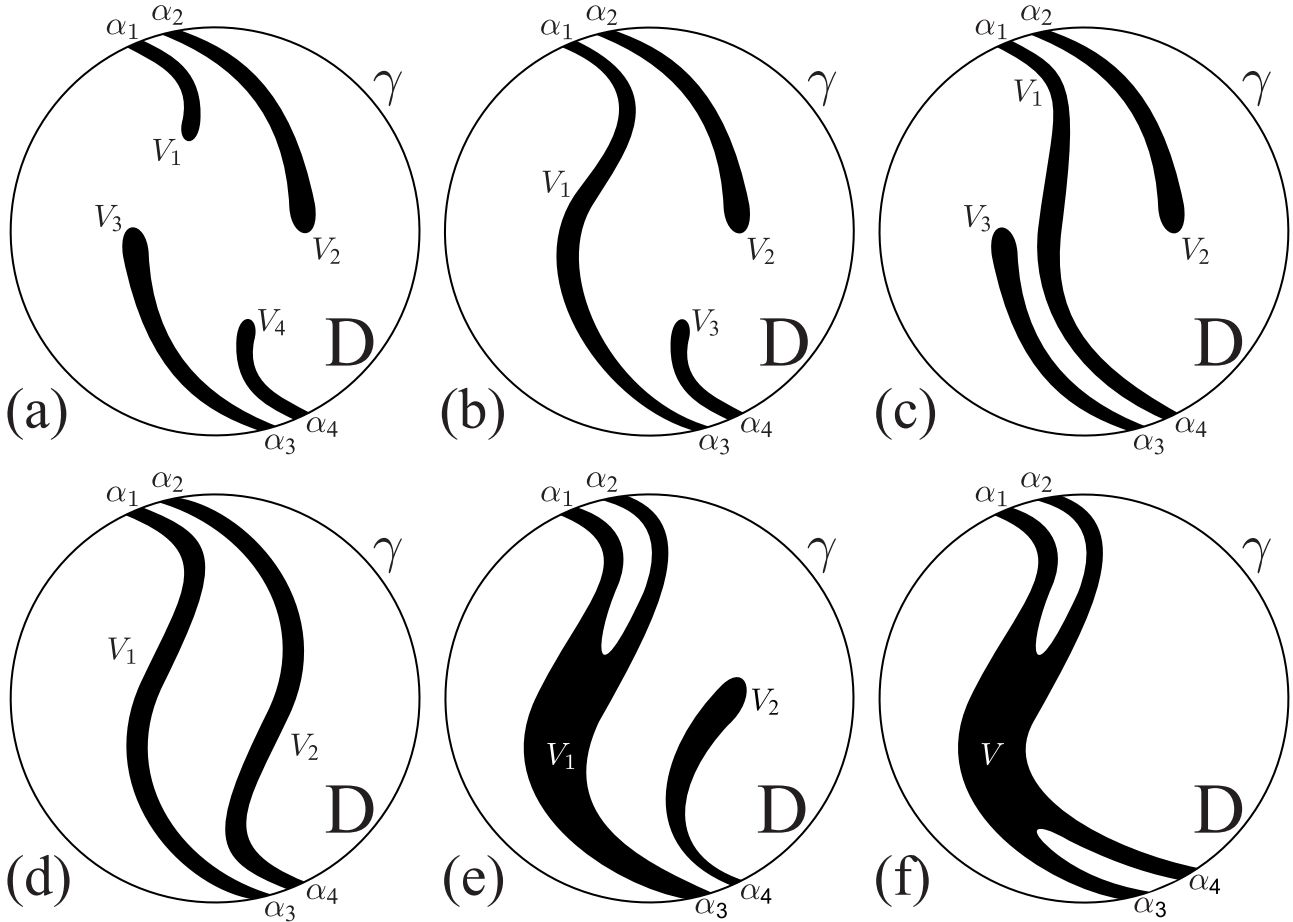


Рис. 6. Всевозможные различные конфигурации множества \mathcal{U}_π^+ для уравнения (1) при $n = 4$. (a): $k = 4$. (b): $k = 3$. (c): $k = 3$. (d): $k = 2$. (e): $k = 2$. (f): $k = 1$.

$1 \leq j \leq N$, решалась задача Коши для уравнения (1) с начальными данными $u(0) = u_i$, $u_x(0) = u'_j$. Если решение задачи Коши на промежутке $[0; \pi]$ принимало значения, большие чем некоторое заданное большое число u_{\max} , полагалось, что точка (u_i, u'_j) не принадлежит множеству \mathcal{U}_π^+ , в противном случае, (u_i, u'_j) включалась в \mathcal{U}_π^+ . Результаты, полученные для $u_{\max} = 10^5$ и для $u_{\max} = 10^7$ хорошо согласовывались между собой. Множество \mathcal{U}_π^- получается из \mathcal{U}_π^+ путем симметричного отражения относительно оси u .

Ниже приведены результаты численных исследований уравнения (1) для некоторых типов нелинейностей $P(u)$. Функция $Q(x)$ во всех случаях имеет один и тот же вид, $Q(x) = \mu_1 + \mu_2 \cos 2x$, соответствующий модельному π -периодическому потенциалу.

6.1. Нелинейность $P(u) = u^3$. Уравнение

$$u_{xx} + (\mu_1 + \mu_2 \cos 2x)u - u^3 = 0 \tag{24}$$

возникает при исследовании стационарных мод вида

$$\psi(x, t) = e^{i\mu_1 t} u(x) \tag{25}$$

с действительной функцией $u(x)$ в модели Гросса-Питаевского

$$i\psi_t = \psi_{xx} + (\mu_2 \cos 2x)\psi - |\psi|^2\psi = 0. \tag{26}$$

Последнее уравнение является одним из самых «востребованных» уравнений рассматриваемого класса, в силу того, что возникает в различных задачах нелинейной оптики и

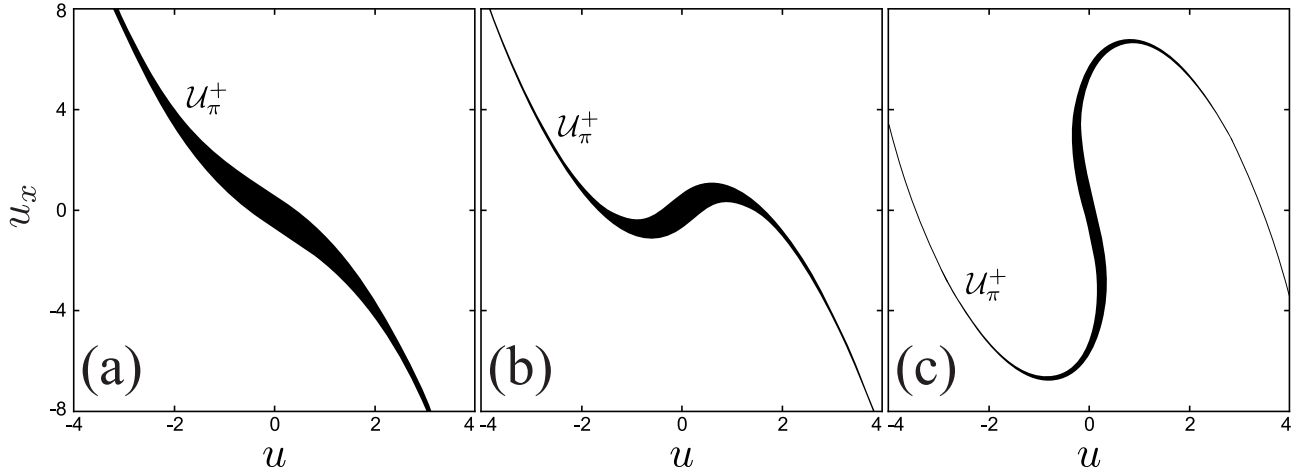


Рис. 7. Множество \mathcal{U}_π^+ для уравнения (24), найденное численно. Параметры: (a) $\mu_1 = 0, \mu_2 = -2$; (b) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3$; (c) $\mu_1 = 4, \mu_2 = 10$

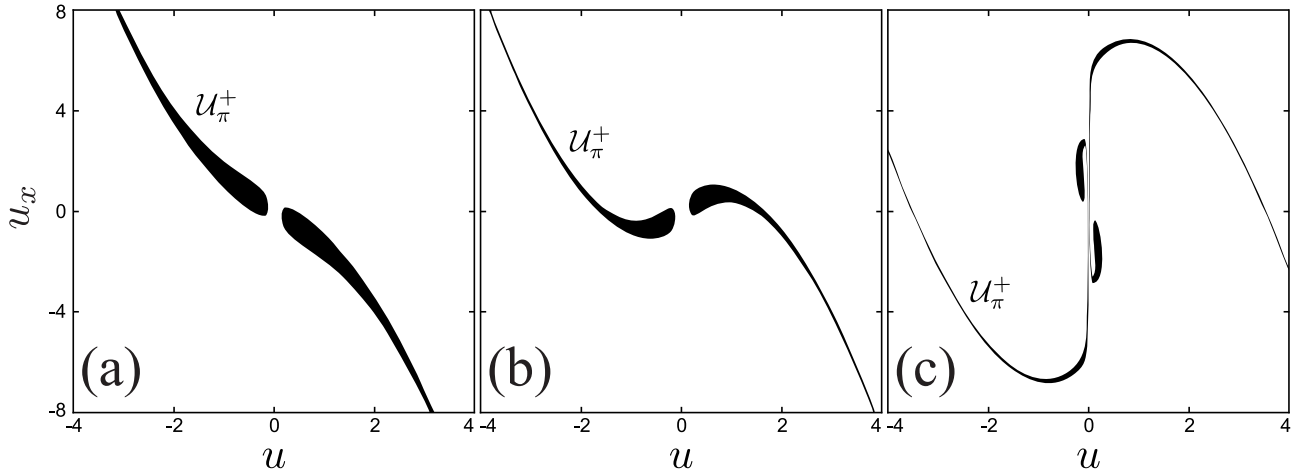


Рис. 8. Множество \mathcal{U}_π^+ для уравнения (27), найденное численно. Параметры: (a) $\mu_1 = 0, \mu_2 = -2, \nu = 0.1$; (b) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \nu = 0.1$; (c) $\mu_1 = 4, \mu_2 = 10, \nu = 0.1$

физики низких температур [1, 2]. Построению классификации решений уравнения (24) посвящена работа [3]. В частности, в [3] приводятся численно построенные множества $\mathcal{U}_{k\pi}^\pm$, $k = 1, 2, \dots$. Примеры множеств \mathcal{U}_π^+ для трех наборов параметров $Q(x)$ приведены на Рис. 7. Очевидно, конфигурация этих множеств соответствует схеме на Рис. 4(c), случай $n = 2$.

6.2. Нелинейность $P(u) = u^3 + \nu/u^3$, $\nu > 0$. Уравнение

$$u_{xx} + (\mu_1 + \mu_2 \cos 2x)u - u^3 - \frac{\nu}{u^3} = 0, \quad \nu > 0 \quad (27)$$

также возникает при исследовании стационарных мод для уравнения (26). В этом случае стационарные моды предполагаются комплекснозначными, имеющими вид $\psi(x, t) = e^{i\mu_1 t + i\varphi(x)}u(x)$, с действительными $u(x)$ и $\varphi(x)$. Очевидно, (24) является предельным случаем (27) при $\nu \rightarrow 0$.

Для рассматриваемой нелинейности не выполняется условие (P1), поэтому, строго говоря, доказанное выше к ней неприменимо. Тем не менее, конфигурация \mathcal{U}_π^+ , приведенная на рис. 8, соответствует схеме на рис. 4(b) ($n = 2$).

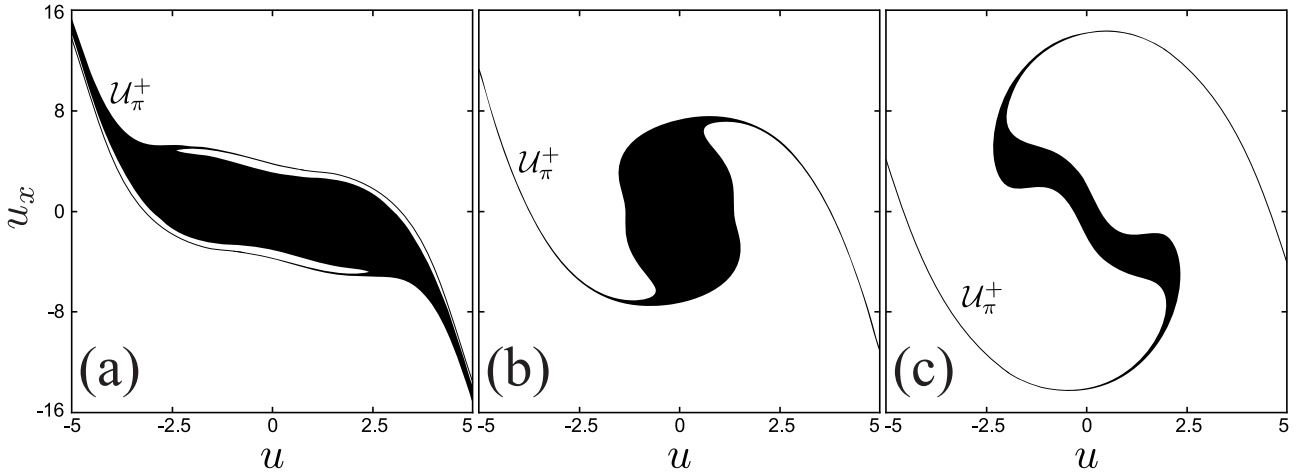


Рис. 9. Множество U_π^+ для уравнения (28), найденное численно.
 Параметры: (a) $\mu_1 = 0, \mu_2 = -2, \nu = 0.3$; (b) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \nu = 0.3$;
 (c) $\mu_1 = 4, \mu_2 = 10, \nu = 0.3$.

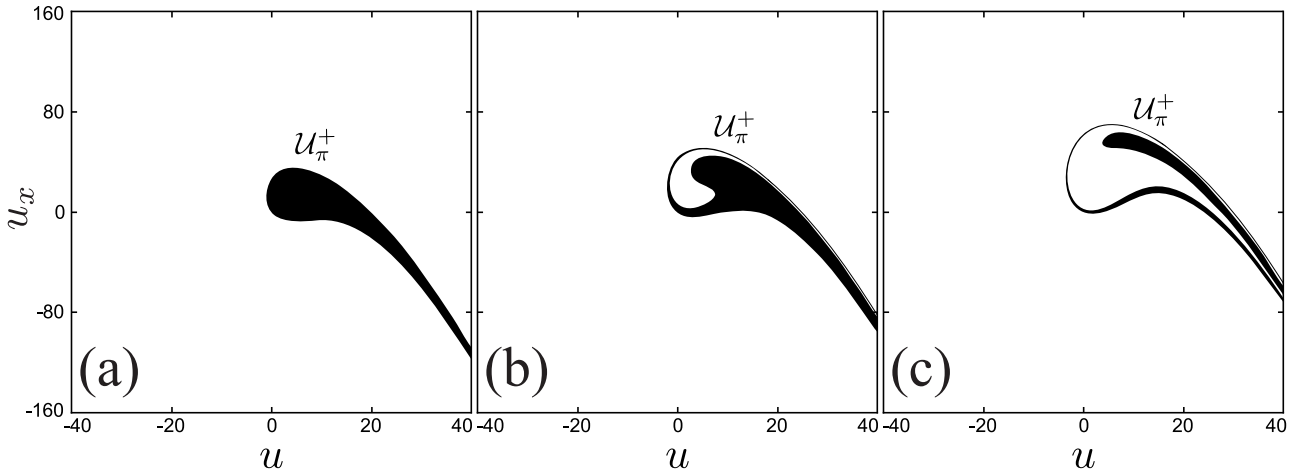


Рис. 10. Множество U_π^+ для уравнения (29), найденное численно.
 Параметры: (a) $\mu_1 = 3, \mu_2 = 20$; (b) $\mu_1 = 3, \mu_2 = 25$; (c) $\mu_1 = 3, \mu_2 = 30$

6.3. Нелинейность $P(u) = -u^3 + \nu u^5, \nu > 0$. Уравнение

$$u_{xx} + (\mu_1 + \mu_2 \cos 2x)u + u^3 - \nu u^5 = 0, \quad \nu > 0 \tag{28}$$

возникает, в частности, в задачах теории конденсата Бозе-Эйнштейна при учете трехчастичных взаимодействий [9]. Примеры множеств U_π^+ для трех наборов параметров $Q(x)$ приведены на рис. 9. Конфигурация U_π^+ на рис. 9(a) соответствует схеме на рис. 6(f) (случай $n = 4$), рис. 9(b) и 9(c) отвечают схеме на рис. 4(c) ($n = 2$).

6.4. Нелинейность $P(u) = u^2$. Для полноты картины рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + (\mu_1 + \mu_2 \cos 2x)u - u^2 = 0. \tag{29}$$

Нелинейность в этом случае отличается от рассмотренных ранее тем, что не является нечетной. Примеры множеств U_π^+ для этого случая приведены на рис. 10. Интересно, что с изменением параметров μ_1 и μ_2 существенно изменяется и геометрия множества U_π^+ . Конфигурация U_π^+ на рис. 10(a) отвечает схеме рис. 4(a), ($n = 1$), на рис. 10(b) - схеме рис. 4(c), ($n = 2$), на рис. 10(c) - схеме рис. 5(b) ($n = 3$).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуются возможные конфигурации множеств \mathcal{U}_L^\pm на плоскости начальных данных для уравнения (1). По определению из раздела 2, точка плоскости $p = (u_0, u'_0)$ принадлежит \mathcal{U}_L^+ тогда и только тогда, когда решение задачи Коши $u(0) = u_0, u_x(0) = u'_0$ для (1) продолжается на интервал $[0; L]$, $L > 0$. Аналогично, точка плоскости $p = (u_0, u'_0)$ принадлежит \mathcal{U}_L^- тогда и только тогда, когда решение задачи Коши $u(0) = u_0, u_x(0) = u'_0$ для (1) продолжается на интервал $[-L; 0]$, $L > 0$. Исследование множеств \mathcal{U}_L^\pm оказывается важным для описания множества решений (1), ограниченных на всей числовой прямой. В частности, в силу того, что уравнение является инвариантным относительно сдвига на π , в ряде случаев удается описать множество решений (1) в терминах динамики, порождаемой отображением Пуанкаре на множестве $\mathcal{U}_\pi = \mathcal{U}_\pi^+ \cap \mathcal{U}_\pi^-$. Поэтому для исследования ограниченных решений (1) множества \mathcal{U}_π^\pm , а также связанные с ними множества $\mathcal{U}_{n\pi}^\pm$, $n = 2, 3, \dots$ играют ключевую роль.

Основным результатом работы является теорема 3. Она накладывает достаточно серьезные ограничения на форму множества \mathcal{U}_π^+ . На основании Теоремы 3, в работе представлены возможные формы множества \mathcal{U}_π^+ . Численный счет, проведенный для уравнения (1) с различными типами нелинейности, позволил найти формы \mathcal{U}_π^+ в нескольких частных случаях. Во всех рассмотренных случаях формы \mathcal{U}_π^+ соответствовали геометриям, предсказанным на основании развитой теории.

Проведенное исследование, однако, ставит новые вопросы, которые, на наш взгляд, достойны дальнейшего изучения.

Во-первых, остается неизвестным, все ли из предсказанных геометрий множества \mathcal{U}_π^+ могут реализовываться при надлежащем выборе неоднородности $Q(x)$ и нелинейности $P(u)$. В частности, интересным представляется вопрос о том, реализуемы ли формы \mathcal{U}_π^+ с бесконечным числом компонент связности.

Во-вторых, остается неизученным вопрос о возможных формах множества \mathcal{U}_π . Как следует из работы [3], наибольший интерес представляют ситуации, когда \mathcal{U}_π имеет «островную» структуру, то есть состоит из конечного или бесконечного числа криволинейных четырехугольников, не имеющих общих точек. Представляется интересным использовать результаты данной работы для выделения таких ситуаций.

В-третьих, для дальнейшего может оказаться полезным изучение бифуркаций множеств \mathcal{U}_π^\pm при изменении параметров $Q(x)$ и $P(u)$. В частности, при численном исследовании в подразделе 6.4 такие бифуркации были обнаружены. На наш взгляд, представляет интерес исследование вопроса о существовании (или не существовании) единого механизма, отвечающего за перестройку \mathcal{U}_π^\pm при изменении параметров.

В-четвертых, дальнейший прогресс в изучении задач подобного вида может быть связан со следующим обстоятельством. Отображение IT (I – отражение относительно оси u , T – отображение Пуанкаре, см. раздел 2) осуществляет автоморфизм \mathcal{U}_π^+ . Соответственно, это отображение переводит границу \mathcal{U}_π^+ в себя. Исследование отображения границы под действием IT может быть полезным для изучения многих вопросов, связанных с символической динамикой, определяемой отображением Пуанкаре.

Наконец, достаточны интересны, на наш взгляд, обобщения развитого метода, в частности, на уравнения более высокого порядка.

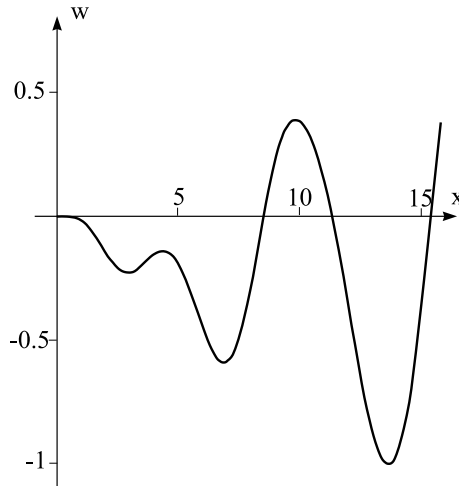


РИС. 11. Комментарий о лемме сравнения: важность монотонности $f(x, \xi)$. График $w(x)$, разности решений уравнений $u_{xx} + u = 0$ и $z_{xx} + z + z^2 = 0$ с одним и тем же начальным условием $u(0) = z(0) = 0$, $u_x(0) = z_x(0) = 0.5$

А. ЛЕММА СРАВНЕНИЯ

Лемма (сравнения, [8]). Пусть функции $u(x)$ и $z(x)$, $x \in [a; b]$ являются решениями уравнений

$$u_{xx} - f(x, u) = 0, \quad (30)$$

$$z_{xx} - g(x, z) = 0. \quad (31)$$

Пусть

- (a) $f(x, \xi)$ и $g(x, \xi)$ определены на $[a; b] \times [A; B]$ и являются локально липшицевыми по ξ , $\xi \in [A; B]$, причем A и B могут быть конечными или бесконечными;
- (b) $g(x, \xi) \geq f(x, \xi)$ при $x \in [a; b]$, $\xi \in [A; B]$;
- (c) $f(x, \xi)$ монотонно не убывает относительно переменной ξ .

Пусть $A < u(a) \leq z(a) < B$ и $u_x(a) \leq z_x(a)$. Тогда $u(x) \leq z(x)$ и $u_x(x) \leq z_x(x)$ на всем интервале $[a; b]$, или до тех пор, пока $A < u(x) \leq z(x) < B$

Замечание. Условие монотонности $f(x, \xi)$ по переменной ξ опустить нельзя. Рассмотрим случай $g(x, \xi) = -\xi$, $f(x, \xi) = -\xi - \xi^2$. Очевидно, что $g(x, \xi) \geq f(x, \xi)$ при всех ξ , но $f(x, \xi)$ не является монотонной. На рис.11 приведен график разности $w(x) = u(x) - z(x)$ решений уравнений (30) и (31) с одним и тем же начальным условием $u(0) = 0$, $u_x(0) = 0.5$. Видно, что $w(x)$ остается отрицательной в некоторой окрестности $x = 0$, но меняет знак при некотором $x \in [8; 9]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам*. М.: Физматлит, 2005. (перевод с английского: Yu.S.Kivshar, G.P.Agraval. *Optical solitons. From Fibers to Photonic Crystals*. Academic press, 2003)
2. L. Pitaevskii, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
3. G.L. Alfimov, A.I. Avramenko *Coding of nonlinear states for the Gross-Pitaevskii equation with periodic potential* // Physica D. 2013. Vol. 254. P. 29–45.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002.

5. Алфимов Г.Л., Лебедев М.Е. *О регулярных и сингулярных решениях уравнения $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$* // Уфимский математический журнал. Т.7, № 2. 2015. С.3–18.
6. P. Hartman *Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons. 1964.
7. Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. М.: Наука. 1977.
8. G.L. Alfimov, D.A. Zezyulin *Nonlinear modes for the Gross – Pitaevskii equation – a demonstrative computational approach* // Nonlinearity 20. 2007. P. 2075–2092.
9. F.K.Abdullaev, M.Salerno. *Gap-Townes solitons and localized excitations in low-dimensional Bose-Einstein condensates in optical lattices*// Phys.Rev.A, 72, 033617 (2005)

Георгий Леонидович Алфимов,
Национальный исследовательский университет МИЭТ,
4806-й пр., д. 5,
124498, г. Москва, Зеленоград, Россия
E-mail: galfimov@yahoo.com

Павел Павлович Кизин,
Национальный исследовательский университет МИЭТ,
4806-й пр., д. 5,
124498, г. Москва, Зеленоград, Россия
E-mail: p.p.kizin@gmail.com