ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 82-98.

УДК 517.927.25

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В «ВЫРОЖДЕННОМ» СЛУЧАЕ

Х.К. ИШКИН, Х.Х. МУРТАЗИН

Аннотация. В статье рассматривается оператор L, порожденный в $L^2[0,+\infty)$ дифференциальным выражением $\mathcal{L}(y) = y^{(4)} - 2(p(x)y')' + q(x)y$ и краевыми условиями $y(0) = y''(0) = 0$, в «вырожденном» случае, когда корни соответствующего характеристического уравнения имеют неодинаковый порядок роста на бесконечности. В предположении степенного роста функций p и q и при некоторых дополнительных условиях типа гладкости и регулярности получено асимптотическое уравнение для спектра, которое позволяет выписать несколько первых членов асимптотического ряда для собственных чисел оператора L.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, асимптотика спектра, точка поворота.

Mathematics Subject Classification: 47E05, 34L16, 34L20, 34L40, 34B40

1. Введение

Специфика спектральных задач для обыкновенных дифференциальных операторов позволяет пользоваться одним из наиболее эффективных методов, основанных на асимптотических оценках фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения

$$\mathcal{L}y = \lambda y \tag{1}$$

(см., например, [1, 2]). Так, если L – некоторое самосопряженное расширение минимального оператора, порожденного в $L^2(a,b)$ дифференциальным выражением $\mathcal{L}y$ [1], имеет дискретный спектр с функцией распределения $N(r)$, то для исследования асимптотики $N(r)$ (при $r \to +\infty$) можно воспользоваться тауберовой техникой, предварительно получив ВКБ-оценки [3, с. 92] ядра резольвенты $(L-\lambda)^{-1}$ (которое выражается через ФСР уравнения (1)) при больших λ вдали от спектра L. Но если требуется найти несколько первых членов асимптотического разложения для самих собственных чисел λ_n (пронумерованных в порядке возрастания модулей с учетом кратностей) при $n \to +\infty$, то тауберова техника уже не применима, поэтому приходится «спускаться» на спектр — изучать асимптотику решений уравнения (1), когда λ уходит в бесконечность по множеству, содержащему спектр L (или его часть). В случае, когда оператор L сингулярен [1], последнее обстоятельство приводит, как правило, к появлению точек поворота [3, с. 83], в окрестности которых перестают работать ВКБ-оценки. Метод эталонных уравнений (метод Лангера) [4] позволяет получить приближенное решение уравнения (1), пригодное как в точке поворота, так и вдали от нее, превращаясь в ВКБ-решение. Этот метод одинаково эффективен

Kh.K. Ishkin, Kh. Kh. Murtazin, Asymptotics for the eigenvalues of a fourth order differential operator in a «degenerate» case.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (грант № 01201456408) и РФФИ (грант № 15-01-01095).

Поступила 15 июня 2016 г.

как в самосопряженных, так и несамосопряженных спектральных задачах [5]. К настоящему времени спектральные задачи с точкой поворота достаточно подробно изучены для двучленных операторов [6] — [11].

В статье рассматривается оператор L, порожденный в $L^2[0,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}(y) = y^{(4)} - 2(p(x)y')' + q(x)y \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$y(0) = y''(0) = 0, \tag{3}$$

в «вырожденном» случае, когда корни соответствующего характеристического уравнения имеют неодинаковый порядок роста на бесконечности [2, с. 320]. В предположении степенного роста функций p и q и при некоторых дополнительных условиях типа гладкости и регулярности получено асимптотическое уравнение для спектра, которое позволяет выписать несколько первых членов асимптотического ряда для собственных чисел оператора L.

2. Предварительные замечания

2.1. Основные условия на коэффициенты. На вещественнозначные функции p и q наложим следующие ограничения:

1. При $x \geq x_0$ ($x_0 \geq 0$ — постоянная) функции p и q имеют абсолютно непрерывные производные, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1 x^{\alpha-1} \leqslant q'(x) \leqslant A_1 x^{\alpha-1}, b_1 x^{\beta-1} \leqslant p'(x) \leqslant B_1 x^{\beta-1}, \tag{4}$$

где $a_1, A_1, b_1, B_1, \alpha, \beta$ — положительные постоянные, причем

$$\alpha < 2\beta; \tag{5}$$

вторые производные функций p и q имеют постоянный знак (почти всюду).

2. Функции p и q суммируемы на $[0, x_0]$.

Замечание 1. *Из неравенств* (4) *следует, что при $x \geq x_0$ ($x_1 \geq x_0$)*

$$ax^{\alpha} \leqslant q(x) \leqslant Ax^{\alpha}, bx^{\beta} \leqslant p(x) \leqslant Bx^{\beta}, \tag{6}$$

где a, A, b, B — положительные постоянные. Следовательно [1, с. 353]*, спектр всякого самосопряженного расширения минимального оператора, порожденного выражением* (2)*, дискретен.*

Ниже при некоторых дополнительных ограничениях на функции p и q мы получим двойную асимптотику [3, с. 61] решений уравнения $l(y) = \lambda y$, откуда, в частности, будет вытекать, что индексы дефекта оператора L_0 равны (2, 2). Последний факт влечет за собой самосопряженность оператора L.

Замечание 2. *Вопрос об условиях, при которых индексы дефекта минимального оператора, порожденного выражением* (2)*, равны (2, 2), был предметом исследования многих авторов* [12] — [18].

2.2. Приведение основного уравнения к каноническому виду. Введем обозначения. Пусть $\chi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $[0, x_0]$ и нулю на $[x_0+1, \infty)$. Положим

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p(x)(1-\chi(x)), \quad q_1(x) = q(x)(1-\chi(x)), \\ f(x,\lambda,\mu) &= \mu^4 - 2p_1\mu^2 + q_1 - \lambda, \end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2p_1 & 0 & -1 \\ q_1-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \chi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее пусть $Y = (y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})^T$, где $y^{[k]}$ означает k-ую квазипроизводную [1, с. 182]. Тогда уравнение $\mathcal{L}y = \lambda y$ эквивалентно системе уравнений

$$Y' = (A_1 + A_2)Y. \tag{7}$$

Характеристический многочлен матрицы A_1 совпадает с функцией $f(x, \lambda, \mu)$. Корни уравнения $f(x, \lambda, \mu) = 0$ образуют две пары

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\nu_1}, \mu_{3,4} = \pm\sqrt{\nu_2},$$

где $\nu_{1,2} = p_1 \pm \sqrt{D}$, $D = p_1^2 + \lambda - q_1$, ветвь корня $\sqrt{z}$ выбрана так, что $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$. Поскольку $\nu_2 = (q_1 - \lambda)/\nu_1$, то из неравенств (4) и (5) следует, что при любом фиксированном $\lambda > 0$ и для любых $1 \leqslant i, j \leqslant 2$

$$\mu_{j+2} = o(\mu_i), \quad x \to \infty,$$

то есть имеет место случай «вырождения».

Всюду далее будем считать, что $\beta < \alpha + 2$.

Введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mathrm{diag}(A_{01}, A_{02}),\\
A_{01} &= \sqrt{\nu_1}\mathrm{diag}(1, -1), \quad A_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu_2 & 0 \end{pmatrix}, && (8)\\
T &= D^{-1/4}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}\mathrm{diag}(MW, I_2), && (9)
\end{aligned}$$

I_2 — единичная матрица второго порядка,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \mathrm{diag}(\nu_1, -\nu_2), \quad \Lambda_2 = \mathrm{diag}(\nu_2, -\nu_1),\\
W &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \mathrm{diag}(\nu_1^{-1/4}, \nu_1^{1/4}),\\
B_1 &= -T^{-1}T', \qquad B_2 = T^{-1}A_2T. && (10)
\end{aligned}$$

Элементы матрицы B_1 легко выписываются

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, && (11)\\
B_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = W^{-1}\mathrm{diag}(b_2, b_3),\\
B_{21} &= \mathrm{diag}(b_3, b_2)W, \quad B_{22} = \mathrm{diag}(b_4, -b_4), && (12)\\
b_1 &= -\frac{\nu_1'}{4\nu_1} - \frac{p'}{2\sqrt{D}}, \quad b_2 = -\frac{\nu_1^{1/4}\nu_2'}{2\sqrt{D}},\\
b_3 &= \frac{\nu_1'}{2\sqrt{D}\nu_1^{1/4}}, \quad b_4 = \frac{p'}{2\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Далее пусть

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \\
X_{11} &= -\frac{1}{2}A_{01}^{-1}B_{11}, \\
X_{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{D}}\left(A_{01}(B_{12}+B_{12}A_{02}\right), \\
X_{21} &= -\frac{1}{2\sqrt{D}}\left(B_{21}A_{01}+A_{02}B_{21}\right), \\
X_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_4 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Легко проверяются соотношения

$$T^{-1}AT = A_0, \quad XA_0 - A_0X = B_1.$$

Тогда подстановка

$$Y = T(I_4 + X)V$$

приводит уравнение (7) к виду

$$V' = (A_0 + Z_1)V, \tag{14}$$

где

$$Z_1 = (I_4+X)^{-1}(B_1X - X' + B_2(I_4+X)). \tag{15}$$

3. Уравнение для спектра

3.1. Формулировка основного результата. Введем обозначения (a_λ — корень уравнения $q(a_\lambda)=\lambda$):

$$\begin{aligned}
\xi(x,\lambda) &= \left|\frac{3}{2}\int_{a_\lambda}^{x}|\nu_2|^{1/2}\,dt\right|^{2/3}\operatorname{sgn}(x-a_\lambda), \\
S &= (\xi'(x,\lambda))^{-1/2}, \quad K(x,\lambda) = \frac{S''}{S}, \\
\widetilde{K}(t,\lambda) &= a_\lambda^2\left[|K(a_\lambda t,\lambda)| + \left(\frac{|p_1''|+|q_1''|}{\sqrt{D}}\right)(a_\lambda t,\lambda)\right].
\end{aligned}$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Пусть при $\beta < \alpha + 2$ выполнены условия 1), 2) и, кроме того,*

3. Функция $\widetilde{K}(t,\lambda)$ ограничена в некоторой окрестности точки $t=1$ вида $(1-\delta, 1+\delta)$ ($\delta > 0$ не зависит от λ) равномерно по $\lambda \geq \Lambda_0, \Lambda_0 > 0$ — постоянная.

Тогда собственные числа оператора L определяются из уравнения

$$\sin\Phi(\lambda) + K(\lambda)\cos\Phi(\lambda) + O(b(\lambda)+\lambda^{-\delta}) = 0, \tag{16}$$

где

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda) &= \int_0^{a_\lambda} |\nu_2(t,\lambda)|^{1/2}\,dt + \frac{\pi}{4}, \\
K(\lambda) &= -\frac{5}{72}\left(\Phi(\lambda) - \frac{\pi}{4}\right)^{-1} + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{a_\lambda} |\nu_2|^{-1/2}\left(b_4^2 + b_4' - K(t,\lambda) + \frac{\nu_2'(\nu_2\nu_1' - \nu_1\nu_2')}{8D^{3/2}}\right) dt, \qquad (17) \\
b(\lambda) &= \int_0^{a_\lambda} |\nu_2|^{-1/2}\exp\left(i\int_0^t |\nu_2|^{1/2}\,dt\right) \times \\
&\times \left[\frac{(p_1')^2 + |q_1''|}{D} + \frac{|p_1''|}{\sqrt{D}} + |\chi|\,|p|\right] dt, \qquad (18) \\
\delta &= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\alpha + 2 - \beta}{\alpha}, \frac{\alpha + 2 - \beta}{3\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right\}.
\end{aligned}
$$

Если функция p имеет абсолютно непрерывную производную на всей полупрямой $[0,\infty)$, то число $1/2$ в определении δ можно заменить на $3/2$, а в интеграле $b(\lambda)$ член $|\chi p|$ заменить на 0.

3.2. Эталонные решения. Пусть

$$
Q_1(x,\lambda) = \int_0^x \nu_1^{1/2} dt, \quad Q_2(x,\lambda) = \int_{a_\lambda}^x |\nu_2|^{1/2} dt.
$$

Эталонные решения возьмем в виде

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \operatorname{diag}(V_{01}, V_{02}), \\
V_{01} &= \exp\left(\operatorname{diag}(Q_1, -Q_1)\right), \\
V_{02} &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}, \\
v_1 &= Bv(\xi(x,\lambda)), \quad v_2 = Bu(\xi(x,\lambda)),
\end{aligned}
$$

где $v(\xi)$, $u(\xi)$ – вещественные функции Эйри [19, с. 428]. Легко проверить, что V_0 удовлетворяет уравнению

$$
\begin{aligned}
V_0' &= A_0V_0 + Z_2V_0, \\
Z_2 &= \operatorname{diag}\left(0, \frac{S''}{S}J_0\right), \qquad (19)
\end{aligned}
$$

где

$$
J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

0 — нулевая матрица второго порядка.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
J &= \operatorname{diag}(1, -1), \\
d(x,\lambda) &= \begin{cases} 1, & x \ge a_\lambda, \\ 0, & x < a_\lambda \end{cases}, \qquad (20) \\
D(x,\lambda) &= \exp[\operatorname{diag}(Q_1J, -dQ_2J)], \qquad (21) \\
T_0(x,\lambda) &= \operatorname{diag}\left(1, 1, |\nu_2|^{-\sigma(x,\lambda)/4}, |\nu_2|^{\sigma(x,\lambda)/4}\right), \qquad (22)
\end{aligned}
$$

где $\sigma(x,\lambda)$ — характеристическая функция множества $[0,\infty)$
$(a_\lambda(1-\delta_1), a_\lambda(1+\delta_2))$, δ_1, δ_2 определяются соотношениями

$$-Q_2(a_\lambda(1-\delta_1),\lambda) = Q_2(a_\lambda(1+\delta_2),\lambda) = 1. \tag{23}$$

Положим

$$\widetilde{V_0}(x,\lambda) = T_0^{-1} V_0 D^{-1}. \tag{24}$$

Из асимптотических формул для функций Эйри [19, с. 429] следует, что

$$\begin{aligned}
\widetilde{V_0} &= \operatorname{diag}(I_2, \widetilde{V_{02}}),\\
\widetilde{V_{02}} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} [I_2 + O(Q_2^{-1}) + O(\nu_2'\nu_2^{-3/2})], \quad Q_2 \to +\infty, && (25)\\
\widetilde{V_{02}} &= \begin{pmatrix} \sin\Phi & \cos\Phi \\ -\cos\Phi & \sin\Phi \end{pmatrix} \left[I_2 - \frac{5}{72} Q_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \right.\\
&+ \left. O(Q_2^{-2}) + O(\nu_2' \, |\nu_2|^{-3/2}) \right], \quad Q_2 \to -\infty, && (26)\\
\Phi &= -Q_2(x,\lambda) + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3.3. Интегральное уравнение. Применяя метод вариации произвольных постоянных, для ФСР системы (14) получим уравнение

$$V = V_0(x,\lambda) + \int\limits_{\Gamma(x)} V_0(x,\lambda) V_0^{-1}(t,\lambda) Z(t,\lambda) V(t,\lambda) dt, \tag{27}$$

где

$$Z = Z_1 - Z_2, \tag{28}$$

$\Gamma(x)$ — матрица интервалов интегрирования $\gamma_{ij}(x) = (\gamma_{ij}, x)$, $0 \leqslant \gamma_{ij} \leqslant \infty$, — означает, что каждый элемент u_{ij} подынтегральной матрицы $U := V_0^{-1} Z V$ интегрируется по своему интервалу γ_{ij} в направлении от γ_{ij} к x. Покажем, что при подходящем выборе постоянных γ_{ij} к уравнению (27) можно будет применить метод последовательных приближений, что позволит построить ФСР уравнения (14) с известной асимптотикой при больших $\lambda > 0$, равномерной по $x \geq 0$.

Положим

$$\widetilde{V} = T_0^{-1} V D.$$

Тогда $\widetilde{V}$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{V} = \widetilde{V_0} + A(\lambda)\widetilde{V}, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
(A(\lambda)\widetilde{V})(x,\lambda) &= \widetilde{V_0}(x,\lambda) \int\limits_{\Gamma(x)} A(x,t,\lambda)(\widetilde{V}D)(t,\lambda) D^{-1}(x,\lambda) dt \equiv\\
&\equiv \widetilde{V_0}(x,\lambda) A_1(\lambda) \widetilde{V}, && (30)\\
A(x,t,\lambda) &= D(x,\lambda)(D^{-1} \widetilde{V_0}^{-1} T_0^{-1} Z T_0)(t,\lambda).
\end{aligned}$$

Теперь мы можем определить $\Gamma(x)$.

Положим $\gamma_{ij} = +\infty$ при $(i,j) = (3,2), (4,2), (4,3)$ и $\gamma_{ij} = 0$ при остальных (i,j). Из определения (21) матрицы D легко следует, что при таком выборе все экспоненциальные множители в (30) ограничены.

Введем банахово пространство $\mathbf{Z}$ матричных функций $F(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^4$, таких, что f_{ij} измеримы на $(0,+\infty)$ и

$$\|F(x)\|_{\mathbf{Z}} = \sup_{x>0} \|F(x)\| < \infty,$$

где
$$\|F\| = \sqrt{\sum_{1\le i,j\le 4} |f_{ij}|^2}.$$

Ясно, что $\widetilde{V}_0 \in \mathbf{Z}$ при всех $\lambda > 0$. Покажем, что $A(\lambda)$ сжимающий оператор в $\mathbf{Z}$ при достаточно больших $\lambda > 0$. Для этого нам потребуется оценка нормы матрицы $G = T_0^{-1} Z T_0$. Имеем (см. (15), (19), (28))

$$G = (I_4 + X_1)^{-1} T_0^{-1}(B_1 X - X')T_0 + T_0^{-1} B_2 T_0 (I_4 + X_1) - T_0^{-1} Z_2 T_0, \tag{31}$$

где
$$X_1 = T_0^{-1} X T_0.$$

Лемма 1. *При больших* $\lambda > 0$
$$\|X_1\|_{\mathbf{Z}} = O(a_\lambda^{-1} + \lambda^{-3/4} + \lambda^{-(2+\alpha-\beta)/3\alpha}).$$

Доказательство. Из (10)–(13), проведя несложные выкладки, будем иметь
$$\|X_1(x,\lambda)\| = O\left[\left(|\nu_2|^{-\sigma/2} |p_1'|\, D^{-1/2}\right)(x,\lambda)\right],\ \lambda \gg 1,$$

равномерно по $x \ge 0$. Неравенства (4), (5) показывают, что для всех $t \in (-\delta, \delta)$, где $\delta > 0$ не зависит от λ,
$$\begin{aligned} |\nu_2(a_\lambda(1+t),\lambda)| &\ \ge\ c_1 \lambda^{(\alpha-\beta)/\alpha} |t|, \\ |Q_2(a_\lambda(1+t),\lambda)| &\ \leqslant\ c_2 \lambda^{(\alpha+2-\beta)/2\alpha} |t|^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \tag{32}$$

где c_1, c_2 — постоянные, не зависящие от λ. Тогда для функций $\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda)$, определяемых по (23), справедливы оценки
$$|\delta_i| \ge c_i^{-1} \lambda^{-(\alpha+2-\beta)/3\alpha}.$$

Отсюда и из (32) при всех $x \in (a_\lambda(1-\delta), a_\lambda(1+\delta))$ будем иметь
$$(\nu_2^{-\sigma/2} p_1' D^{-1/2})(x,\lambda) = O\left(a_\lambda^{-1} + \lambda^{-(\alpha+2-\beta)/3\alpha}\right).$$

При $x \notin (a_\lambda(1-\delta), a_\lambda(1+\delta))$, снова воспользовавшись неравенствами (4), (5), получим
$$(\nu_2^{-1/2} p_1' D^{-1/2})(x,\lambda) = O\left(\lambda^{-(\alpha+2-\beta)/2\alpha} + \lambda^{-3/4} + \lambda^{-(1/4+1/2\beta)}\right).$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что
$$\|G\| = O(\|G_0\|), \tag{33}$$

где
$$G_0 = T_0^{-1}(B_1 X - X' + B_2 - Z_2) T_0.$$

Пусть
$$g(t,\lambda) = \frac{(p_1')^2 + |q_1'|}{D} + \frac{|p_1''|}{\sqrt{D}} + |\chi|\,(|p| + \lambda^{-1/2}\,|q|). \tag{34}$$

Лемма 2. *При больших* $\lambda > 0$ *равномерно по* $x \ge 0$ *справедлива оценка*
$$\|G_0(x,\lambda)\| = O(|\nu_2(x,\lambda)|^{-\frac{1}{2}}\,(|K(x,\lambda)| + g(x,\lambda))). \tag{35}$$

Доказательство. Пусть

$$G_0 = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

где G_{ij} — квадратные матрицы второго порядка. Из соотношений (10) — (13), (15), и (28) имеем

$$G_{22} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{8}\,|\nu_2|^{\sigma/2}\,D^{-1/2}(\nu_1' D' D^{-3/2} + 8\chi p), \\ g_2 &= |\nu_2|^{-\sigma/2}\left(b_4^2 + b_4' - K + \frac{\nu_2'(\nu_2\nu_1' - \nu_1\nu_2')}{8D^{3/2}} - \frac{\chi q}{2\sqrt{D}}\right), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$K(t,\lambda) = -\frac{5}{36}\frac{|\nu_2|}{Q_2^2} + \frac{5}{16}\frac{(q_1')^2}{(q_1-\lambda)^2} - \frac{1}{4}\frac{q_1''}{(q_1-\lambda)} - \frac{1}{8}\frac{q_1'\nu_1'}{(q_1-\lambda)\nu_1} + \frac{1}{4}\frac{\nu_1''}{\nu^{-1}} - \frac{3}{16}\frac{(\nu_1')^2}{\nu_1^2}. \tag{38}$$

Отсюда видно, что G_{22} удовлетворяют оценке (35). Аналогичные выкладки показывают, что

$$\|G_{11}\| = O(\nu_1^{-1/2} g(t,\lambda)),$$

$$\|G_{12}\| + \|G_{12}\| = O(|q_1-\lambda|^{-\sigma/4}\, g(t,\lambda)).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы 1 оператор $A(\lambda)$ ограничен, и его норма $\|A(\lambda)\|_*$ допускает оценку*

$$\|A(\lambda)\|_* = O\left(\lambda^{-m}\right), \lambda \to +\infty,$$

$$m = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{2+\alpha-\beta}{2\alpha}\right\}.$$

Если дополнительно предположить существование производной p, абсолютно непрерывной на всей полупрямой $x \geq 0$, то

$$m = \min\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2\beta}, \frac{2+\alpha-\beta}{2\alpha}\right\}.$$

Доказательство. В силу выбору $\Gamma(x)$ все экспоненциальные множители в ядре оператора $A(\lambda)$ (см. (30)) ограничены, следовательно, (см. (33), (35))

$$\|A(\lambda)\|_* = O\left(\int_0^\infty |\nu_2|^{-1/2}\,(|K(t,\lambda)| + g(t,\lambda))dt\right),\ \lambda \to +\infty.$$

Тогда, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1 из [10], используя при этом выражение (38), неравенства (4), (6) и условие 3), получим нужную оценку для $\|A(\lambda)\|$.

Если функция p имеет абсолютно непрерывную производную, то всюду, где встречается функция p_1, можно последнюю заменить функцией p, так что в выражении (34) исчезнет член $|Xp|$. Отсюда легко следует второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

3.4. Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 следует, что для ФСР системы (7) справедливо асимптотическое представление
$$Y(x,\lambda)=TT_0(I_4+X_1)(\widetilde{V}_0+A_\lambda\widetilde{V}_0+O\left(\|A_\lambda\|_*^2\right))D(x,\lambda),$$
где T, T_0, D определены по (9), (21), (23), а $\widetilde{V}_0$ удовлетворяет соотношениям (25), (26). Отсюда мы заключаем, что индексы дефекта оператора L_0 равны (2.2), и уравнение для собственных чисел оператора L имеет вид
$$\det(C_0Y(0,\lambda)C_1^T)=0,$$
где
$$C_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$
Так как $X_1(0,\lambda)=0$, $\nu_{1,2}(0,\lambda)=\pm\sqrt{\lambda}$, то
$$C_0Y(0,\lambda)C_1^T=\lambda^{-3/8}\mathrm{diag}(1,\sqrt{\lambda})C_2\widetilde{V}(0,\lambda)(I_4+A_1(\lambda)\widetilde{V})(0,\lambda)+O\left(\|A_\lambda\|_*^2\right)C_1^T, \tag{39}$$
где
$$C_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку
$$\left(A_1(\lambda)\widetilde{V}_0\right)(0,\lambda)C_1^T=\left(A_1(\lambda)\widetilde{V}_0C_1^T\right)(0,\lambda),$$
то из определения $A_1(\lambda)$ (см. (30)) получим
$$\left(A_1(\lambda)\widetilde{V}_0C_1^T\right)(0,\lambda)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\alpha_{31}&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}\end{pmatrix}, \tag{40}$$
причем
$$\alpha_{ij}=O\left(\int_0^\infty|\nu_2|^{-1/2}\left(|K(t,\lambda)|+g(t,\lambda)\right)\exp(-\delta Q_1)dt\right),\quad \lambda\to+\infty,$$
при всех $(i,j)=(3,1)$ и $(4,1)$. Здесь $\delta>0$ — не зависящая от λ постоянная. Отсюда, учитывая, что при $t<x_0$
$$|K(t,\lambda)|+g(t,\lambda)=\frac{5}{36}|\nu_2|\,Q_2^{-2}(t,\lambda)+|\chi|\left(|p|+\lambda^{-1/2}|q|\right),$$
получим
$$\alpha_{ij}=O\left(\lambda^{-1/4}\int_0^{x_0+1}|\chi p|\exp(-\delta_0Q_1)dt\right)+O\left(\lambda^{-3/4}\right)+O\left(Q_2^{-2}(0,\lambda)\right),(i,j)\neq(4,2), \tag{41}$$
где δ_0 — положительная постоянная. Чтобы вычислить α_{42}, заметим, что (см. (26))
$$\det(\widetilde{V_{02}}(x,\lambda))=\det(\widetilde{V_{02}}(\infty,\lambda))=1,$$
следовательно,
$$\widetilde{V_{02}}^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_{22}&-\omega_{12}\\-\omega_{21}&\omega_{11}\end{pmatrix},$$
где ω_{ij} — элементы матрицы $\widetilde{V}_{02}$. Тогда (см. (36), (37))
$$\begin{aligned}\alpha_{42}&=\int_0^\infty(g_1\omega_{12}\omega_{21}-g_2\omega_{11}^2)\exp(-2d(t,\lambda)Q_1(t,\lambda))dt+O(\alpha(\lambda)),\\\alpha(\lambda)&=\int_0^\infty\|G-G_0\|\exp(-2d(t,\lambda)Q_2(t,\lambda))dt.\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\alpha(\lambda) = O\left(\int_0^\infty |q_1-\lambda|^{-1/2}\left(\left((p_1')^2+|q_1''|\right)D^{-1/2}+|p_1''|\right)p_1'D^{-1/2}dt\right).$$

Далее, используя неравенства (4), (6), условие 3) и знакопостоянство вторых производных p и q, после несложных вычислений получим

$$\alpha_{42}(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{a_\lambda}(g_1-g_2)dt + O(b(\lambda)) + O\left(\lambda^{-m_1}\right),$$

где $b(\lambda)$ определена формулой (18),

$$m_1 = \min\left\{\frac{2+\alpha-\beta}{3\alpha}+\frac{1}{\alpha},\frac{3}{2},\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}\right\}.$$

Тогда из (39), (40), учитывая (41), будем иметь

$$\lambda^{-1/8}\det(C_0Y(0,\lambda)C_1^T) = \omega_{11}(0,\lambda)+\alpha_{42}(\lambda)\omega_{12}(0,\lambda)+O\left(\beta(\lambda)+\|A_\lambda\|_*^2+Q_2^{-2}(0,\lambda)\right).$$

Заменив в последнем выражении $\omega_{11}(0,\lambda)$ и $\omega_{12}(0,\lambda)$ их асимптотиками согласно (26), получим (16).

Теорема доказана.

4. Асимптотика спектра

В этом пункте получим асимптотику собственных чисел оператора L, когда p и q имеют вид

$$p(x) = x^\beta, \quad q(x) = x^\alpha, \quad 0 < \frac{\alpha}{2} < \beta < \alpha+2. \tag{42}$$

Будет показано, что вид старшего члена асимптотического ряда для λ_k зависит от значения $\operatorname{sgn}(\beta-2)$.

4.1. Решение уравнения (16) **в первом приближении.** Из уравнения (16) следует, что

$$\Phi(\lambda_k) = \nu_k\pi + o(1), k\to\infty$$

при каждой фиксированной паре (α,β), удовлетворяющей (42). Ниже покажем (лемма 6), что $\nu_k = k$.

Лемма 4. *Асимптотика спектра оператора L в случае $p(x) = x$, $q(x) = x^2$ имеет вид*

$$\lambda_k = \left[\frac{3}{2}\pi\left(k-\frac{1}{4}\right)\right]^{4/3} - \frac{1}{16}\left[3/2\pi\left(k-\frac{1}{4}\right)\right]^{-2/3} + O(k^{-1}).$$

Доказательство. Легко заметить, что в условиях леммы $L = L_1^2$, где L_1 оператор Штурма–Лиувилля, порожденный в $L(0,+\infty)$ выражением $-y''+xy$ и краевым условием $y(0) = 0$. Но асимптотика собственных чисел L_1 известна [11, лемма 5]. Отсюда следует утверждение леммы.

В условиях леммы 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mu_i(x,\lambda)}{\mu_{i+2}(x,\lambda)} = 1, i = 1,2,$$

то есть имеет место случай асимптотически кратных корней [3, с. 271]. В этом случае $D(x,\lambda) = \lambda$ и интеграл

$$\int_0^\infty |\nu_2|^{-1/2}\left(|K(t,\lambda)|+g(t,\lambda)\right)dt$$

расходится. Тем не менее, внеся некоторые изменения, теорему 1 можно распространить на случай $q(x) = p^2(x)$.

Лемма 5. *Пусть* $q(x) = x^\alpha, p(x) = x^\beta$, *где* $(\alpha, \beta) \in \Omega$,

$$\Omega = \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha/2 < \beta < \alpha + 2 \text{ или } 0 < \alpha/2 = \beta < 2\}.$$

Тогда

$$\sin \Phi(\lambda) = o(1), \lambda \to \infty, \tag{43}$$

равномерно по любому компакту $K \subset \Omega$.

Доказательство. Пусть $b_\lambda = (1 + \delta)a_\lambda$, $\delta > 0$ – не зависит от λ. Тогда при указанных α, β утверждение теоремы 7 сохраняет силу, если в определениях пространства $\mathbf{Z}$ и оператора $A(\lambda)$ полуось $[0, \infty)$ заменить отрезком $[0, b_\lambda]$, следовательно, ФСР системы (7) имеет асимптотику

$$Y = TT_0\widetilde{V}_0(I_4 + o(1))D(x, \lambda), \quad \lambda \to \infty, \tag{44}$$

равномерно по $x \in [0, b_\lambda]$.

Далее, методом ВКБ легко показать, что при $0 < \alpha < 4$ соотношение (44) верно и на полуоси $[b_\lambda, \infty)$. Отсюда следует (43). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* p *и* q *имеют вид* (42). *Тогда*

$$\Phi(\lambda_k) = k\pi + o(1), k \to \infty. \tag{45}$$

Доказательство. Из леммы 5 имеем

$$\Phi(\lambda_k) = \nu_k\pi + o(1), k \to \infty.$$

Но $\lambda_k = \lambda_k(\alpha, \beta)$ непрерывна на Ω [20, Пример 1], следовательно, $\nu_k(\alpha, \beta)$ также непрерывна на Ω. Так как $\nu_k(2, 1) = k$ (лемма 9), то $\nu_k(\alpha, \beta) = k$ на Ω. Лемма доказана.

Замечание 3. *При доказательстве леммы 4 используется специальный вид краевых условий (2.2). В случае произвольных самосопряженых краевых условий можно поступить так же, как при доказательстве леммы 5 в* [11], *заметив, что при* $p(x) = x$, $q(x) = x^2$ *подстановка*

$$Y = TU,$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = (y_1, y_2)^T, \quad y_1 = \sqrt{\lambda}y, \quad y_2 = -y'' + xy,$$

переводит уравнение $\mathcal{L}(y) = \lambda y$ *к системе* $-V'' + xV = \sqrt{\lambda}\mathrm{diag}(1, -1)V$, *решения которой непосредственно выражаются через функции Эйри.*

4.2. Асимптотика спектра.

Теорема 2. *Пусть функции* p *и* q *имеют вид (2.40). Тогда при* $1 < \beta < 2$ *собственные числа оператора* L *имеют асимптотику*

$$\lambda_k = m_k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha-\beta}} - \frac{2\alpha}{2+\alpha-\beta}C_0\left\{C_1 m_k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha-\beta}-\frac{(2\beta-\alpha)(2-\beta)}{2\beta(2+\alpha-\beta)}} + C_2 m_k^{-\frac{(\alpha+2\beta)(2-\beta)}{2\beta(2+\alpha-\beta)}}\right\} + O\left(k^{-\frac{4(\beta-\alpha)}{2+\alpha-\beta}}\right),$$

где

$$m_k = C_0\pi\left(k - \frac{1}{4}\right),$$

$$C_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{2-\beta}{2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\beta+2}{2\alpha}\right)},$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty t^{-\beta/2}\left(t^\beta + \sqrt{t^{2\beta}+1}\right)^{-3/2}\left(\sqrt{2}t^{\beta/2} + \left(t^\beta + \sqrt{t^{2\beta}+1}\right)^{1/2}\right)^{-1} dt,$$

$$C_2 = \frac{\beta}{8}\int_0^1 t^{-1/\beta}(1-t)^{-5/4+1/2\beta}(1+t)^{-3/4+1/2\beta}\left((\beta-1)/\beta + 3t/4 - 2t^3 + t^4\right) dt.$$

При $0 < \beta \leqslant 1$ *имеют место аналогичные формулы.*

Чтобы из (45) и (16) получить асимптотику λ_k, необходимо изучить поведение при больших $\lambda > 0$ функций $Q_2(0,\lambda), K(\lambda), \beta(\lambda)$, когда p и q имеют вид (42).

Лемма 7. *Если $0 < \beta < 2$, то при $\lambda \to +\infty$*

$$-Q_2(0,\lambda) = \lambda^{(2+\alpha-\beta)/2\alpha} \left(C_0^{-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda^{-(2\beta-\alpha)k/\alpha} \right) + O\left(\lambda^{-(2\beta-\alpha)n/\alpha}\rho(\lambda)\right),$$

где $n = n(\beta) \in \mathbb{N}$ определяется неравенствами (47), $a_k = f_k I_k$, f_k и I_k определяются по формулам (46) и (49),

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \ln\lambda, & \beta = 2/(4n+1), \\ \lambda^{-\{1/4-1/2\beta\}}, & \text{при остальных } \beta, \end{cases}$$

$\{x\}$ означает дробную часть числа x.

Доказательство. Подстановка $x = a_\lambda t$ преобразует $Q_2(0,\lambda)$ к виду

$$\begin{aligned} -Q_2(0,\lambda) &= \lambda^{(2+\alpha-\beta)/2\alpha} \int_0^1 (1-t^\alpha)^{1/2} \left[t^\beta + \left(t^{2\beta} + \varepsilon(1-t^\alpha)\right)^{1/2} \right]^{-1/2} dt \equiv \\ &\equiv \lambda^{(2+\alpha-\beta)/2\alpha} I(\varepsilon). \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \lambda^{-(2\beta-\alpha)/\alpha}$.

Так как функция

$$f(z) = \left(1 + (1+z)^{1/2}\right)^{-1/2},$$

аналитична в единичном круге, то

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k, \ |z| < 1, \tag{46}$$

причем $f_0 = 1/\sqrt{2}$. Пусть n — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{4} \leqslant n < \frac{1}{2\beta} + \frac{3}{4}. \tag{47}$$

Положим

$$R_n(\varepsilon) = I(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k I_k \varepsilon^k, \tag{48}$$

где

$$I_k = \int_0^1 (1-x^\alpha)^{k+1/2} x^{-(4k+1)\beta/2} dx.$$

Имеем [22, с. 183]

$$I_k = \frac{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-(4k+1)\beta+2}{2\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{2k+3}{2} + \frac{2-(4k+1)\beta}{2\alpha}\right)}. \tag{49}$$

Так как

$$\left[t^\beta + \sqrt{t^{2\beta} + \varepsilon(1-t^\alpha)}\right]^{-1/2} = t^{-\beta/2} f\left(\varepsilon(1-t^\alpha)/t^{2\beta}\right),$$

то в силу равномерной сходимости ряда (46) в круге $|z| \leqslant r < 1$ для функции

$$r_n(t,\varepsilon) = \left[t^\beta + \sqrt{t^{2\beta} + \varepsilon(1-t^\alpha)}\right]^{-1/2} - \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot (1-t^\alpha)^k t^{-(2k+1/2)\beta} \varepsilon^k$$

справедлива оценка

$$|r_n(t,\varepsilon)| \leqslant C_n \varepsilon^n t^{-(2n+1/2)\beta}, \quad t \in [(1+\delta)\varepsilon^{1/2\beta}, 1],$$

где M, δ — положительные постоянные, не зависящие от ε. Далее, поскольку при $t \in (0, (1+\delta)\varepsilon^{1/2\beta})$

$$|r_n(t,\varepsilon)| \leqslant M'_n \varepsilon^{n-1} t^{-(2n-3/2)\beta},$$

где $M' > 0$ не зависит от t и ε, то

$$R_n(\varepsilon) \leqslant M\varepsilon^n \int_{(1+\delta)\varepsilon^{1/2\beta}}^1 t^{-(2n+1/2)\beta} dt + M'\varepsilon^{n-1} \int_0^{(1+\delta)\varepsilon^{1/2\beta}} t^{-(2n-3/2)\beta} dt.$$

Согласно (47)

$$-2\beta < -(2n+1/2)\beta + 1 \leqslant 0, \quad 0 < -(2n-3/2)\beta \leqslant 2\beta,$$

так что

$$R_n(\varepsilon) = \begin{cases} O\left(\varepsilon^n \ln \varepsilon\right), & \beta = 2/(4n+1), \\ O\left(\varepsilon^{n-\{1/4-1/2\beta\}}\right), & 1/2\beta - 1/4 \notin \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \varepsilon \to +0.$$

Отсюда и из соотношений (48), (49) следует утверждение леммы.

Лемма 8. *При $1 < \beta < 2$ и $\lambda \to +\infty$ справедлива оценка*

$$K(\lambda) = C_2 \lambda^{-(\beta+2)/4\beta} + O\left(\lambda^{-(2+\alpha-\beta)/2\alpha} + \lambda^{-3/4}\right). \tag{50}$$

Доказательство. Так как $\beta > 1$, то p' абсолютно непрерывна на $[0, +\infty)$, поэтому в выражениях (17) и (12) можно вместо p_1 и q_1 взять p и q соответственно, а $\chi \equiv 0$. С учетом этого из (17) и (12) получаем

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= K_1(\lambda) + K_2(\lambda) + O\left(\lambda^{-3/4}\right), \\ K_1(\lambda) &= -\frac{1}{2}\int_0^{a_\lambda} \nu_2^{-1/2} K(t,\lambda) dt, \\ K_2(\lambda) &= \frac{1}{16}\int_0^{a_\lambda} \nu_2^{-1/2} \left(\frac{2p'^2}{D} + 4\left(\frac{p'}{\sqrt{D}}\right)' + \frac{\nu_2'(\nu_2\nu_1' - \nu_1\nu_2')}{8D^{3/2}}\right) dt. \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что (см. (38))

$$\begin{aligned} K_1(\lambda) &= -\frac{1}{8}\int_0^{a_\lambda} \nu_2^{-1/2} \frac{\nu_1''}{\nu_1} dt + \frac{3}{32}\int_0^{a_\lambda} \nu_2^{-1/2} \left(\frac{\nu_1'}{\nu_1}\right)^2 dt + O(\lambda^{-(2+\alpha-\beta)/2\alpha}) = \\ &= K_{11}(\lambda) + K_{12}(\lambda) + O(\lambda^{-(2+\alpha-\beta)/2\alpha}). \end{aligned}$$

Интегралы $K_{11}(\lambda)$, $K_{12}(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ — однотипны, их асимптотика легко находится. Имеем

$$\begin{aligned} K_{11}(\lambda) &= -\frac{\beta}{8}\lambda^{-1/2}\int_0^{a_\lambda} k(t,\lambda) dt + O\left(\lambda^{-(2+\alpha-\beta)/2\alpha}\right), \\ k(t,\lambda) &= t^{\beta/2}\left(t^\beta + \sqrt{t^{2\beta}+\lambda}\right)^{-1/2}\left[\beta - 1 + (2\beta-1)t^\beta(t^{2\beta}+\lambda)^{-1/2} - \beta t^{2\beta}(t^{2\beta}+\lambda)^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных $t \longmapsto s = (1+t^{-2\beta})^{-1/2}$, получим

$$K_{11}(\lambda) = -\frac{\beta}{8}\lambda^{-(\beta+2)/4\beta}\int_0^{a_\lambda} s^{-1/\beta}(1-s)^{-(5\beta+2)/4\beta}\left((\beta-1)/\beta + s(1-s)\right) ds + O\left(\lambda^{-(2+\alpha-\beta)/2\alpha}\right).$$

Проделав аналогичные выкладки для $K_{12}(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ при $1 < \beta < 2$, получим (50). Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы 2. Согласно (18)

$$b(\lambda) = b_1(\lambda) + \exp\left(i\int_0^{a_\lambda} |\nu_2|^{1/2}\,dt\right) b_2(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} b_1(\lambda) &= \int_0^{a_\lambda/2} \exp\left(i\int_0^t |\nu_2|^{1/2}\,dt\right) B(t,\lambda)dt,\\ b_2(\lambda) &= \int_{a_\lambda/2}^{a_\lambda} \exp\left(-i\int_t^{a_\lambda} |\nu_2|^{1/2}\,dt\right) B(t,\lambda)dt,\\ B(t,\lambda) &= |\nu_2|^{-1/2}\left[\left(\frac{p'}{\sqrt{D}}\right)^2 + \frac{p''+|q_1''|}{\sqrt{D}}\right]. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$b_1(\lambda) = O\left(\lambda^{-\delta_1}\right), \quad \lambda\to+\infty,$$

где

$$\delta_1 = \min\left\{\frac{\alpha+2-\beta}{2\alpha}, \frac{4-\beta}{4\beta}, \frac{4+2\beta-\alpha}{2\alpha}\right\}.$$

Теперь оценим b_2. Пусть $Q(x,\lambda) = \int_t^{a_\lambda} |\nu_2|^{1/2}\,dt$. Так как

$$Q(x,\lambda) = -3/2\int_t^{a_\lambda} (q')^{-1}\nu_1^{-1/2} d\left((\lambda-q)^{3/2}\right),$$

и функции q' и ν_1 монотонны, то

$$A_1 a_\lambda^{1-\alpha-\beta/2} \leqslant \frac{Q(x,\lambda)}{(\lambda-q(x))^{3/2}} \leqslant A_2 a_\lambda^{1-\alpha-\beta/2}, \quad x\in[a_\lambda/2, a_\lambda],\ \lambda\gg 1, \tag{51}$$

где A_1, A_2 — положительные постоянные, не зависящие от λ. Далее, при каждом $k = 0, 1, \ldots$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\left(\frac{(p')^2+q_1''}{\sqrt{D}}\right)^2 + \frac{p''}{\sqrt{D}}\right](x, a_\lambda) = O\left(x^{-2-k}\right),\ x\geq a_\lambda/2,$$

равномерно по $\lambda \geq \Lambda_0 \gg 1$. Тогда

$$(\lambda-q(t))^{-1}B(t,\lambda) = Q(t,\lambda)^{-2/3}\lambda^{-\gamma}\psi(t,\lambda), \quad x\in[a_\lambda/2, a_\lambda],\ \lambda\gg 1,$$

где $\gamma = 2(\alpha+2-\beta)/3\alpha$, функция ψ и их производные (по x) удовлетворяют оценкам

$$\psi^{(k)}(x,\lambda) = O(x^{-k}),\ x\geq a_\lambda/2, \tag{52}$$

равномерно по $\lambda\geq\Lambda_0\gg 1$. Сделав в интеграле g_2 замену $x \mapsto Q = Q(x,\lambda)$, получим

$$b_2(\lambda) = \lambda^{-\gamma}\int_0^{A(\lambda)} e^{-iQ}Q^{-2/3}\Psi(Q,\lambda)dQ,$$

гле $A(\lambda) = Q(a_\lambda/2,\lambda)$, а функция $\Psi(Q,\lambda) = \psi(t(Q),\lambda)$ в силу (52) удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial Q^k}\Psi(Q(t,\lambda),\lambda)\right| \leqslant \frac{B_k}{|\nu_2(t,\lambda)|^{k/2}a_\lambda^k},\ t\in[a_\lambda/2, a_\lambda],\ \lambda\gg 1, \tag{53}$$

$B_k > 0$ ($k\in\mathbb{N}$) не зависят от t,λ.

Отсюда следует, что

$$b_{21}(\lambda) := \int_0^1 e^{-iQ}Q^{-2/3}\left(\lambda^{-\gamma}\Psi(Q,\lambda)\right)dQ = O\left(\lambda^{-\gamma}\right),\ \lambda\to+\infty.$$

Далее, из неравенств (51) видно, что при $Q(t,\lambda) \geq 1 \quad |\nu_2(t,\lambda)t| \geq C\lambda^{(\alpha+2-\beta)/3\alpha}$, где $C > 0$ не зависит от t, λ. Отсюда и из (53) следует, что при некотором $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^{A(\lambda)} q^{-2/3} \left| \frac{\partial^n}{\partial Q^n} \Psi(Q(t,\lambda),\lambda) \right| dQ = O\left(\lambda^{-\gamma}\right), \ \lambda \to +\infty, \ (i = 1, 2).$$

Поэтому, интегрируя в $b_{22} := b_2 - b_{21}$ по частям n раз, учитывая неравенства (53), получим

$$b_2(\lambda) = O\left(\lambda^{-\gamma}\right), \ \lambda \to +\infty.$$

$$b(\lambda) = O\left(\lambda^{-(2+\alpha-\beta)/2\alpha} + \lambda^{-1+\beta/4}\right), \quad \lambda \to +\infty. \tag{54}$$

Подставляя теперь полученные выражения для $K(\lambda)$, $Q_2(0,\lambda)$, $b(\lambda)$ в уравнение (16) и решая его относительно λ_k с учетом (45), получим утверждение теоремы.

Замечание 4. *В случае $0 < \beta \leqslant 1$ в формулах (17) и (12) мы уже не можем пренебрегать членами, содержащими срезающую функцию χ. Это приводит к появлению дополнительных членов в формулах (50) и (54). Кроме того, появляются дополнительные трудности, связанные с неинтегрируемостью функций p'^2 и p'' в 0, вследствие чего для интегралов, входящих в выражение для $K(\lambda)$, разложения вида (48) будут зависеть от конкретного значения β. Именно по этой причине мы ограничились в формулировке теоремы 1 случаем $1 < \beta < 2$.*

При $\beta \geq 2$ асимптотика интегралов $Q_2(0,\lambda)$, $K(\lambda)$ исследуется так же, как при $\beta < 2$. При $\beta > 2$ формулы для указанных интегралов аналогичны случаю $\beta < 2$, формальное различие обусловлено тем, что

$$\frac{\beta+2}{4\beta} - \frac{2+\alpha-\beta}{2\alpha} = \frac{(\beta-2)(2\beta-\alpha)}{4\alpha\beta} > 0$$

при $\beta > 2$. В случае $\beta = 2$ формулы для $Q_2(0,\lambda)$ и $K(\lambda)$ имеют свою специфику. Опуская промежуточные выкладки (аналогичные случаю $\beta < 2$), мы приведем окончательный вид асимптотических формул при $\lambda \to +\infty$:

$$-Q_2(0,\lambda) = \begin{cases} \widetilde{C}_1\lambda^{(\beta+2)/4\beta} - \widetilde{C}_2\lambda^{(2+\alpha-\beta)/2\alpha} + O\left(\lambda^{(2\alpha+2-3\beta)/4\beta}\right), & \beta > 2, \\ \widetilde{C}_3\lambda^{1/2}\ln\lambda + \widetilde{C}_4\lambda^{1/2} + O\left(\lambda^{(\alpha-2)/4}\right) + O\left(\lambda^{(3\alpha-8)/2\alpha}\right), & \beta = 2, \end{cases} \tag{55}$$

$$K(\lambda) = \begin{cases} O\left(\lambda^{(\alpha+2-\beta)/2\alpha}\right), & \beta > 2, \\ O(\lambda^{-1/2}\ln\lambda), & \beta = 2, \end{cases} \tag{56}$$

$$b(\lambda) = o(K(\lambda)),$$

где

$$\widetilde{C}_1 = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^\beta} + \sqrt{t^{2\beta}+1}}, \quad \widetilde{C}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\beta-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{t^{\alpha-\beta/2}dt}{1+\sqrt{1-t^\alpha}}, \quad \widetilde{C}_3 = \frac{4-\alpha}{4\sqrt{2}\alpha}, \tag{57}$$

$$\widetilde{C}_4 = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t^4+1}}} - \frac{1}{\sqrt{2}(t+1)}\right] dt - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}dt}{1+\sqrt{1-t^\alpha}}. \tag{58}$$

Теорема 3. *Пусть функции p и q имеют вид (42). Тогда спектр оператора L имеет асимптотику*

а) при $\beta > 2$

$$\lambda_k = m_k^{\frac{4\beta}{2+\beta}} + \frac{4\beta}{2+\beta}\frac{\widetilde{C}_2}{\widetilde{C}_1} m_k^{\frac{4\beta\alpha-(\beta-2)(2\beta-\alpha)}{(2+\beta)\alpha}} + O(k^\delta),$$

$$\delta = \max\left\{\frac{(\beta-2)(2\beta+\alpha)}{\alpha(\beta+2)}, \frac{2\alpha}{\beta+2}\right\},$$

б) при $\beta = 2$

$$\lambda_k = \exp\left(-\frac{\widetilde{C}_4}{\widetilde{C}_3}\right)\Psi^2(\mu_k)\left[1 + O\left(k^{-\frac{4-\alpha}{2}}(\ln k)^{-1+\frac{4-\alpha}{2}} + \left(\frac{k}{\ln k}\right)^{-\frac{8}{\alpha}+2}\right)\right],$$

где

$$m_k = \frac{\pi\,(4k-1)}{4\widetilde{C}_1},$$

$$\mu_k = \frac{\pi\,(4k-1)\exp\left(\widetilde{C}_4/2\widetilde{C}_3\right)}{8\widetilde{C}_3},$$

постоянные $\widetilde{C}_i, i = \overline{1,4}$, *определены по* (57), (58), $\Psi(\mu)$ – *функция, обратная к функции* $\varphi(\mu) = \mu\ln\mu$, *которая при больших* μ *имеет асимптотическое разложение* (59).

Доказательство. Пусть $\beta = 2$. Из уравнений (16), (45) с учетом (55), (56) находим

$$\widetilde{C}_3\lambda_k^{1/2}\ln\lambda_k + \widetilde{C}_4\lambda_k^{1/2} + O\left(\lambda_k^{\alpha-2/4} + \lambda_k^{(3\alpha-8)/2\alpha}\right) = \pi\left(k - \frac{1}{4}\right),$$

откуда

$$\lambda_k = \exp\left(-\frac{\widetilde{C}_4}{\widetilde{C}_3}\right)\Psi^2\left(\mu_k\left(1 + O\left(\frac{\lambda_k^{(\alpha-4)/4}}{\ln\lambda_k} + \frac{\lambda_k^{(\alpha-4)/\alpha}}{\ln\lambda_k}\right)\right)\right).$$

Функция $\Psi(\mu)$ при больших $\mu > 0$ имеет асимптотическое разложение [21]

$$\Psi(\mu) = \frac{\mu}{\ln\mu}\left(1 + \sum_{m=0,k=1} c_{km}(\ln\ln\mu)^k(\ln\mu)^{-k-\mu}\right), \tag{59}$$

где коэффициенты c_{km} вычисляются явно. Отсюда и следует утверждение б).

Пункт а) доказывается аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969.
2. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. *Распределение собственных значений.* М.: Наука, 1979.
3. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука,, 1983.
4. R.E. Langer *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to the Stokes' phenomenon*// Bull. Amer. Math. Soc. V. 40. 1934. P. 545–582.
5. Евграфов М.А., Федорюк М.В. *Асимптотика решений уравнения* $w''(z) + p(z,\lambda)w(z) = 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *в комплексной плоскости* z// Успехи мат. наук. Т. 21, вып. 1. 1966. С. 3–50.
6. M. Giertz *On the solution in* L^2 *of* $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ *when* q *is rapidly increasing*// Proc. London Math. Soc. V. 14. № 53. 1964. P. 53–73.
7. Аленицын А.Г. *Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в случае предельного круга*// Дифференц. уравнения. Т. 2. № 3. 1976. С. 428–437.
8. Любишкин И.А. *Вычисление регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля в случае предельного круга Вейля*// Тр. семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 6. С. 167–194.
9. F.V. Atkinson, G.T. Fulton *Asymptotic formulae for eigenvalues of limit circle problems on a half line*// Ann. Math. Pure and Appl. V. 135. 1983. P. 368–398.
10. Муртазин Х.Х., Амангильдин Т.Г. *Асимптотика спектра оператора Штурма-–Лиувилля*// Матем. сб. Т. 110(152). № 1. 1979. С. 135—149.
11. Ишкин Х.К. *Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка*// Дифф. уравнения. Т. 31, № 10. 1995. С. 480–490.
12. W.N. Everitt *On the limit-point classification of fourth-order differential equations*// J. London. Math. Soc. V. 44. 1969. P. 273–281.

13. M.S.P. Eastham *The limit-2 case of fourth-order differential equations*// Quart. J. Math. V. 22. 1971. P. 131–134.
14. A. Devinatz *The deficiency index of certain fourth-order ordinary self-adjoint differential equations*// Quart. J. Math. V. 23. № 91. 1972. P. 267–286.
15. A. Devinatz *On limit-2 fourth-order differential equations* // Quart. J. Math. V. 2. 1973. P. 135–146.
16. W.D. Evans *On non-integrable square solutions of a fourth-order differential equations and the limit-2 classification*// J. London. Math. Soc. V. 7. 1973.
17. D. Hinton *Limit point criteria for differential equations*// Canad. J. Math. V. 24. № 2. 1972. P. 293–305.
18. Аникеева Л.И. *Об асимптотическом поведении решений уравнения* $y^{(4)}-a(x^\beta y')'+bx^\alpha y=\lambda y$ *при* $x\to\infty$// Вест. МГУ. Мат., мех. № 6. С. 44–52.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. М.: Наука, 1974.
20. Kh.K. Ishkin *On continuity of the spectrum of a singular quasi-differential operator with respect to a parameter*// Eurasian Math. J. V. 2, № 3. 2011. P. 67–81.
21. Федорюк М.В. *Асимптотика: интегралы и ряды.* М.: Наука, 1987.
22. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы.* М.: Наука, 1977.

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Ishkin62@mail.ru

Хайрулла Хабибулович Муртазин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Murtazin@mail.ru