ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 41-48.

ОБРАЩЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

И.И. БАВРИН, О.Э. ЯРЕМКО

Аннотация. Интегральное преобразование Лапласа используется для обращения обобщенного оператора Римана-Лиувилля в замкнутой форме. Установлено, что обратный обобщенный оператор Римана-Лиувилля есть дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор. Установлена связь оператора Римана-Лиувилля с оператором Темлякова-Баврина. Представлены новые примеры обобщенных операторов Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: оператор Римана-Лиувилля, дробный интеграл, изображение Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 26A33, 44A10

1. Введение

Пусть функция $f(x) \in L_1(0,1)$, тогда функция

$$J^{\alpha}[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка α см. [8, 11, 15]. Дробный интеграл можно переписать в виде

$$J^{\alpha}[f](x) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon x)\, d\varepsilon \in L_1(0,1).$$

Последняя формула позволяет распространить операцию дробного интегрирования на случай функций $w = f(z)$, аналитических в единичном круге $B = \{z : |z| < 1\}$. В результате приходим к обобщенному оператору Римана-Лиувилля

$$L_{\omega}[f](z) = \alpha \int_0^1 (1-\varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon z)\, d\varepsilon. \tag{1.1}$$

Расширение понятия дробного интеграла (1.1) осуществил М.М. Джрбашян. В работе [5] введен обобщенный оператор Римана-Лиувилля.

Говорят, что функция $\omega(x) \in \Omega$, если она неотрицательно и непрерывна на $[0,1)$, причем

$$\omega(0) = 1, \int_0^1 \omega(x)\, dx < \infty,$$

и для любого $r \in [0,1)$ выполнено неравенство

$$\int_r^1 \omega(x)\, dx > 0.$$

I.I. Bavrin, O.E. Iaremko, Inverting of generalized Riemann-Liouville operator by means of integral Laplace transform.

Поступила 26 декабря 2015 г.

Пусть $w = f(z)$ функция, аналитическая в единичном круге $B = \{z : |z| < 1\}$.

Определение 1.1. *Обобщенным оператором Римана-Лиувилля называют следующий оператор [5]*

$$L_\omega [f] = f(0) + z \int_0^1 \omega(\varepsilon) f'(\varepsilon z) \, d\varepsilon.$$

Определим последовательность чисел

$$\Delta_1 = 1, \Delta(k) = k \int_0^1 r^{k-1} \omega(x) \, dx < \infty, k = 1, 2, ...$$

М.М. Джрбашян установил следующие утверждения [5]:
i)

$$L_\omega \left[z^k\right] = \Delta_k z^k;$$

ii)пусть $w = f(z)$, функция, аналитическая в единичном круге и пусть ее ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

тогда

$$L_\omega [f](z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta_k z^k;$$

iii) оператор L_ω обратим, причем

$$L_\omega^{-1} [f](z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{\Delta_k},$$

где

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

iiii) если функция $\omega(x) \in \Omega$ непрерывно-дифференцируема в $[0, 1)$, и $\omega(1) = 0$, то обобщенный оператор Римана-Лиувилля имеет вид

$$L_\omega [f] = -\int_0^1 \omega'(\varepsilon) f(\varepsilon z) \, d\varepsilon. \tag{1.2}$$

Современное состояние фрактального анализа и его применений представлено в [15-18].

2. Основной результат

Как уже отмечалось, теория обобщенного оператора Римана-Лиувилля построена М.М. Джрбашяном в работе [5]. Однако явной конструкции обратного оператора им предложено не было. С целью обращения обобщенного оператора Римана-Лиувилля в замкнутой форме, мы предлагаем использовать интегральное преобразование Лапласа.

Идея следующая – продолжить числовую последовательность

$$\Delta(k) = k \int_0^1 r^{k-1} \omega(x) \, dx < \infty, k = 1, 2, ...$$

в полуплоскость $p: \quad Rep = \sigma > \sigma_0 \geq 0.$

Проблема обращения обобщенного оператора Римана-Лиувилля будет решена, если функция $\Delta(p)$ является изображением Лапласа, а функция

$$\frac{1}{\Delta(p)}$$

имеет степенной рост, т.е.

$$\frac{1}{\Delta(p)} = p^{\alpha} L(p), \alpha > 0,$$

где $L(p)$ – функция медленно меняющаяся на бесконечности [14].

Лемма 2.1. *Функция*

$$\Delta(p) = p \int_0^1 \varepsilon^{p-1} \omega(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

определена для значений p, $Rep = \sigma > \sigma_0 \geq 0$ *и служит изображением Лапласа функции*

$$\omega\left(e^{-t}\right), \omega\left(e^{-t}\right) \geq 0, t \in [0, \infty).$$

Доказательство. Достаточно выполнить замену переменной $\varepsilon = e^{-t}$ в выражении для $\Delta(p)$.

Теорема 2.1. *Пусть все корни многочлена* $Q(p)$ *расположены в левой полуплоскости и* $Q(0) \neq 0$, *пусть также функция*

$$\frac{1}{Q(p)\Delta(p)}$$

служит изображением некоторого оригинала $\omega^*(t)$, *тогда оператор обратный к* L_ω *имеет вид*

$$L_\omega^{-1}[f](z) = Q\left(z\frac{d}{dz}\right)\left[\int_0^\infty \omega^*(\varepsilon) f\left(e^{-\varepsilon} z\right) d\varepsilon\right], \tag{2.1}$$

где

$$Q\left(z\frac{d}{dz}\right) = a_0 + a_1 z\frac{d}{dz} + a_2\left(z\frac{d}{dz}\right)^2 + \ldots + a_n\left(z\frac{d}{dz}\right)^n,$$

числа a_k *коэффициенты многочлена* $Q(p)$.

Доказательство. Интегральная компонента оператора L_ω^{-1}, т.е. оператор вида

$$\int_0^\infty \omega^*(\varepsilon) f\left(e^{-\varepsilon} z\right) d\varepsilon,$$

непрерывна в пространстве функций $H(B) \cup C\left(\bar{B}\right)$, поэтому

$$L_\omega^{-1}[f](z) = Q\left(z\frac{d}{dz}\right)\sum_{k=0}^\infty a_k z^k \frac{1}{Q(k)\Delta(k)} = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \frac{Q(k)}{Q(k)\Delta(k)} = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \frac{1}{\Delta(k)}.$$

На основании леммы 1 доказательство закончено.

Следствие 2.1. *Оператор обратный к оператору Римана-Лиувилля либо дифференциальный, либо интегро-дифференциальный.*

Теорема 2.2. *Пусть функция* $\frac{1}{\Delta(p)} = Q(z)$ *есть многочлен, тогда оператор обратный к* L_ω *есть дифференциальный оператор вида*

$$L_\omega^{-1}[f](z) = Q\left(z\frac{d}{dz}\right)[f(z)]. \tag{2.2}$$

Доказательство. Имеем следующие равенства

$$Q\left(z\frac{d}{dz}\right)\sum_{k=0}^\infty a_k z^k = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k Q(k) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \frac{1}{\Delta(k)} \equiv L_\omega^{-1}[f](z).$$

3. Различные случаи обобщенных операторов Римана-Лиувилля

3.1. Пусть $\omega(x) = 1 - x^h, h > 0$ тогда

$$L_\omega[f] = f(0) + z\int_0^1 \left(1 - \varepsilon^h\right) f'(\varepsilon z)\,d\varepsilon = h\int_0^1 \varepsilon^{h-1} f(\varepsilon z)\,d\varepsilon,$$

получаем оператор, который отличается множителем от оператора

$$L_h^{-1}[f] = \int_0^1 \varepsilon^{h-1} f(\varepsilon z)\,d\varepsilon,$$

изученного в работах И.И. Баврина [1, 2], Для вычисления обратного оператора заметим, что

$$\Delta(p) = p\int_0^1 \varepsilon^{p-1}\left(1 - \varepsilon^h\right) d\varepsilon = \frac{h}{h+p},$$

тогда, учитывая, что выражение

$$\frac{1}{\Delta(p)} = \frac{h+p}{h}$$

есть многочлен, по теореме 2.1 получим

$$L_\omega^{-1}[f] = \frac{hf + zf'(z)}{h} = \frac{L_h[f(z)]}{h}. \tag{3.1}$$

3.2. Пусть $\Delta(p) = \prod_{j=1}^m \frac{h_j}{h_j+p}, \quad h_j > 0$. Оригинал функции $\Delta(p)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^m e^{-h_k t} \prod_{j\neq k} \frac{h_j}{h_j - h_k} \to \Delta(p).$$

Из формулы (1.2) установим выражение оператора L_ω

$$L_\omega[f](z) = \prod_{j\neq k} \frac{h_j}{h_j - h_k} \int_0^1 \varepsilon^{h_k - 1} f(\varepsilon z)\,d\varepsilon.$$

При этом обратный оператор L_ω^{-1} есть дифференциальный оператор вида

$$L_\omega^{-1}[f](z) = \prod_{j=1}^m \frac{h_j + L_0}{h_j}.$$

Теория подобных операторов изложена в монографии И.И. Баврина [1, 2].

3.3. Дробная степень оператора $h + z\frac{d}{dz}$. Выберем функцию $\Delta(p)$ в виде

$$\Delta(p) = \frac{h^\alpha}{(h+p)^\alpha}.$$

Учитывая формулу из таблицы преобразований Лапласа

$$\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-ht} t^{\alpha-1} \to \frac{h^\alpha}{(h+p)^\alpha}$$

согласно формуле (1.2), установим выражение оператора L_ω

$$L_\omega[f](z) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-h\varepsilon} \varepsilon^{\alpha-1} f\left(e^{-\varepsilon} z\right) d\varepsilon.$$

После замены переменного $e^{-\varepsilon} = \tau$ мы приходим к следующему выражению оператора L_ω

$$L_\omega[f](z) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} f(\varepsilon z)\,d\varepsilon, h > 0, \alpha > 0.$$

Таким образом, в определении обобщенного оператора Римана-Лиувилля надо положить

$$\omega(x) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 \varepsilon^{h-1} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} d\varepsilon.$$

а) Если $\alpha = n \in N$, то обратный оператор L_ω^{-1} вычисляется по формуле

$$L_\omega^{-1} = \left(h + z\frac{d}{dz}\right)^n,$$

т.е. является дифференциальным.

б) Если $\alpha \notin N$, то обратный оператор L_ω^{-1} имеет вид:

$$L_\omega^{-1}[f](z) \equiv \left(h + z\frac{d}{dz}\right)^\alpha [f](z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \left(h + z\frac{d}{dz}\right)^{n+1} \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-\alpha} f(\varepsilon z)\, d\varepsilon.$$

Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ получим следующее выражение

$$\left(h + z\frac{d}{dz}\right)^{\frac{1}{2}} [f](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(h + z\frac{d}{dz}\right) \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} [f](\varepsilon z)\, d\varepsilon.$$

3.4. Оператор Адамара. Рассмотрим класс функций $w = f(z)$, аналитических в единичном круге $B = \{z : |z| < 1\}$, таких что $f(0) = 0$. Выберем функцию $\Delta(p)$ в виде

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^\alpha}.$$

Учитывая формулу из таблицы преобразований Лапласа

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \to \frac{1}{p^\alpha}$$

согласно формуле (2.1), установим выражение оператора L_ω

$$L_\omega[f](z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \varepsilon^{\alpha-1} f\left(e^{-\varepsilon} z\right) d\varepsilon, \alpha > 0.$$

После замены переменного $e^{-\varepsilon} = \tau$ мы приходим к следующему выражению оператора L_ω

$$L_\omega[f](z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\varepsilon z)}{\varepsilon} d\varepsilon. \tag{3.2}$$

Правая часть формулы (3.2) задает оператор Адамара [12].

а) Если $\alpha = n \in N$, то обратный оператор L_ω^{-1} вычисляется по формуле

$$L_\omega^{-1} = L_0^n,$$

т.е. является дифференциальным.

б) Если $\alpha \notin N$, то обратный оператор L_ω^{-1} имеет вид:

$$L_\omega^{-1}[f](z) \equiv L^\alpha[f](z) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} L^{n+1} \left[\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-\alpha} \frac{f(\varepsilon z)}{\varepsilon} d\varepsilon\right].$$

Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ получим следующее выражение

$$L^{\frac{1}{2}}[f](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L \left[\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{f(\varepsilon z)}{\varepsilon} d\varepsilon\right].$$

3.5. Если $\Delta(p) = \frac{h^2}{h^2+p^2}$ получаем $Q(z) = \frac{h^2+z^2}{h^2}$ и, значит, обратный оператор есть дифференциальный оператор вида

$$L_\omega^{-1} = \frac{h^2 + L_0^2}{h^2}, L_0 = z\frac{d}{dz}.$$

Определим вид прямого оператора L_ω. По формуле из таблицы преобразований Лапласа

$$h \sin ht \to \frac{h^2}{h^2+p^2}.$$

Согласно теореме 2.1 установим выражение оператора L_ω из формулы (2.1)

$$L_\omega [f](z) = \int_0^\infty h \sin(h\varepsilon) f\left(e^{-\varepsilon} z\right) d\varepsilon.$$

В итоге, после замены переменного, имеем

$$L_\omega [f](z) = \int_0^1 \frac{h}{\varepsilon} \sin\left(h \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon z) d\varepsilon.$$

Замечание 1. Здесь имеем $\omega'(x) = -\frac{h}{x}\sin\left(h\ln\frac{1}{x}\right)$, значит $\omega(x) \notin \Omega$.

3.6. Дробная степень оператора $h^2 + L_0^2$.
Выберем

$$\Delta(p) = \frac{(h^2+p^2)^\alpha}{h^{2\alpha}}, h \neq 0, \alpha > 0.$$

На основании формулы из таблицы преобразований Лапласа

$$\frac{\sqrt{\pi}\cdot h}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{th}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(ht) \to \frac{h^{2\alpha}}{(h^2+p^2)^\alpha},$$

здесь $J_{\alpha-\frac{1}{2}}(z)$-функция Бесселя порядка $\alpha-\frac{1}{2}$. Из теоремы 2.1 и формулы (2.1) установим выражение оператора L_ω

$$L_\omega [f](z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{h}{\varepsilon}\left(\frac{h\ln\frac{1}{\varepsilon}}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} J_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(h\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon z) d\varepsilon.$$

а) Если $\alpha = n \in N$, то обратный оператор Римана-Лиувилля есть дифференциальный оператор вида

$$L_\omega^{-1} = \frac{(h^2+L_0^2)^n}{h^{2n}}.$$

б) Если $\alpha \notin N$, то обратный оператор L_ω^{-1} имеет вид:

$$L_\omega^{-1}[f](z) \equiv \left(h^2+L_0^2\right)^\alpha [f](z)/h^{2\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}h^{-2\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_0^1 \varepsilon^{-1}\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{2h}\right)^{n-\alpha+\frac{1}{2}} J_{n-\alpha+\frac{1}{2}}\left(h\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(h^2+L_0^2\right)^{n+1}[f](\varepsilon z) d\varepsilon,$$

т.е. является интегро-дифференциальным оператором.
3.7. Положим

$$\Delta(p) = \sqrt{h+p}e^{\frac{k}{h+p}}; k, h > 0.$$

Из таблицы преобразований Лапласа выберем формулу

$$e^{-ht}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt} \to \frac{1}{\sqrt{h+x}e^{\frac{k}{h+x}}}.$$

На основании теоремы 2.1 и формулы (2.1) найдем выражение оператора L_ω

$$L_\omega [f] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\varepsilon^{h-1}}{\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}} \cos 2\sqrt{k \ln \frac{1}{\varepsilon}} f (\varepsilon z)\, d\varepsilon.$$

Учитывая формулу

$$e^{-ht} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} ch 2\sqrt{kt} \to \frac{1}{\sqrt{h+x}} e^{\frac{k}{h+x}},$$

установим вид обратного оператора L_ω^{-1}

$$L_\omega^{-1} [f] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (h + L_0) \int_0^1 \frac{\varepsilon^{h-1}}{\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}} ch 2\sqrt{k \ln \frac{1}{\varepsilon}} \cdot f (\varepsilon z)\, d\varepsilon.$$

4. Заключение

В работе изложена техника применения интегрального преобразования Лапласа в теории обобщенных операторов Римана-Лиувилля. Найдены замкнутые формулы обращения обобщенного оператора Римана-Лиувилля. Основной результат работы состоит в следующем: продолжить числовую последовательность

$$\Delta (k) = k \int_0^1 r^{k-1} \omega (x)\, dx < \infty, k = 1, 2, ...$$

в полуплоскость $p: \quad Rep = \sigma > \sigma_0 \geq 0$. Проблема обращения обобщенного оператора Римана-Лиувилля решена в том случае, если функция $\Delta (p)$ является изображением Лапласа, а функция $\Delta^{-1} (p)$ имеет степенной рост, т.е.

$$\frac{1}{\Delta (p)} = p^\alpha L (p), \alpha > 0,$$

где $L (p)$ – функция медленно меняющаяся на бесконечности [14].

В работе, в частности, представлена теория дробных степеней оператора Адамара, в наших обозначениях это оператор L_0. Рассмотрена теория дробных степеней обобщенных операторов Адамара: таких как оператор $h + L_0, h > 0$ и оператор $h^2 + L_0^2, h > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин И.И. *Операторный метод в комплексном анализе.* М.: Прометей, 1988. 200 с.
2. Баврин И.И., Матросов В.Л., Яремко О.Э. *Интегральные преобразования и представления функций в действительной и комплексной областях.* М.: Прометей, 2000. 416 с.
3. Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж. *Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара – Маршо в классе гармонических функций* // Сиб. мат. журнал. (2012), Т.53, № 4. С. 752–764.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т. 1.* М.: Наука, 1973. 295 с.
5. Джрбашян М.М. *Обобщенный оператор Римана–Лиувилля и некоторые его применения* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, Т. 32, № 5, С. 1075–1111 .
6. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. *Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка* // Известия АН Армянской ССР. Сер. «Математика». 1968. Т. 3. № 1. С. 3–29.
7. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
8. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
9. Потапов А.А. *Краткое историческое эссе о зарождении и становлении теории дробного интегродифференцирования* // Нелинейный мир. – 2003. Т. 1, вып. № 1–2. С. 69–81.
10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка.* Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.
11. Учайкин В.В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

12. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: Иностранная литература, 1962. 830 с.
13. Чуриков В.А. *Дробный анализ на основе оператора Адамара* // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 312 (Математика и механика. Физика). № 2. С. 16–20.
14. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* М.: Мир, 1984. Т. 2.
15. A.A. Kilbas, H.M Srivastava., J.J. Trujillo *Theory and Applications of Fractional Differential Equations in: Mathematics Studies,* vol. 204, Elsevier, 2006.
16. A.N. Kochubei *Distributed Order Derivatives and Relaxation Patterns* // 2009/5/5. arXiv preprint arXiv:0905.0616.
17. A.N. Kochubei *Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion* // Journal of Mathematical Analysis and Applications.2008. V.340, no. 1. P. 251–282.
18. A.N. Kochubei *General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes* // Integral Equations and Operator Theory. 2011. V.71, no. 4. P. 583–600.

Иван Иванович Баврин,
Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, д.1,
119435., г. Москва, Россия
E-mail: ivbavrin@yandex.ru

Олег Эмануилович Яремко,
Пензенский государственный университет,
ул. Красная, 40,
440038, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru