ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 2 (2016). С. 66-96.

УДК 517.956 + 517.984

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ МНОГОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ: КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Т.Ф. ШАРАПОВ

Аннотация. Рассматривается эллиптический оператор в многомерной области с частой сменой краевого условия Дирихле и третьего краевого условия. Исследуется случай, когда усредненный оператор содержит третье краевое условие, в котором имеется дополнительный коэффициент, порождаемый геометрией смены. Доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному, получены оценки скорости сходимости. Построено полное асимптотическое разложение для резольвенты в случае, когда она действует на достаточно гладкие функции.

Ключевые слова: частая смена, усреднение, равномерная резольвентная сходимость, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 35P15, 35C20, 35B25

1. Введение

Эллиптические краевые задачи с частой сменой краевых условий возникают в разнообразных приложениях. Опишем кратко постановку таких краевых задач. На границе области выделяется подмножество, состоящее из большого количества непересекающихся частей. Данное подмножество зависит от одного или нескольких малых положительных параметров. Мера каждой отдельной части и расстояние между соседними компонентами стремится к нулю при стремлении этих параметров к нулю, в то время как число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет. На этих подмножествах задается граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы – условие Неймана или третье краевое условие. Исследуется поведение решений таких краевых задач, когда малые параметры стремятся к нулю. Рассматривались также случаи, когда описанная смена краевых условий задавалась не на всей границе области, а только на её фиксированной части; на остальной части границы задавалось одно из классических граничных условий.

Вопросы усреднения эллиптических краевых задач в областях с частой сменой граничных условий рассматривалась во многих работах [1]–[14]. Большинство работ посвящено случаю ограниченных областей с достаточно гладкой границей. Основными результатами этих работ было определение вида усредненной (предельной) задачи и доказательство теорем сходимости для решений. Усредненными были краевые задачи для тех же уравнений в тех же областях, но с одним из классических граничных условий вместо частой смены. В этих работах было показано, что вид усредненного оператора, а точнее, граничное условие зависит от отношения между мерами частей границы с разным типом краевых

T.F. Sharapov, On resolvent of multi-dimensional operators with frequent alternation of boundary conditions: critical case.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-31-20037-мол_вед_а (результаты о резольвентной сходимости) и гранта РНФ 14-11-00078 (построение асимптотики резольвенты).

Поступила 28 марта 2016 г.

условий. Большинство результатов о сходимости решений было доказано в смысле слабой или сильной резольвентной сходимости. А именно, решение возмущенной задачи сходится к решению усредненной слабо или сильно в W_2^1 или сильно в L_2. В [1], [6] в ограниченной области с периодической сменой краевого условия Дирихле и Неймана либо третьего краевого условия были описаны усредненные задачи. Сходимость в непериодическом случае изучалась в [3], [4]. Помимо определения вида усредненных задач с частой сменой краевых условий, в некоторых случаях были доказаны оценки скорости сходимости. Для периодической смены краевых условий оценки скорости сходимости для разности решений возмущенных и усредненных задач были выведены в [1], [10]. Схожие оценки для непериодического чередования были получены в [3], [7], [8], [9], [13], [14].

Еще один тип сходимости – равномерная резольвентная сходимость. В [15]–[20] были рассмотрены эллиптические операторы в бесконечной плоской полосе с частым чередованием граничных условий. Равномерная резольвентная сходимость была доказана для всех возможных усредненных операторов, а также для периодического и для непериодического чередования. Были получены оценки скорости сходимости. Подобные результаты с периодической сменой граничных условий были установлены в [21], [22]. В [13], [14] был рассмотрен эллиптический оператор в многомерной неограниченной области с непериодической сменой граничных условий. Была доказана равномерная резольвентная сходимость, а также были получены неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости.

Имеется также много работ, в которых строились асимптотики решений задач с чередованием граничных условий (см., например, [9], [13], [14], [17], [18], [23]–[27]). В [23], [24], [26] были построены асимптотики для двумерных задач с периодическим чередованием граничного условия Дирихле и граничного условием Неймана, а в [9] – с непериодическим чередованием граничного условия Дирихле и третьего краевого условия. Аналогичные результаты были получены в работе [27] для трехмерного цилиндра с частым чередованием граничных условий Дирихле и Неймана на узких поперечных полосах, лежащих на боковой поверхности. В работе [25] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в многомерном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями. На одной из гиперплоскостей было задано периодическое чередование граничных условий Дирихле и Неймана, решение задачи также искалось периодическим. Для решения рассматриваемой задачи было получено полное асимптотическое разложение. В [13], [14] были рассмотрены краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в неограниченной многомерной области с частой периодической сменой граничного условия Дирихле с третьим краевым условием. Для решений рассматриваемых задач в [13] в случае усредненного условия Дирихле было построено полное асимптотическое разложение, а в [14] в случае третьего усредненного условия было получено полное двупараметрическое асимптотическое разложение.

В настоящей работе рассматривается эллиптический оператор в произвольной неограниченной многомерной области, с частым непериодическим чередованием граничных условий. Не исключается случай, когда область ограничена. Изучается случай чередования граничного условия Дирихле и третьего краевого условия. Чередование граничных условий задается на всей границе или на какой-то ее фиксированной части. В последнем случае на оставшейся части границы ставится третье граничное условие. В задаче выделяются два характерных малых параметра, с помощью которых описаны размеры частей границы с первым и третьим краевыми условиями. И при стремлении этих параметров к нулю количество частей подмножеств границы, на которых задано краевое условие Дирихле, неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремится к нулю. Мы рассматриваем случай, когда усредненный оператор содержит третье краевое условие, в котором имеется дополнительный коэффициент, порождаемый геометрией смены. Исследуется поведение резольвенты возмущенного оператора, когда упомянутые малые параметры стремятся к нулю. Первый основной результат – доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному в смысле нормы оператора, действующего из L_2 в L_2, а также получены оценки скорости сходимости. Тем не менее, мы покажем, что, используя специальный граничный корректор, можно получить сходимость возмущенного оператора к усредненному в смысле нормы оператора, действующего из L_2 в W_2^1. Второй основной результат – построено полное двупараметрическое асимптотическое разложение для резольвенты в неограниченной области с дополнительным предположением, что чередование граничных условий имеет периодическую структуру и задано на гиперплоскости, а резольвента действует на достаточно гладкие функции.

2. Постановка задачи

Пусть $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно, Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ с границей класса C^2. Область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной. Через τ обозначим расстояние от точки до границы Ω, измеренное вдоль внутренней нормали. В случае неограниченной области Ω предположим, что существует $\tau_0 > 0$ такое, что переменная τ определена корректно, по крайней мере, при $0 < \tau \leqslant \tau_0$. В случае ограниченной области это условие вытекает из гладкости границы.

Предположим, что в окрестности каждой точки $P \in \partial\Omega$ можно ввести локальные ортогональные координаты $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$ со следующими свойствами: точка $s = 0$ соответствует точке P, координаты $(s_1, \dots, s_{n-1})$ ортогональны в точке P и существует такая константа $\delta > 0$, не зависящая от выбора точки P, что переменные s определены корректно, по крайней мере, в $\{x\colon 0 \leqslant s_i \leqslant \delta,\ i = 1, \dots, n-1,\ 0 < \tau \leqslant \tau_0/2\}$, а якобианы перехода от переменных x к переменным (s, τ) и обратно для всех точек этой области равномерно ограничены некоторой константой, не зависящей от выбора точки P. В случае ограниченной области последнее условие вытекает из гладкости границы.

Через ε обозначим малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – некоторая ограниченная положительная функция.

Пусть граница области Ω состоит из двух непересекающихся частей $\partial\Omega := \overline{\Upsilon \cup \Xi}$. На множестве Υ зададим набор ограниченных непересекающихся множеств $\gamma_\varepsilon^{(i)} \subset \Upsilon$, $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$. В случае, если область Υ ограничена, то $N(\varepsilon)$ – это некоторая целочисленная функция, которая при $\varepsilon \to 0$ стремится к бесконечности. Если область Υ неограничена, то полагаем $N(\varepsilon) = \infty$ для всех ε. Будем считать, что границы $(n-1)$-мерных областей $\gamma_\varepsilon^{(i)}$ состоят из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-2)$-мерных поверхностей класса C^2.

Обозначим через $B_r(M)$ шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M радиуса r. Будем предполагать, что существуют точки $M_\varepsilon^i \in \gamma_\varepsilon^{(i)}$ и положительные числа C_1, C_1, R_1 и R_2, не зависящие от ε такие, что для $i, j = 1, \dots, N(\varepsilon)$ выполняется:

$$C_1\varepsilon \leqslant \min_{i \neq j} |M_\varepsilon^i - M_\varepsilon^j| \leqslant C_2\varepsilon, \tag{2.1}$$

$$B_{R_2\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right) \cap \Upsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^{(i)} \subseteq B_{R_1\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right), \qquad B_{R_1\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right) \cap B_{R_1\varepsilon\eta}(M_\varepsilon^j) = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{2.2}$$

Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим функции, определенные в области Ω и удовлетворяющие условиям $A_{ij} \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_j \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0 \in L_\infty(\Omega)$. Функции A_{ij} и A_0 предполагаются вещественные, A_j – комплекснозначные. Кроме того, функции A_{ij} удовлетворяют условию эллиптичности

$$A_{ij} = \overline{A}_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) z_i \overline{z}_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2, \quad x \in \Omega, \quad z_i \in \mathbb{C}, \tag{2.3}$$

где c_0 – положительная константа, не зависящая от x и z_i.

В настоящей работе рассматривается оператор, зависящий от ε, который мы обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon$. Это оператор с дифференциальным выражением

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A}_j+A_0, \tag{2.4}$$

в Ω, с краевым условием Дирихле на γ_ε и третьим краевым условием:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a\right)u=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon\cup\Xi, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}:=-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\widetilde{\nu}_j\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{n}\overline{A}_j\widetilde{\nu}_j,$$

где $\gamma_\varepsilon := \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)}\gamma_\varepsilon^{(i)}$, $\Gamma_\varepsilon := \Upsilon\backslash\overline{\gamma}_\varepsilon$, $\widetilde{\nu}=(\widetilde{\nu}_1,\widetilde{\nu}_2,...,\widetilde{\nu}_n)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $a=a(x)$ – некоторая вещественная функция, заданная на $\partial\Omega$ и $a\in W_\infty^1(\partial\Omega)$.

Через $\mathfrak{h}_\varepsilon$ мы обозначим замкнутую симметричную полуторалинейную полуограниченную снизу форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_\varepsilon(u,v):=\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j},v\right)_{L_2(\Omega)}\\ +\sum_{j=1}^{n}\left(u,A_j\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}+(A_0u,v)_{L_2(\Omega)}+(au,v)_{L_2(\Gamma_\varepsilon\cup\Xi)}\end{aligned} \tag{2.5}$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$. Здесь $\mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma_\varepsilon)$ – подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на γ_ε. Через $\mathring{W}_2^1(\Omega,Q)$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций из $W_2^1(\Omega)$ с нулевым следом на поверхности Q, лежащей в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Строго определим $\mathcal{H}_\varepsilon$ как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий форме $\mathfrak{h}_\varepsilon(u,v)$.

Выше было сказано, что в окрестности каждой точки P можно ввести локальные ортогональные координаты s. Координаты, соответствующие точкам M_ε^i, будем обозначать через $s^i=(s_1^i,s_2^i,\ldots,s_{n-1}^i)$. Образы множеств $\gamma_\varepsilon^{(i)}$ в переменных s^i обозначим через $\omega_\varepsilon^{(i)}$.

Введем вспомогательную задачу

$$\Delta_\zeta Y_\varepsilon^i=0,\quad \zeta\in S^+,\qquad Y_\varepsilon^i=1,\quad \zeta\in\omega^{(i)},\qquad \frac{\partial Y_\varepsilon^i}{\partial\zeta_n}=0,\quad \zeta\in\{\zeta:\,\zeta_n=0\}\backslash\omega^{(i)},$$

Здесь $S^+=\{\zeta\colon\zeta_n>0\}$, а $\omega^{(i)}$ – множество, полученное растяжением множества $\omega_\varepsilon^{(i)}$ в $(\varepsilon\eta)^{-1}$ раз. Согласно [13, лемма 5.4] решение этой задачи существует и единственно, принадлежит $W_2^1(S^+)$, равномерно ограничено для всех $\zeta\in S^+$, при $\zeta\to\infty$ имеет дифференцируемую асимптотику

$$Y_\varepsilon^i(\zeta)=N_0^i|\zeta|^{-n+2}+O\left(|\zeta|^{-n+1}\right) \tag{2.6}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial Y_\varepsilon^i}{\partial\zeta_j}\right|\leqslant C|\zeta|^{-n+1},\quad \left|Y_\varepsilon^i-N_0^i|\zeta|^{-n+2}\right|\leqslant C|\zeta|^{-n+1}\quad \text{в}\quad \{\zeta\colon\zeta_n>0,\ |\zeta|\geqslant\delta\},\\ &\left|Y_\varepsilon^i\right|\leqslant C\quad \text{в}\quad \{\zeta\colon\zeta_n>0,\ |\zeta|<\delta\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь δ такое, что выполнено вложение $\omega^{(i)}\subset\{\zeta\colon\zeta_n=0,\ |\zeta'|<\delta\}$, а функция Y_ε^i, коэффициент N_0^i и константы C в последних неравенствах, вообще говоря, зависят от выбора множества $\omega^{(i)}$.

Также предположим

(*C*1). *Коэффициенты N_0^i из (2.6) и константы C из (2.7) равномерно ограничены по i и ε.*

Для любого $R_3>0$ через α_ε обозначим

$$\alpha_\varepsilon(s):=\begin{cases}N_0^i, & |s^i|<R_3\varepsilon,\\ 0, & \text{в остальных точках области } \Omega.\end{cases} \tag{2.8}$$

Далее в лемме 3.5 будет показано, что существуют точки M^p на границе Υ и области $Q_p:=\{x\colon 0<s_j^p<b,\ j=1,\dots,n-1,\ \tau=0\}$, $b>0$, что будет выполнено вложение $\bigcup\limits_p Q_p\supset\Upsilon$. Здесь $s^p=(s_1^p,\dots,s_{n-1}^p)$ – ортогональные координаты, соответствующие точкам $M^p\in\Upsilon$.

Наложим ещё одно условие.

(C2). *Существуют функция $\alpha\in W_\infty^1(\partial\Omega)$ и функция $\kappa=\kappa(\varepsilon)$, $\kappa(\varepsilon)\to+0$, $\varepsilon\to+0$ такие, что для всех достаточно малых ε верна равномерная по p оценка*

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}}\frac{1}{|q|+1}\left|\int\limits_{Q_p}(\alpha_\varepsilon-\alpha)\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{b}q\cdot s^p}ds\right|^2\leqslant\kappa^2(\varepsilon), \tag{2.9}$$

где $\cdot$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$. Если пересечение множеств $\overline{\Upsilon}$ и $\overline{\Xi}$ не пусто, то функция α равна нулю на $\overline{\Upsilon}\cap\overline{\Xi}$.

Всюду в работе предполагается, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\eta^{n-2}(\varepsilon)}{\varepsilon}=K_0, \tag{2.10}$$

где $K_0>0$ – некоторая постоянная.

Целью работы является изучение асимптотического поведения резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon\to0$. Обозначим $K:=\alpha K_0G_n$, где $G_n=\dfrac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, Γ – гамма-функция, а функция α определена в (C2). Определим $\mathcal{H}_0$ как оператор в $L_2(\Omega)$ с дифференциальным выражением (2.4) и краевыми условиями

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a\right)u=0\quad\text{на}\quad\Xi,\qquad\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a+K\right)u=0\quad\text{на}\quad\Upsilon. \tag{2.11}$$

Строго введем $\mathcal{H}_0$ как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме $\mathfrak{h}_0(u,v):=\mathfrak{h}_\varepsilon(u,v)+(Ku,v)_{L_2(\Upsilon)}$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения $W_2^1(\Omega)$. Аналогично [14, лемма 3.2], [8, глава 3, §7,8] можно доказать, что область определения оператора $\mathcal{H}_0$ имеет вид

$$D(\mathcal{H}_0)=\{u\in W_2^2(\Omega)\colon \text{выполнены условия (2.11)}\}.$$

Обозначим

$$\mu:=\mu(\varepsilon)=\frac{\eta^{n-2}}{\varepsilon}-K_0. \tag{2.12}$$

Через $\|\cdot\|_{X\to Y}$ обозначим норму оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y. Первым основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть D – компакт в комплексной плоскости, не пересекающийся со спектром оператора $\mathcal{H}_0$, $\lambda\in D$. Существует функция W_ε, определенная в (3.3), такая,* *что для всех достаточно малых ε выполнены неравенства*

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C(\lambda,D)\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\mu+\kappa(\varepsilon)\right), \tag{2.13}$$

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}-(1-W_\varepsilon)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)}\leqslant C(\lambda,D)\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\mu+\kappa(\varepsilon)\right), \tag{2.14}$$

где константа C не зависит от ε, η и W_ε, но зависит от λ и от выбора компакта D.

Вторая часть работы посвящена построению полного асимптотического разложения резольвенты возмущенного оператора, суженной на функции из $L_2(\Omega)$ с дополнительными условиями гладкости. Асимптотику резольвенты будем строить для неограниченной области Ω, лежащей в верхней полуплоскости. А именно, будем считать, что существует $\tau_0>0$ так, что $\Omega\cap\{x:\ 0<x_n<\tau_0\}=\{x:\ 0<x_n<\tau_0\}$. Дополнительно предполагаем, что граница области является кусочно гладкой и состоит из двух непересекающихся частей: $\partial\Omega=\Upsilon\cup\Xi$, где $\Upsilon:=\{x:x_n=0\}$. Потребуем также, чтобы коэффициенты возмущенного оператора и функция $a(x)$ были бесконечно дифференцируемы при $0\leqslant x_n\leqslant\tau_0$, а все эти производные и сами функции были равномерно ограничены при $0\leqslant x_n\leqslant\tau_0$. Будем также считать, что на границе Υ функции $A_{ij}(x)$ равны нулю при $i\neq j$ и единице при $i=j$. Здесь точки M_ε^i удобно пересчитывать не индексом i, а мультииндексом $k\in\mathbb{Z}^{n-1}$, и эти точки имеют вид $M_\varepsilon^k=(\varepsilon a_1k_1,\ldots,\varepsilon a_{n-1}k_{n-1})$. Обозначим через γ множество размерности $(n-1)$ с границей класса C^2, лежащее в $(n-1)$-мерном параллелепипеде $\{x\in\mathbb{R}^{n-1}:\ -\frac{a_i}{2}<x_i<\frac{a_i}{2},\ i=1,\ldots,n-1,\ x_n=0\}$, где a_i – положительные константы. Положим

$$\gamma_\varepsilon:=\bigcup_k\left\{x\in\mathbb{R}^{n-1}:(\varepsilon\eta)^{-1}\left(x-M_\varepsilon^k\right)\in\gamma,\quad k\in\mathbb{Z}^{n-1}\right\}.$$

Также отметим, что в этой части работы дополнительный коэффициент в граничном условии на Υ предельного оператора будет иметь вид $K:=\dfrac{N_0\,(\mu+K_0)}{T_0}$, см. построения четвертого и пятого параграфов. Здесь N_0 – коэффициент при главном члене асимптотики на бесконечности решения вспомогательной задачи, см. (4.24). А константа T_0 представляется равенством $T_0=-\dfrac{1}{|C_n|}\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_i$, где $|C_n|$ – площадь поверхности единичной полусферы в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Пусть f – произвольная функция из $L_2(\Omega)\cap W_2^m(\{x:\ 0<x_n<\tau_0\})$ для всех $m\in\mathbb{N}$, $u_\varepsilon:=(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}f$.

Второй основной результат работы выглядит следующим образом

Теорема 2.2. *Асимптотика функции u_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ имеет вид*

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x,\mu,\eta)=&\left(u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}(x,\mu,\eta)+\chi_0\left(x_n\right)u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}\left(\frac{x}{\varepsilon},x',\mu,\eta\right)\right)\prod_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\chi_1\left(|x-M_\varepsilon^k|\varepsilon^{-1}\eta^{-1/2}\right)\\&+\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\left(1-\chi_1\left(|x-M_\varepsilon^k|\varepsilon^{-1}\eta^{-1/2}\right)\right)u_\varepsilon^{\mathrm{in}}\left(x',\mu,\frac{x-M_\varepsilon^k}{\varepsilon\eta},\eta\right),\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\chi_0(x_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равна нулю при $x_n>\tau_0$ и единице при $x_n<\frac{\tau_0}{3}$, $\chi_1(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $t<1$ и единице при $t>2$, а символы $u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}$, $u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}$, $u_\varepsilon^{\mathrm{in}}$ обозначают асимптотические *ряды*

$$u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}(x,\mu,\eta)=\sum_{q_\varepsilon,q_\eta=0}^{\infty}\sum_{q_l=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}}\varepsilon^{q_\varepsilon}\eta^{q_\eta}\ln^{\vartheta q_l}\eta\ u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x,\mu), \tag{2.16}$$

$$u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}(x',\mu,\xi,\eta)=\mathrm{e}^{\rho(x')x_n}\sum_{q_\varepsilon=1}^{\infty}\sum_{q_\eta=0}^{\infty}\sum_{q_l=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-1}\varepsilon^{q_\varepsilon}\eta^{q_\eta}\ln^{q_l}\eta\ \upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\xi), \tag{2.17}$$

$$u_\varepsilon^{\mathrm{in}}(x',\mu,\zeta,\eta)=\mathrm{e}^{\rho(x')x_n}\sum_{q_\varepsilon,q_\eta=0}^{\infty}\sum_{q_l=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}}\varepsilon^{q_\varepsilon}\eta^{q_\eta}\ln^{\vartheta q_l}\eta\ w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta), \tag{2.18}$$

где $\rho(x'):=\overline{A}_n(x',0)-a(x')$, ϑ *равна нулю при* $(q_\varepsilon,q_\eta)=(0,0)$ *и единице в остальных случаях,* $Q_{q_\varepsilon,q_\eta}:=\min(q_\varepsilon,q_\eta)$. *Коэффициенты рядов (2.16), (2.17) и (2.18) определяются леммами 4.2 и 4.4. В частности, функция* $\upsilon_{1,0,0}$ *имеет вид*

$$\upsilon_{1,0,0}(x',\mu,\xi)=-\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a\right)u_{0,0,0}\Big|_{x_n=0}X(\xi),$$

где функция X *вводится как решение вспомогательной задачи (4.11). Функция* $u_{0,0,0}$ *является решением задачи в* $W_2^2(\Omega)$

$$(\mathcal{L}-\lambda)\,u_{0,0,0}=f,\quad x\in\Omega,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a+K\right)u_{0,0,0}=\varphi,\quad x\in\Upsilon,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a\right)u_{0,0,0}=0,\quad x\in\Xi. \tag{2.19}$$

А функция $w_{0,0,0}$ *имеет вид* $w_{0,0,0}(x',\mu,\zeta)=u_{0,0,0}(x',0,\mu)(1-Y(\zeta))$.

Обсудим кратко результаты работы. Сразу подчеркнем, что результат теоремы 2.1 верен для произвольной структуры чередования краевых условий. Нет также никаких существенных ограничений для частей выделенного подмножества границы с условием Дирихле. Количество частей этих подмножеств может быть конечно или бесконечно, а результат теоремы справедлив вне зависимости от того, ограничена область или нет.

Заметим, что в утверждении теоремы 2.1 имеется только равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному в смысле нормы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$, а сходимость в смысле нормы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)}$ невозможна. Действительно, пусть f – функция из $L_2(\Omega)$. Тогда для $u_\varepsilon:=(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}f$ и $u_0:=(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}f$ запишем соответствующие интегральные тождества:

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon,u_\varepsilon)-\lambda(u_\varepsilon,u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}=(f,u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)},\qquad \mathfrak{h}_0(u_0,u_0)-\lambda(u_0,u_0)_{L_2(\Omega)}=(f,u_0)_{L_2(\Omega)}.$$

Предположим, что резольвента возмущенного оператора сходится к резольвенте усредненного из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, то u_ε сходится к u_0 в норме $W_2^1(\Omega)$. Следовательно, все слагаемые в первом интегральном тождестве сходятся к аналогичным слагаемым во втором интегральном тождестве. Но в левой части второго интегрального тождества есть еще одно слагаемое $(Ku_0,u_0)_{L_2(\Upsilon)}$, поэтому исходное предположение о сходимости u_ε к u_0 неверно. Вместе с тем, сходимости в норме $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$ достаточно для доказательства сходимости спектра возмущенного оператора к спектру усредненного. Кроме того, если воспользоваться специальным граничным корректором, то можно получить и сходимость в норме $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)}$, см. (2.14).

Теорема 2.1 утверждает не только наличие равномерной резольвентной сходимости, но и дает оценку скорости сходимости, см. неравенства (2.13), (2.14). Правые части в этих неравенствах стремятся к нулю в силу (2.10), (2.12) и предположения (C2).

Обсудим предположение (C2). В этом предположении мы вводим функцию α, которая, в свою очередь, определяет функцию K. Эта функция в граничном условии (2.11) для усредненного оператора описывает распределение выделенных подмножеств с граничным условием Дирихле. Для периодической структуры чередования граничных условий функция K существует, и оценка (2.9) выполнена при $\kappa(\varepsilon) = C\varepsilon^{\frac{1}{4}}$, где константа C не зависит от ε – это будет доказано в пятом параграфе. Здесь чередование берется таким же, как и в теореме 2.1. В случае непериодической структуры можно упомянуть пример, когда рассмотрена периодическая структура чередования граничных условий, но при этом немного изменим геометрию и расположение частей выделенного подмножества с граничным условием Дирихле так, чтобы общее количество измененных множеств было относительно меньше, чем количество неизмененных множеств. Тогда неравенство (2.9) все еще остается верным. Отметим также, что предположение (C2) необходимо для доказательства леммы 3.5, которая, в свою очередь, используется для доказательства теоремы 2.1. Доказательство этой леммы основано на неулучшаемых оценках. И это дает нам право предположить, что итоговая оценка в этой лемме не может быть улучшена. Поэтому член $\kappa(\varepsilon)$ в неравенствах (2.13), (2.14) для резольвенты тоже, по-видимому, является неулучшаемым.

Второй основной результат, теорема 2.2, дает полное асимптотическое разложение резольвенты. Чтобы построить такую асимптотику, приходится требовать дополнительную гладкость у функций A_{ij}, A_j, A_0, a и f в окрестности части границы со сменой краевых условий. Также дополнительно полагаем, что смена граничных условий теперь задается строго периодической на гиперплоскости. Коэффициенты рядов строятся как решения некоторой последовательности задач, см. построение четвертого раздела.

Обсудим еще дополнительный коэффициент в граничном условии (2.19). Эту константу K можно будет посчитать двумя способами. Во-первых, она определяется из условия согласования в процессе формального построения асимптотики функции u_ε, см. построение четвертого параграфа, а также равенства (4.26), (4.28). В частности, в конце четвертого параграфа будет показано, что дополнительный коэффициент в равенстве (4.28) будет равен константе K. Во-втором способе коэффициент K можно определить с помощью предположения (C2) для периодической структуры чередования граничных условий, см. построение пятого параграфа. При этом также используются равенства для G_n и T_0. Отметим, что константы, определяемые в обоих случаях, будут совпадать.

3. Резольвентная сходимость

В настоящем параграфе доказывается теорема 2.1.

Пусть $f \in L_2(\Omega)$ – произвольная функция, $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$, $u_0 := (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f$. Введем в рассмотрение матрицу

$$A(x) := \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & \dots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \dots & A_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(x) & A_{n2}(x) & \dots & A_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon^i := A(M_\varepsilon^i),$$

и для каждого $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$ через Q_ε^i обозначим матрицу, определяемую условиями

$$(Q_\varepsilon^i)^T (Q_\varepsilon^i) = (A_\varepsilon^i)^{-1}, \quad (Q_\varepsilon^i)^T (A_\varepsilon^i)(Q_\varepsilon^i) = E,$$

где E – единичная матрица. Матрица Q_ε^i определена неоднозначно с точностью до произведения на ортогональную матрицу. Несложно проверить, что данную ортогональную матрицу можно выбрать так, чтобы $y_n^i = \tau$, где y_n^i – n-я координата вектора $y^i = (y_1^i, \dots, y_{n-1}^i, y_n^i) = Q_\varepsilon^i z^i$, $z^i = (s^i, \tau)$. Далее матрица Q_ε^i будет выбрана именно так. В силу условия (2.3) матрица A симметрична, полуограничена снизу и равномерно ограничена для всех $x \in \overline{\Omega}$. Поэтому матрица Q_ε^i полуограничена снизу и равномерно ограничена для всех i и ε. Следовательно, имеем оценку

$$0 < C|z| \leqslant |Q_\varepsilon^i z| \leqslant C^{-1}|z| \tag{3.1}$$

для всех $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$, малых ε и $z \in \mathbb{R}^n$. Здесь константа C не зависит от ε, i и z.

В предыдущем разделе в окрестности каждой точки M_ε^i на границе области Ω мы ввели ортогональные координаты s^i. В результате перехода от переменных x к переменным y^i, оператор ∇ пересчитается следующим образом: $\nabla = J_1^i \nabla_{y^i}$, где J_1^i – некоторая матрица, для которой справедливы неравенства

$$\left|J_1^i - E\right| \leqslant C|y^i|, \qquad \left|\frac{\partial J_1^i}{\partial y_j^i}\right| \leqslant C, \quad j = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

где константа C не зависит от y^i, i и ε. Пусть $\omega_\varepsilon := \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \omega_\varepsilon^{(i)}$, где, напомним, множества $\omega_\varepsilon^{(i)}$ введены в предыдущем разделе как образы множеств $\gamma_\varepsilon^{(i)}$.

Обозначим $B_\varepsilon^i := \{x\colon |y^i| < R_3\varepsilon\} \cap \Omega$. Здесь R_3 – положительная константа такая, что для всех ε, $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$ выполнены вложения $\omega_\varepsilon^{(i)} \subset B_\varepsilon^i \subseteq B_{\frac{R_1\varepsilon}{2}}(M_\varepsilon^i)$.

Пусть $\chi_2(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < \frac{1}{2}$ и нулю при $t > 1$. Пусть

$$Z_\varepsilon^i(x, \eta) := N_0^i \eta^{n-2} \left(\varepsilon^{n-2}|y^i|^{-n+2} - R_3^{-n+2}\right),$$

$$W_\varepsilon^i(x, \eta) := \left(\chi_2\left(R_3^{-1}\varepsilon^{-1}|y^i|\right) Y_\varepsilon^i\left(\frac{y^i}{\varepsilon\eta}\right) + \left(1 - \chi_2\left(R_3^{-1}\varepsilon^{-1}|y^i|\right)\right) Z_\varepsilon^i(x, \mu, \eta)\right),$$

$$W_\varepsilon(x, \eta) := \begin{cases} W_\varepsilon^i(x, \eta), & x \in B_\varepsilon^i, \quad i = 1, \dots, N(\varepsilon), \\ 0, & \text{в остальных точках области } \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.3}$$

В силу определения функций χ_2 и Y_ε^i, функция W_ε непрерывна в $\overline{\Omega}$, равномерно ограничена для всех $x \in \overline{\Omega}$ и удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant W_\varepsilon \leqslant 1. \tag{3.4}$$

Всюду далее через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от f, u_0, u_ε, W_ε, ε, η и x. А в случае локальных оценок в окрестностях множеств $\omega_\varepsilon^{(i)}$ эти константы C не зависят от выбора конкретного множества $\omega_\varepsilon^{(i)}$. Согласно [28, глава 5, §5.3, неравенство (5.3)] верно

$$\|u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. *Для любой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ верна оценка*

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leqslant C\left(\mathfrak{h}_\varepsilon(u, u) + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2\right).$$

Эта лемма доказывается аналогично [13, лемма 3.1].

Лемма 3.2. *Для любой функции $u \in D(\mathfrak{h}_0)$ верна оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\left(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\right).$$

Доказательство здесь проводится аналогично [13, лемма 3.2]. При доказательстве этой леммы дополнительно мы используем результаты [29, глава 3, §7,8].

В соответствии с определением, функция u_ε удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \lambda(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Дополнительно будем считать, что λ имеет ненулевую мнимую часть, и для таких λ согласно [28, глава 5, §5.3, неравенство (5.3)] верна оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Из леммы 3.1 вытекает

$$C_1\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leqslant \mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

что приводит к неравенству

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Аналогично [14, лемма 3.3] доказывается

Лемма 3.3. *Для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$ выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|v\|^2_{L_2(\partial B_\varepsilon^i)} \leqslant C\|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|v\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)} \leqslant C\varepsilon\|v\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε и v.

Лемма 3.4. *Функция $u_0 W_\varepsilon$ принадлежит $W_2^1(\Omega)$ и для этой функции верны оценки:*

$$\|u_0 W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.8}$$

$$\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.9}$$

$$\|u_0 \nabla W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.10}$$

где константа C не зависит от ε, u_0, f и W_ε.

Доказательство. Доказательство достаточно провести только для вещественных $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ с компактным носителем, поскольку линейные комбинации таких функций плотны в пространстве $W_2^2(\Omega)$. В силу свойств функции Y_ε^i, функции $W_\varepsilon u_0$, $W_\varepsilon \nabla u_0$ принадлежат $L_2(\Omega)$, причем из определения функции W_ε, неравенства (3.4), лемм 3.2, 3.3, следует

$$\|W_\varepsilon \nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{B_\varepsilon^i} |W_\varepsilon|^2 \, |\nabla u_0|^2 \, dx \leqslant C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\nabla u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)} \leqslant C\varepsilon \|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\|W_\varepsilon u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{B_\varepsilon^i} |W_\varepsilon|^2 \, |u_0|^2 \, dx \leqslant C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)} \leqslant C\varepsilon \|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\|u_0 \nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{B_\varepsilon^i} u_0^2 |\nabla W_\varepsilon|^2 dx.$$

Первые два неравенства из утверждении леммы доказаны. Остается проверить, что $u_0 \nabla W_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ и доказать неравенство (3.10).

В интеграле $\int\limits_{B_\varepsilon^i} u_0^2 |\nabla W_\varepsilon|^2 dx$ перейдем к переменным y^i. Замена при переходе к переменным y^i устанавливает соответствия между множествами B_ε^i и множествами $\widetilde{B}_\varepsilon^i := \{y^i \colon |y^i| < R_3\varepsilon, \ y_n^i > 0\}$. В соответствии с определением функции W_ε, проинтегрируем по частям следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{B}_\varepsilon^i} u_0^2 \left|\nabla_{y^i} W_\varepsilon\right|^2 dy^i &= \int\limits_{\partial\widetilde{B}_\varepsilon^i} W_\varepsilon u_0^2 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} dS - \frac{1}{2} \int\limits_{\widetilde{B}_\varepsilon^i} \nabla_{y^i} u_0^2 \cdot \nabla_{y^i} W_\varepsilon^2 dy^i + \int\limits_{\widetilde{B}_\varepsilon^i} W_\varepsilon u_0^2 \Delta_{y^i} W_\varepsilon dy^i \\
&= \int\limits_{\partial\widetilde{B}_\varepsilon^i} W_\varepsilon u_0^2 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} dS - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\widetilde{B}_\varepsilon^i} W_\varepsilon^2 \frac{\partial u_0^2}{\partial \nu} dS + \frac{1}{2} \int\limits_{\widetilde{B}_\varepsilon^i} W_\varepsilon^2 \Delta_{y^i} u_0^2 dy^i \\
&\quad + \int\limits_{\widetilde{B}_\varepsilon^i} W_\varepsilon u_0^2 \Delta_{y^i} W_\varepsilon dy^i.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Тогда в силу определения функции W_ε, принадлежностей u_0, $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} \in L_2(\partial B^i_\varepsilon)$, $u_0 \in W^2_2(\Omega)$, неравенств (3.4), (3.8), (3.9), лемм 3.2, 3.3, неравенств из (3.2), условия ограниченности якобианов и (3.11), получаем:

$$\begin{aligned}\|u_0\nabla W_\varepsilon\|^2_{W^1_2(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\widetilde{B}^i_\varepsilon} u_0^2 \left|\nabla_{y^i} W_\varepsilon\right|^2 dy^i \leqslant C \Bigg(&\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|u_0\|^2_{L_2(\partial B^i_\varepsilon)}\right)^{\frac12} \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \left\|\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right\|^2_{L_2(\partial B^i_\varepsilon)}\right)^{\frac12} \\ &+ \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\nabla u_0\|^2_{L_2(B^i_\varepsilon)} + \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|u_0\|^2_{L_2(B^i_\varepsilon)}\right)^{\frac12} \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\Delta u_0\|^2_{L_2(B^i_\varepsilon)}\right)^{\frac12} \\ &+ \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \left(\|(Y^i_\varepsilon - Z^i_\varepsilon) u_0 \Delta_{y^i}\chi_2\|^2_{L_2\left(\widetilde{B}^i_\varepsilon\right)} + \|u_0 \nabla_{y^i}(Y^i_\varepsilon - Z^i_\varepsilon)\nabla_{y^i}\chi_2\|^2_{L_2\left(\widetilde{B}^i_\varepsilon\right)}\right)\Bigg) \\ &\leqslant C\|u_0\|^2_{W^2_2(\Omega)} \leqslant C\|f\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_0 W_\varepsilon \in W^1_2(\Omega)$ и выполнена оценка (3.10). Лемма доказана. $\square$

Обозначим $\varphi_\varepsilon := u_\varepsilon - (1 - W_\varepsilon)u_0$. В силу последней леммы и определения функции W_ε следует, что $\varphi_\varepsilon \in \mathring{W}^1_2(\Omega, \omega_\varepsilon)$. Для резольвент операторов $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ запишем соответствующие интегральные тождества, взяв φ_ε в качестве тест-функции:

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \lambda(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \qquad \mathfrak{h}_0(u_0, \varphi_\varepsilon) - \lambda(u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Вычислим разность этих тождеств:

$$\begin{aligned}0 &= \mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, \varphi_\varepsilon) - \lambda(u_\varepsilon - u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} + (Ku_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Upsilon)} \\ &= \mathfrak{h}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \lambda\|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} - \mathfrak{h}_\varepsilon(W_\varepsilon u_0, \varphi_\varepsilon) + \lambda(u_0, \varphi_\varepsilon W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} + (Ku_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Upsilon)}.\end{aligned}$$

Откуда получаем интегральное тождество для функции φ_ε:

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \lambda\|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = g_\varepsilon(W_\varepsilon u_0, \varphi_\varepsilon) + (Ku_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Upsilon)}, \tag{3.12}$$

где обозначено:

$$g_\varepsilon(W_\varepsilon u_0, \varphi_\varepsilon) := K^\varepsilon_1 + K^\varepsilon_2,$$

$$\begin{aligned}K^\varepsilon_1 &:= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \left(A^i_\varepsilon u_0 \nabla W_\varepsilon, \nabla\varphi_\varepsilon\right)_{L_2(B^i_\varepsilon)}, \\ K^\varepsilon_2 &:= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Bigg[\left(A - A^i_\varepsilon\right)u_0\nabla W_\varepsilon, \nabla\varphi_\varepsilon\big)_{L_2(B^i_\varepsilon)} - \sum_{j=1}^{n} \left(A_j u_0 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\right)_{L_2(B^i_\varepsilon)} \\ &\quad + (AW_\varepsilon \nabla u_0, \nabla\varphi_\varepsilon)_{L_2(B^i_\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\right)_{L_2(B^i_\varepsilon)} \\ &\quad - \lambda(u_0, \varphi_\varepsilon W_\varepsilon)_{L_2(B^i_\varepsilon)} + (A_0 W_\varepsilon u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(B^i_\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n} \left(W_\varepsilon u_0, A_j \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(B^i_\varepsilon)} \Bigg].\end{aligned}$$

Наш следующий шаг состоит в том, чтобы оценить правую часть (3.12) и получить оценку для φ_ε, а потом оценить норму разности функции $u_\varepsilon - u_0$.

Сначала оценим K^ξ_2. В силу определения функции W_ε, лемм 3.2, 3.3, 3.4 и неравенства

$$\left|A_{ij}(x) - A_{ij}(M^i_\varepsilon)\right| \leqslant C\varepsilon \quad \text{в} \quad B^i_\varepsilon,$$

выводим:

$$|K_2^\varepsilon| \leqslant C\left[\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|u_0\nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon\|^2_{W_2^1(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\right.$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|u_0\nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}+\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|W_\varepsilon\nabla u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon\|^2_{W_2^1(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}$$
$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|W_\varepsilon u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon\|^2_{W_2^1(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\right]\leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Обозначим: $\Gamma_i := \partial B_\varepsilon^i \cap \partial\Omega$, $S_i := \partial B_\varepsilon^i \backslash \partial\Omega$. Используя определение функции W_ε, проинтегрируем по частям следующим образом:

$$K_1^\varepsilon = K_{1,1}^\varepsilon + K_{1,2}^\varepsilon + K_{1,3}^\varepsilon,$$
$$K_{1,1}^\varepsilon := \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left(\nu\cdot A_\varepsilon^i\nabla W_\varepsilon, u_0\varphi_\varepsilon\right)_{L_2(\partial B_\varepsilon^i)},\quad K_{1,2}^\varepsilon := -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left(\mathrm{div}A_\varepsilon^i\nabla W_\varepsilon, \varphi_\varepsilon u_0\right)_{L_2(B_\varepsilon^i)},$$
$$K_{1,3}^\varepsilon := -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left(A_\varepsilon^i\nabla u_0, \varphi_\varepsilon\nabla W_\varepsilon\right)_{L_2(B_\varepsilon^i)} = K_{2,1}^\varepsilon + K_{2,2}^\varepsilon,$$
$$K_{2,1}^\varepsilon := \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left(\left(A_\varepsilon^i\nabla u_0, W_\varepsilon\nabla\varphi_\varepsilon\right)_{L_2(B_\varepsilon^i)} + \left(\mathrm{div}A_\varepsilon^i\nabla u_0, \varphi_\varepsilon W_\varepsilon\right)_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right),$$
$$K_{2,2}^\varepsilon := -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left(\nu\cdot A_\varepsilon^i\nabla u_0, \varphi_\varepsilon W_\varepsilon\right)_{L_2(\partial B_\varepsilon^i)} = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left(\nu\cdot A_\varepsilon^i\nabla u_0, \varphi_\varepsilon W_\varepsilon,\right)_{L_2(\Gamma_i)},$$

где ν – внешняя нормаль к ∂B_ε^i.

Оценим $K_{2,1}^\varepsilon$. В соответствии с определением функции W_ε, леммами 3.2, 3.3 и 3.4, неравенства (3.4), выводим:

$$|K_{2,1}^\varepsilon| \leqslant C\left(\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|W_\varepsilon\nabla u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|\nabla\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|u_0\|^2_{W_2^2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac12}\right)\leqslant C\varepsilon^{\frac12}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Перепишем $K_{1,1}^\varepsilon$ и $K_{1,2}^\varepsilon$ в локальных переменных y^i. Поскольку $\nabla = J_1^i\nabla_{y^i}$, в соответствии с определением функции W_ε, неравенств из (3.2), леммами 3.2, 3.3 и 3.4, неравенства

(3.4) и условия ограниченности якобианов, выводим оценку для $K^\varepsilon_{1,2}$:

$$
\begin{aligned}
|K^\varepsilon_{1,2}| \leqslant & C\left(\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\left(Y^i_\varepsilon - Z^i_\varepsilon\right) u_0 \Delta_{y^i}\chi_2\|^2_{L_2\left(\widetilde{B}^i_\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2\left(\widetilde{B}^i_\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
& + \left.\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|u_0 \nabla_{y^i}(Y^i_\varepsilon - Z^i_\varepsilon)\nabla_{y^i}\chi_2\|^2_{L_2\left(\widetilde{B}^i_\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2\left(\widetilde{B}^i_\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
\leqslant & C\varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(B^i_\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_\varepsilon\|_{W^1_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Далее оценим $K^\varepsilon_{2,2}$. Аналогично доказательству леммы 3.4 в [14], с использованием определения функции W_ε, лемм 3.2, 3.3, 3.4 и неравенства (3.4), получаем

$$|K^\varepsilon_{2,2}| \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_\varepsilon\|_{W^1_2(\Omega)}.$$

Пусть ξ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Sigma := \{\xi\colon |\xi| < R_3,\ \xi_n > 0\}$, $S^1 := \partial\Sigma \backslash \{\xi\colon \xi_n = 0\}$, $\Gamma^1 := \partial\Sigma \cap \{\xi\colon \xi_n = 0\}$. Введем в рассмотрение задачу

$$\Delta_\xi V = 0, \quad \xi \in \Sigma, \qquad \frac{\partial V}{\partial \nu} = 1, \quad \xi \in S^1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \nu} = G_n, \quad \xi \in \Gamma^1,$$

где ν – внешняя нормаль к $\partial\Sigma$, а константа G_n введена в предыдущем разделе. Решение этой задачи существует, принадлежит $W^1_2(\Sigma)$. Сама функция V и ее первые производные равномерно ограничены для всех $\xi \in \overline{\Sigma}$. В окрестности каждой точки M^i_ε введем растянутые координаты ξ^i по правилу $\xi^i = y^i \varepsilon^{-1}$. Обозначим: $\Sigma^i_\varepsilon := \{y^i\colon \xi^i \in \Sigma\}$, $V^i_\varepsilon(y^i) := V(\xi^i)$, $S^i_\varepsilon := \partial\Sigma^i_\varepsilon \backslash \{y^i\colon \xi^i_n = 0\}$, $\Gamma^i_\varepsilon := \partial\Sigma^i_\varepsilon \cap \{y^i\colon \xi^i_n = 0\}$.

Проинтегрируем по частям следующим образом:

$$
\begin{aligned}
0 = & -N^i_0 K_0 \varepsilon \int\limits_{\widetilde{B}^i_\varepsilon} u_0 \varphi_\varepsilon \Delta_{y^i} V^i_\varepsilon dy^i = -N^i_0 K_0 (u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(S^i_\varepsilon)} \\
& - N^i_0 G_n K_0 (u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Gamma^i_\varepsilon)} + N^i_0 K_0 \varepsilon \int\limits_{\widetilde{B}^i_\varepsilon} \nabla_{y^i} V^i_\varepsilon \nabla_{y^i} u_0 \varphi_\varepsilon dy^i.
\end{aligned}
$$

Обозначим:

$$
\begin{aligned}
& K^\varepsilon_{1,4} := K^\varepsilon_{1,1} - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} N^i_0 K_0 \left(u_0, \varphi_\varepsilon\right)_{L_2(S^i_\varepsilon)}, \\
& K^\varepsilon_{1,5} := \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} N^i_0 K_0 \varepsilon (\nabla_{y^i} V^i_\varepsilon, \nabla_{y^i} u_0 \varphi_\varepsilon)_{L_2(\widetilde{B}^i_\varepsilon)}, \\
& K^\varepsilon_3 := (K u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Upsilon)} - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} N^i_0 G_n K_0 (u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Gamma^i_\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Выпишем оценки для $K^\varepsilon_{1,4}$ и $K^\varepsilon_{1,5}$. Переходя в интегралах $K^\varepsilon_{1,4}$ и $K^\varepsilon_{1,5}$ к переменным x, в соответствии с определениями функций W_ε, V^i_ε, неравенств из (3.2), леммами 3.2, 3.3 и

3.4, неравенства (3.4) и условия ограниченности якобианов, выводим

$$|K_{1,4}^{\varepsilon}| \leqslant C\left(\frac{\eta^{n-2}}{\varepsilon} - K_0\right)\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|u_0\|^2_{L_2(\partial B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(\partial B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\mu\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)},$$

$$|K_{1,5}^{\varepsilon}| \leqslant C\left(\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\nabla u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|u_0\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|\nabla\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(B_\varepsilon^i)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\leqslant C\left(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Тогда из полученных оценок на $K_{1,1}^\varepsilon$, $K_{1,2}^\varepsilon$, $K_{1,3}^\varepsilon$, $K_{1,4}^\varepsilon$, $K_{1,5}^\varepsilon$, $K_{2,1}^\varepsilon$ и $K_{2,2}^\varepsilon$ выводим оценку для K_1^ε:

$$|K_1^\varepsilon| \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \mu\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Теперь оценим K_3^ε.

Лемма 3.5. *Для K_3^ε выполнено неравенство*

$$|K_3^\varepsilon| \leqslant C\kappa(\varepsilon)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε, f и φ_ε.

Доказательство. На границе Υ возьмем произвольную точку M^1. В окрестности этой точки введем ортогональные координаты $s^1 = (s_1^1, \ldots, s_{n-1}^1)$. Затем выберем точку $M^2 \in \Upsilon$ так, что для нее выполнено условие $C_1 b < \min|M^2 - M^1| < C_2 b$, где $b > 0$, C_i – положительные константы. В окрестности точки M^2 также введем ортогональные координаты $s^2 = (s_1^2, \ldots, s_{n-1}^2)$. Продолжая аналогичные действия, можно выбрать множество точек M^p, удовлетворяющие условию $C_1 b < \min\limits_{j\neq p}|M^j - M^p| < C_2 b$, и ввести соответствующие им ортогональные координаты $s^p = (s_1^p, \ldots, s_{n-1}^p)$. Обозначим $Q_p := \{x\colon 0 < s_i^p < b,\ i = 1, \ldots, n-1,\ \tau = 0\}$. В силу условия ограниченности якобианов можно выбрать $b > 0$, что будет выполнено вложение $\bigcup\limits_p Q_p \supset \Upsilon$.

Выберем разбиение единицы $1 = \sum\limits_p \widetilde{\chi}_p(x)$, такое, что для каждой из функций $\widetilde{\chi}_p$ выполнено неравенство $0 \leqslant \|\widetilde{\chi}_p\|_{C^2(\mathrm{supp}\ \widetilde{\chi}_p)} \leqslant C$, где константа C не зависит от p. Будем предполагать, что носитель каждой из срезающих функций содержится в кубе Q_p. Пусть $\widetilde{J}_p$ – якобиан замены, возникающий при переходе от переменных x к переменным s^p и удовлетворяющий в Q_p неравенству $\left|\widetilde{J}_p\right| \leqslant C$, где константа C не зависит от p. В результате такой замены устанавливается соответствие между границей Υ и $\bigcup\limits_p Q_p$. Каждая точка $x \in \bigcup\limits_p Q_p$ попадает в конечное число носителей, причем это число ограничено равномерно по p. Обозначим $\beta_\varepsilon := K - K_0 G_n \alpha_\varepsilon$. В соответствии с определением функции α_ε получаем

$$K_3^\varepsilon = (\beta_\varepsilon u_0, \varphi_\varepsilon)_{L_2(\Upsilon)} = \sum_p \int\limits_{\mathrm{supp}\widetilde{\chi}_p} \beta_\varepsilon \widetilde{\chi}_p \widetilde{J}_p u_0 \varphi_\varepsilon ds^p = \sum_p \int\limits_{Q_p} \beta_\varepsilon \widetilde{\chi}_p \widetilde{J}_p u_0 \varphi_\varepsilon ds^p. \tag{3.13}$$

Разложим функцию β_ε в ряд Фурье на Q_p:

$$\beta_\varepsilon(s^p) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} C_q \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{b}q\cdot s^p}, \qquad \sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} |C_q|^2 \leqslant \|\beta_\varepsilon\|^2_{L_2(Q_p)} < \infty.$$

Возьмем теперь функцию $U_p(s^p,\tau) = -\sum\limits_{q\neq 0} C_q \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{b}q\cdot s^p-|q|\tau}}{|q|}$. Несложно проверить, что ряд сходится в $W_2^1(\Sigma_p)$, $\Sigma_p := \{z^p\colon 0<\tau<a,\ s^p\in Q_p\}$, $z^p=(s^p,\tau)$, $a>0$ – произвольная константа. Функция U_p является обобщенным решением краевой задачи

$$\Delta_{z^p}U_p = 0, \quad z^p\in\Sigma_p, \qquad \frac{\partial U_p}{\partial\nu} = \widetilde{\beta}_\varepsilon, \quad s^p\in Q_p,$$

с однородным граничным условием Неймана на боковых гранях Σ_p. Здесь

$$\widetilde{\beta}_\varepsilon := \beta_\varepsilon - \langle\beta_\varepsilon\rangle, \qquad \langle\beta_\varepsilon\rangle := \frac{1}{|Q_p|}\int\limits_{Q_p}\beta_\varepsilon ds. \tag{3.14}$$

Пусть χ_3 – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $\tau<\frac{a}{3}$ и нулю при $\tau>\frac{a}{2}$. Проинтегрируем по частям:

$$0 = -\int\limits_{\Sigma_p}\widetilde{\chi}_p\widetilde{J}_p\chi_3 u_0\varphi_\varepsilon\Delta_{z^p}U_p dz^p = -\int\limits_{Q_p}\widetilde{\chi}_p\widetilde{J}_p u_0\varphi_\varepsilon\frac{\partial U_p}{\partial\nu}ds^p + \int\limits_{\Sigma_p}\nabla_{z^p}U_p\cdot\nabla_{z^p}\left(\widetilde{\chi}_p\widetilde{J}_p\chi_3 u_0\varphi_\varepsilon\right)dz^p. \tag{3.15}$$

Оценим норму $\nabla_{z^p}U_p$ в $L_2(\Sigma_p)$:

$$\|\nabla_{z^p}U_p\|^2_{L_2(\Sigma_p)} = 2\sum_{q\neq 0}|C_q|^2\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-2|q|\tau}d\tau \leqslant C\sum_{q\neq 0}\frac{|C_q|^2}{|q|}.$$

В соответствии с определением функций U_p, равенств из (3.14), последнего неравенства, (3.13), (3.15) и условия ограниченности якобианов следует

$$\begin{aligned}|K_3^\varepsilon| &\leqslant C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}\left(\left(\sum_{q\neq 0}\frac{|C_q|^2}{|q|}\right)^{\frac12} + |\langle\beta_\varepsilon\rangle|\right)\\ &\leqslant C\left(\sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}}\frac{|C_q|^2}{|q|+1}\right)^{\frac12}\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Теперь осталось применить неравенство (2.9), чтобы завершить доказательство. □

Из полученных оценок на K_1^ε, K_2^ε и K_3^ε следует, что

$$\left|g_\varepsilon(W_\varepsilon u_0,\varphi_\varepsilon) + (Ku_0,\varphi_\varepsilon)_{L_2(\Upsilon)}\right| \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac12}+\mu+\kappa(\varepsilon)\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

В силу лемм 3.2, 3.3 и 3.4 теперь имеем

$$\begin{aligned}&\|\varphi_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac12}+\mu+\kappa(\varepsilon)\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)},\\ &\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac12}+\mu+\kappa(\varepsilon)\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Тогда из последних двух неравенств и первого неравенства из леммы 3.4 выводим:

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac12}+\mu+\kappa(\varepsilon)\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.17}$$

Отсюда и из (3.16) следует утверждение теоремы.

Напомним, что при доказательстве использовался тот факт, что λ имел ненулевую мнимую часть. И для таких λ согласно двум последним неравенствам, резольвента оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходится к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0$ при $\varepsilon \to 0$ в операторной норме. Тогда в силу такой сходимости спектр возмущенного оператора сходится к спектру предельного оператора. Поэтому, если λ принадлежит компакту D и этот компакт не пересекается со спектром оператора $\mathcal{H}_0$, то λ равномерно отделено от спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ для достаточно малых ε. Тогда согласно [28, глава 5, §5.3, неравенство (5.3)] верна оценка (3.6). В остальных оценках не использовалось, что мнимая часть λ не равна нулю, а потому все оценки остаются в силе. Теорема 2.1 полностью доказана.

4. Формальное построение асимптотик

В настоящем разделе доказывается теорема 2.2. Всюду далее под $\mathcal{L}$ будем понимать дифференциальное выражение (2.4), а функцию u_ε будем рассматривать как решение краевой задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)\, u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + a\right) u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \cup \Xi. \tag{4.2}$$

В этой части работы мы проведем только формальное построение для решения этой задачи. Обоснование построенных асимптотик проводится аналогично обоснованию асимптотик, приведенных в разделе 7 из [14].

В работе [14] асимптотику решения задачи (4.1), (4.2) строили в виде (2.15). В нашем случае структура рядов (2.16), (2.17), (2.18) будет отличаться. А именно, в [14] каждый из этих бесконечных рядов строился по степеням ε, η, $\frac{\eta^{n-2}}{\varepsilon}$ и $\ln \eta$, а в нашем случае только по степеням ε, η и $\ln \eta$. Кроме того, в настоящей работе каждый из коэффициентов этих рядов зависит от параметра μ. Конечно, можно было бы в асимптотических рядах из [14, теорема 2.2], которые, как уже было сказано, строились по степеням $\frac{\eta^{n-2}}{\varepsilon}$, взять равенство $\varepsilon = \eta^{n-2}$. В итоге, будем иметь бесконечные ряды, в которых отношение $\frac{\eta^{n-2}}{\varepsilon}$ будет константой, а затем можно применить полученные ряды для нашего случая. Однако эти ряды не будут асимптотическими. Поэтому мы будем строить асимптотику решения задачи (4.1), (4.2) в виде (2.15), (2.16), (2.17), (2.18).

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (4.1), (4.2) будем строить на основе метода пограничного слоя [30], метода многих масштабов [31] и метода согласования асимптотических разложений [32]. Функцию u_ε вне малых окрестностей участков границы γ_ε будем искать в виде суммы внешнего разложения и пограничного слоя:

$$u_\varepsilon(x, \mu, \eta) = u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}(x, \eta, \mu) + u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}(x', \eta, \mu, \xi).$$

Внешнее разложение $u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}(x, \mu, \eta)$ будем строить в виде (2.16). Легко видеть, что функция $u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}(x, \mu, \eta)$ является решением уравнения (4.1) и удовлетворяет граничному условию на Ξ, но не удовлетворяет требуемым граничным условиям на γ_ε и Γ_ε. Поэтому в окрестности $\Upsilon := \{x : x_n = 0\}$ строится пограничный слой $u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}(\xi, x', \mu)$ в виде (2.17) с целью удовлетворения граничных условий в (4.2), где $\xi = (\xi', \xi_n) = (x'\varepsilon^{-1}, x_n\varepsilon^{-1})$. Для построения пограничного слоя будем использовать метод пограничного слоя и метод многих масштабов. Сумма внешнего разложения и пограничного слоя не удовлетворяют условию Дирихле на γ_ε. Поэтому в окрестностях точек M_ε^k мы вводим растянутые координаты $\zeta = (\xi''\eta^{-1}, \xi_n\eta^{-1}) = ((x' - M_\varepsilon^k)(\varepsilon\eta)^{-1}, x_n(\varepsilon\eta)^{-1})$, и будем строить асимптотику функции u_ε на основе метода согласования асимптотических разложений в малых окрестностях этих точек M_ε^k в виде (2.18). Целью формального построения является определение вида функций $u_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$, $\upsilon_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$ и $w_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$.

Хотя структура рядов из [14, теорема 2.2] и отличается от нашей, задачи на коэффициенты пограничного слоя и внешнего и внутреннего разложений будут похожи на соответствующие задачи разделов 4, 5 и 6 из [14]. Поэтому в этой части работы мы выпишем только задачи на эти коэффициенты. Разрешимость этих задач можно доказать аналогично [14]. Также все леммы в этой части работы будут приведены без доказательств. Доказательства всех этих лемм можно повторить аналогично [14].

Начнем с построения внешнего разложения. Подставляя разложение (2.16) в (4.1), (4.2), собирая члены с одинаковыми степенями ε, η и $\ln\eta$, получаем уравнения на коэффициенты внешнего разложения:

$$(\mathcal{L}-\lambda)\,u_{0,0,0}=f,\quad x\in\Omega, \tag{4.3}$$

$$(\mathcal{L}-\lambda)\,u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}=0,\quad x\in\Omega,\quad (q_\varepsilon,q_\eta,q_l)\neq(0,0,0), \tag{4.4}$$

а также граничные условия на $u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a\right)u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}=0,\quad x\in\Xi. \tag{4.5}$$

Граничные условия на Υ для коэффициентов внешнего разложения будут определены позднее при построении внутреннего разложения.

Разложим коэффициенты $A_{ij}(x)$, $A_j(x)$ и $A_0(x)$ в ряд Тейлора при $x_n\to 0$, а затем сделаем замену $x_n=\varepsilon\xi_n$:

$$A_{ij}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x_n^k\frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x',0)=\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\xi_n)^k\frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x',0)=\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon\xi_n)^k\frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x',0), \tag{4.6}$$

$$A_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x_n^k\frac{\partial^k A_p}{\partial x_n^k}(x',0)=\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\xi_n)^k\frac{\partial^k A_p}{\partial x_n^k}(x',0),\quad p=0,\dots,n, \tag{4.7}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера-Капелли. Сходимость этих рядов не предполагается, ряды понимаются как асимптотические.

Следуя методу пограничного слоя, потребуем, чтобы сумма функций $u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}$ и $u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}$ удовлетворяла однородному граничному условию Неймана всюду на Υ за исключением точек M_ε^k:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}+\frac{\partial}{\partial\nu}u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}=0,\quad x\in\mathbb{R}^{n-1},\quad x\neq M_\varepsilon^k.$$

Подставим (4.6), (4.7) в (4.2), перепишем теперь второе слагаемое последнего равенства в переменных ξ, заменим функции $u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}$ и $u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}$ на правые части равенств (2.16) и (2.17), соответственно. В полученной сумме соберем члены при старших степенях ε, η и $\ln\eta$, которые приравняем нулю. В результате получим граничные условия для функций $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$:

$$\frac{\partial\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}}{\partial\xi_n}=\Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l},\quad \xi\in\mathbb{R}^{n-1},\quad \xi\neq M^k, \tag{4.8}$$

$$\Psi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}:=\Psi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)=\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a\right)u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}\bigg|_{x_n=0}, \tag{4.9}$$

M^k – образы точек M_ε^k при отображении $x\mapsto\varepsilon^{-1}\xi$ и эти точки имеют вид $M^k=(a_1k_1,\dots,a_{n-1}k_{n-1})$.

Подставляя разложение (2.17) и ряды (4.6), (4.7) в уравнение (4.1), переходя к переменным ξ, и в образовавшихся равенствах выпишем члены с одинаковыми степенями ε, η и $\ln\eta$. Тогда для функций $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ получаем уравнения

$$\Delta_\xi\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}=F_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l},\quad \xi_n>0, \tag{4.10}$$

$$
\begin{aligned}
F_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} := \sum_{l=1}^{q_\varepsilon-1}\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg[&\left(2\xi_n^l A_{ij}^{l,0}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j} - \xi_n^{l-1}B_{ij}^{l-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)\upsilon_{q_\varepsilon-l,q_\eta,q_l}\\
&+\xi_n^{l-1}\left(2A_{ij}^{l,0}\left(\xi_n\rho\frac{\partial}{\partial\xi_i}-\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial x_j}\right)+B_{ij}^l\left(\rho-\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+A_j^{0,l}\right)\upsilon_{q_\varepsilon-(l+1),q_\eta,q_l}\\
&+\left(\xi_n^l\left(B_{ij}^{l-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}+A_{ij}^{l,1}\left(\rho^2-2\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)\right)-2\xi_n^{l-1}A_{ij}^{l,0}\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\right)\upsilon_{q_\varepsilon-(l+2),q_\eta,q_l}\\
&-2\xi_n^l A_{ij}^{l,0}\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial x_j}+\xi_n\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\upsilon_{q_\varepsilon-(l+3),q_\eta,q_l}\\
&+\left(\xi_n^{l+2}A_{ij}^{l,0}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)\upsilon_{q_\varepsilon-(l+4),q_\eta,q_l}+\left(2\rho\frac{\partial}{\partial\xi_n}-\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\partial x_j}\right)\upsilon_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l}\\
&+\left(\rho^2+\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\xi_n\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}-\lambda\right)\upsilon_{q_\varepsilon-2,q_\eta,q_l}+\xi_n\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j^2}+2\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)\upsilon_{q_\varepsilon-3,q_\eta,q_l}\\
&+\left(\xi_n\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)^2\upsilon_{q_\varepsilon-4,q_\eta,q_l}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
A_q^l := \frac{\partial^l A_q}{\partial x_n^l},\ A_{ij}^{l,p} := \frac{\partial^{l+p}A_{ij}}{\partial x_n^l\partial x_i^p},\ A_j^{0,l} := A_0^l - \overline{A}_j^{l+1},\ B_{ij}^l := A_j^l - \overline{A}_j^l - A_{ij}^{l,1},\ p=0,1,\ q\geqslant 0.
$$

Производные коэффициентов A_{ij} и A_q здесь берутся в точках $(x',0)$.

Таким образом, для функций $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ получены задачи (4.8), (4.10) с периодической структурой по переменным ξ'. Согласно методу пограничного слоя, эти функции будем строить экспоненциально убывающими при $\xi_n\to+\infty$. При построении пограничного слоя мы также будем пользоваться методом многих масштабов. Дополнительно будем предполагать, что функции $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ являются $\square$-периодическими по переменным ξ', где $\square := \{\xi : -\frac{a_i}{2}<\xi_i<\frac{a_i}{2},\ \xi_n=0\}$. Тогда исходная краевая задача сводится к задаче в $\Pi=\{\xi : -\frac{a_i}{2}<\xi_i<\frac{a_i}{2},\ \xi_n>0\}$ с периодическими граничными условиями на боковых гранях Π. Здесь и всюду далее решения задач, рассматриваемых в Π, будем искать удовлетворяющие периодическим граничным условиям на боковых гранях Π.

Обозначим: $\boxdot := \{\xi : -\frac{a_i}{2}<\xi_i<\frac{a_i}{2},\ \xi_n=0\}\backslash\{0\}$. Решения краевых задач (4.8), (4.10) мы понимаем в обобщённом смысле. А именно, решения есть функции из пространства $W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющие интегральному тождеству:

$$
-(\nabla_\xi\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l},\nabla_\xi\varpi)_{L_2(\Pi)}+(\Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l},\varpi)_{L_2(\boxdot)}=(F_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l},\varpi)_{L_2(\Pi)}
$$

для всех функций $\varpi\in C^\infty(\overline{\Pi}_R)$, где $\Pi_R=\{\xi : -\frac{a_i}{2}<\xi_i<\frac{a_i}{2},\ 0<\xi_n<R\}$, $R=\mathrm{const}>0$ и функций ϖ, равных нулю при $\xi_n>R$ и удовлетворяющихся периодическим граничным условиям на боковых гранях Π.

Для решения задач (4.8), (4.10), с периодическими краевыми условиями на боковых гранях Π вводим вспомогательную задачу

$$
\Delta_\zeta X=0,\quad \xi\in\Pi,\qquad \frac{\partial X}{\partial\xi_n}=1,\quad \xi\in\boxdot. \tag{4.11}
$$

Решение этой задачи существует, оно единственно, удовлетворяет периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и экспоненциально убывает при $\xi_n\to+\infty$ (см. [14, лемма 5.2]). В малой окрестности нуля выполнено равенство $X=T_0|\xi|^{-n+2}+\widetilde{X}$, где константа T_0, напомним, имеет вид $T_0:=-\dfrac{|\boxdot|}{|C_n|}$, а $\widetilde{X}$ – бесконечно дифференцируемая функция в той же самой окрестности.

Введем сферические координаты (r,θ), где $r=|\xi|$, а θ – координаты на единичной полусфере в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Δ_θ^N оператор Лапласа-Бельтрами на единичной

$(n-1)$-мерной полусфере S_1^{n-1}, расположенной в полупространстве $\{\xi : \xi_n > 0\}$, с краевым условием Неймана на краю полусферы.

В силу [33, глава 5, §2], собственными значениями оператора Δ_θ^N являются числа $s(s+n-2)$, где s — целое положительное число. Эти собственные значения являются простыми. Обозначим через $Y_s(\theta)$ собственные функции оператора Δ_θ^N, отвечающие собственным значениям $s(s+n-2)$. Эти собственные функции выберем ортонормированными в $L_2\left(S_1^{n-1}\right)$.

Согласно [33, глава 5, §2], функция $Y_s(\theta)\left(|\xi|^{-n+2-s}+|\xi|^s\right)$ является решением уравнения Лапласа в малой окрестности нуля, удовлетворяющая граничному условию Неймана на границе этой окрестности при $\xi_n = 0$. В [14, лемма 5.3] была доказана

Лемма 4.1. *Существуют функции X_s, являющиеся решениями задач*

$$\Delta X_s = 0, \quad \xi \in \Pi, \qquad \frac{\partial X_s}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \boxdot,$$

удовлетворяющие периодическим граничным условиям на боковых гранях Π, имеющие в малой окрестности нуля асимптотики

$$X_s(\xi) = Y_s(\theta)\left(|\xi|^{-n+2-s}+|\xi|^s\right) + \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} G_\alpha \xi^\alpha,$$

где $s \geqslant 0$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, а G_α – некоторые постоянные.

Как уже было сказано, разрешимость задач (4.8), (4.10), с периодическими краевыми условиями на боковых гранях Π доказывается аналогично разделам 4 и 5 из [14]. Тогда аналогично разделу 5 из [14], можно доказать, что коэффициенты $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ пограничного слоя имеют вид:

$$\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\xi) = \upsilon^0_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\xi) + \Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l}(x',\mu)X(\xi) + \sum_{i=0}^{q_\eta-q_l-1} A_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)X_i(\xi).$$

Коэффициенты $A_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)$ будут определены в дальнейшем. Полученные решения в малой окрестности нуля имеют асимптотики:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\xi) =&\Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l}(x',\mu)T_0|\xi|^{-n+2} + B^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) + \sum_{i=0}^{\infty} Y_{2,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\xi|^i \\
&+ \sum_{i=0}^{q_\eta+q_\varepsilon-q_l-1} Y_{1,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\xi|^{-n+\widehat{K}_0-i} \\
&+ \overline{\delta}_{q_l,Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-1}\Bigg(\sum_{j=1}^{q_\varepsilon-q_l-1}\sum_{i=0}^{q_\eta-2j+q_\varepsilon-1} Y_{1,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\xi|^{-n+\widehat{K}_j-i}\ln^j|\xi| \\
&+ \sum_{i=0}^{q_\varepsilon-q_l-n+1}\sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{n-1}\right]+1} Y_{3,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\xi|^i\ln^j|\xi| \\
&+ \sum_{j=1}^{q_\varepsilon-q_l-1}\sum_{i=0}^{\infty} Y_{2,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\xi|^{i+j+1}\ln^j|\xi|\Bigg),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\widehat{K}_j := 1 + q_\varepsilon - j - q_l + \overline{\delta}_{q_l,q_\varepsilon-1}$, $\overline{\delta}_{p,q} := 1 - \delta_{p,q}$,

$$
\begin{aligned}
&B^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) := \Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l}(x',\mu)\widetilde{X}_0 + \mathbf{A}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu),\\
&\mathbf{A}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) := G_0 \sum_{i=0}^{q_\eta-q_l-1} A_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Здесь $\widetilde{X}_0$ – первый коэффициент разложения в ряд Тейлора функции $\widetilde{X}$ в малой окрестности нуля.

Замечание 4.1. Для функций $Y_{k,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)$, $q_\varepsilon \geqslant 1$ выполнено равенство:

$$
Y_{k,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta) = \sum_{m=0}^{M_1} \psi_m^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) Y_{m,k,i,j}(\theta),
$$

где $\psi_m^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ – линейная комбинация всех функций $u_{q_\varepsilon-2,q_\eta,q_l}$ и производных этих функций, M_1 – некоторое число, зависящее от верхних индексов функций $\psi_m^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, а $Y_{m,k,i,j}$ – бесконечно дифференцируемые функции на полусфере $\overline{S_1^{n-1}}$, удовлетворяющие граничному условию Неймана на её границе. В справедливости выше упомянутого утверждения при $q_\varepsilon > 2$ можно будет убедиться ниже при согласовании в процессе построения внутреннего разложения. В частности, для функций $Y_{k,i,j}^{2,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)$ это равенство следует из асимптотик функций $\upsilon_{1,q_\eta,0}$ в малой окрестности нуля и равенства (4.10) для правых частей F_{2,q_η,q_l}.

Замечание 4.2. При построении пограничного слоя к функциям $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ были добавлены некоторые решения однородной задачи из леммы 4.1 с произвольными коэффициентами. Согласно лемме 4.1, эта задача имеет бесконечно много решений. При этом из имеющегося бесконечного набора решений из этой леммы мы прибавили только указанные выше. Наш предопределенный выбор добавляемых решений обусловлен требованиями, которые возникают далее при согласовании в процессе построения внутреннего и внешнего разложений.

Обозначим: $\Gamma_0 := \{\xi : \xi_n = 0,\ \xi \neq M^k,\ k \in \mathbb{Z}^{n-1}\}$, $\Pi^\delta := \Pi \cap \{\xi\colon |\xi| > \delta\}$. Поскольку коэффициенты пограничного слоя $\square$-периодические по ξ', то решения рассматриваемых задач в Π периодически продолжим на всё полупространство $\{\xi : \xi_n > 0\}$. Аналогично [14, лемма 5.5] доказывается

Лемма 4.2. *Задачи (4.8), (4.10) разрешимы, функции $\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, $F_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ представимы в виде сумм*

$$
\upsilon_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\xi) = \sum_{q=1}^{M^1_{q_\varepsilon}} \varphi^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)\upsilon^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(\xi),
$$

$$
F_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\xi) = \sum_{q=1}^{M^2_{q_\varepsilon}} \psi^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)F^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(\xi),
$$

где $M^j_{q_\varepsilon}$ – некоторые числа, $\varphi^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, $\psi^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ – конечные линейные комбинации следов коэффициентов внешнего разложения и их производных, $\upsilon^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in W_2^1(\Pi^\delta)$, $\upsilon^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in C^\infty(\Gamma_0 \cup \{\xi : \xi_n > 0\})$, $F^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in C^\infty(\Gamma_0 \cup \{\xi : \xi_n > 0\})$, $F^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in L_2(\Pi^\delta)$. Здесь $\delta > 0$ – произвольное достаточно малое число.

Формальное построение пограничного слоя (2.17) закончено.

Как видно из построения функций пограничного слоя, леммы 4.1 и определения функции X, эти коэффициенты имеют особенность в нуле. Кроме того, напомним, согласно определению функций $v_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, сумма внешнего разложения и пограничного слоя не удовлетворяют условию Дирихле на γ_ε. Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, в окрестностях точек M_ε^k мы строим внутреннее разложение. Это разложение, во-первых, контролирует требуемые граничные условия в окрестности γ_ε, а во-вторых должно быть согласовано на бесконечности с ранее построенными формальными асимптотическими решениями коэффициентов пограничного слоя в малой окрестности точек M^k. Поскольку функции пограничного слоя $\square$-периодические по переменным ξ', то достаточно согласование асимптотических разложений провести в окрестности нуля. В окрестностях точек M_ε^k внутреннее разложение строится также, но уже в переменных $\zeta^k = ((x' - M_\varepsilon^k)(\varepsilon\eta)^{-1}, x_n(\varepsilon\eta)^{-1})$.

Разложим коэффициенты внешнего разложения и функцию $\mathrm{e}^{-\rho(x')x_n}$ в (2.17) в ряд Тейлора по переменной x_n в малой окрестности нуля, а затем сделаем замену $x_n = \varepsilon\eta\zeta_n$:

$$\mathrm{e}^{-\rho(x')x_n} u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon\eta\zeta_n)^i \sum_{j=0}^{i} \frac{(-\rho(x'))^{i-j}}{j!(i-j)!} \gamma^j_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu),$$

где обозначено:

$$\gamma^j_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} := \frac{\partial^j u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}}{\partial x_n^j}(x',0). \tag{4.14}$$

Отсюда получаем:

$$u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x,\mu) = \mathrm{e}^{\rho(x')x_n} \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon\eta\zeta_n)^i \sum_{j=0}^{i} \frac{(-\rho(x'))^{i-j}}{j!(i-j)!} \gamma^j_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\eta). \tag{4.15}$$

Перепишем теперь асимптотики (2.16) и (2.17) в переменных $\zeta = \eta^{-1}\xi$:

$$u_\varepsilon^{\mathrm{ex}}(x,\mu,\eta) + u_\varepsilon^{\mathrm{bl}}(\xi,x',\eta,\mu) = \mathrm{e}^{\rho(x')x_n} \sum_{q_\varepsilon,q_\eta=0}^{\infty} \sum_{q_l=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}} \varepsilon^{q_\varepsilon}\eta^{q_\eta} \ln^{q_l}\eta \; \varphi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta). \tag{4.16}$$

Здесь $\varphi_{0,q_\eta,0}$ и $\varphi_{q_\varepsilon,0,0}$, $q_\varepsilon, q_\eta \geqslant 0$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,q_\eta,0}(x',\mu,\zeta) =& \gamma^0_{0,q_\eta,0}(x',\mu) + \rho_\varepsilon\Bigg(\Big(\Psi_{0,q_\eta,0}(x',\mu)T_0 + A_0^{1,q_\eta-1,0}(x',\mu)\Big)|\zeta|^{-n+2} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} Y_{1,i,0}^{1,q_\eta+1+i,0}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{-n+1-i}\Bigg), \\
\varphi_{q_\varepsilon,0,0}(x',\mu,\zeta) =& \gamma^0_{q_\varepsilon,0,0}(x',\mu) + \overline{\delta}_{q_\varepsilon,0}B^{q_\varepsilon,0,0}(x',\mu) + \rho_\varepsilon\Bigg(\Psi_{q_\varepsilon,0,0}(x',\mu)T_0|\zeta|^{-n+2} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} Y_{1,i,0}^{q_\varepsilon+1,i+1,0}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{-n+1-i}\Bigg),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

где $\rho_\varepsilon := \dfrac{\varepsilon}{\eta^{n-2}}$, $\overline{\delta}_{p,q} := 1 - \delta_{p,q}$. Формулы для остальных $\varphi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(\zeta,x',\mu) = {} & \sum_{i=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-\rho(x'))^{i-j}}{j!(i-j)!} \gamma^j_{q_\varepsilon-i,q_\eta-i,q_l}(x',\mu)\zeta_n^i \\
& + \rho_\varepsilon \Bigg(\Big(\Psi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)T_0 + A_0^{q_\varepsilon+1,q_\eta-1,q_l}(x',\mu) \Big) |\zeta|^{-n+2} \\
& + \sum_{j=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l} \sum_{i=0}^{\infty} Y_{1,i,j}^{q_\varepsilon+1,q_\eta-\widetilde{K}_j+i,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{-n+\widetilde{K}_j-i}\ln^j|\zeta| \Bigg) \\
& + \overline{\delta}_{q_l,Q_{q_\varepsilon,q_\eta}} \sum_{j=1}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l} \sum_{i=0}^{q_\eta-2} Y_{2,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta-2-i,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{i+2}\ln^j|\zeta| + B^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) \\
& + \sum_{i=0}^{q_\eta-(q_l+1)} Y_{2,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta-i,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^i + \sum_{j=1}^{P_1}\sum_{i=0}^{P_2} Y_{6,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^i\ln^j|\zeta|,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

где $Q_{q_\varepsilon,q_\eta} := \min(q_\varepsilon,q_\eta)$, $q_\eta,q_\varepsilon,q_l \geqslant 0$, P_1,P_2 – целые числа, зависящие от n, $\widetilde{K}_j := Q_{q_\varepsilon,q_\eta} - j + 1 - q_l + \overline{\delta}_{q_l,Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-1}$. В силу метода согласования асимптотических разложений и учитывая коэффициент $\mathrm{e}^{\rho(x')x_n}$ в (2.18), члены внутреннего разложения имеют следующие асимптотики на бесконечности:

$$w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} = \varphi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}, \quad \zeta\to\infty, \quad \zeta_n>0. \tag{4.19}$$

Введем сферические координаты (ρ,θ), где $\rho = |\zeta|$, а θ – координаты на единичной полусфере S_1^{n-1}. Далее, перепишем функции $\varphi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(\zeta,x',\mu) = {} & T^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) + \rho_\varepsilon \Big(\Psi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)T_0 + A_0^{q_\varepsilon+1,q_\eta-1,q_l}(x',\mu) \Big) |\zeta|^{-n+2} \\
& + \sum_{j=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l} \sum_{i=0}^{\infty} Y_{4,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{-n+\widetilde{K}_j-i}\ln^j|\zeta| \\
& \sum_{j=1}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l} \sum_{i=0}^{q_\eta-2} Y_{5,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{i+2}\ln^j|\zeta| \\
& + \sum_{i=0}^{q_\eta-(q_l+1)} Y_{5,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^i + \sum_{j=1}^{P_1}\sum_{i=0}^{P_2} Y_{6,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^i\ln^j|\zeta|,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

где

$$T^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} := \gamma^0_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} + \varrho B^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} = \varrho\left(\mathbf{A}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} + \Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l}\widetilde{X}_0\right) + \gamma^0_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}, \ \varrho := \varsigma\overline{\delta}_{q_\varepsilon,0}. \tag{4.21}$$

Здесь функция ς равна нулю при $q_l = Q_{q_\varepsilon,q_\eta} \neq 0$ и единице в остальных случаях, а функции $Y_{k,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
& Y_{4,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} := \frac{1}{\rho_\varepsilon} Y_{1,i,j}^{q_\varepsilon+1,q_\eta-1-\widetilde{K}_j+i,q_l}, \qquad Y_{5,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} := Y_{2,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta-2-i,q_l}, \\
& Y_{5,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} := Y_{2,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta-i,q_l} + \sum_{i=1}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-\rho)^{i-j}}{j!(i-j)!} \gamma^j_{q_\varepsilon-i,q_\eta-i,q_l}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Функции $\mathbf{A}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ определены в (4.13).

Теперь выпишем задачи на коэффициенты внутреннего разложения. Для этого разложим функцию f в ряд Тейлора при $x_n \to 0$, делая замену $x_n = \varepsilon\eta\zeta_n$, подставляя (2.18) в (4.1), (4.2) и собирая члены с одинаковыми степенями ε, η и $\ln\eta$. В результате получаем уравнения и граничные условия для функций $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$:

$$\begin{gathered}\Delta_\zeta w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} = G_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}, \quad \zeta \in S^+,\\ w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} = 0, \quad \zeta \in \Gamma_1, \qquad \frac{\partial w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}}{\partial \zeta_n} = 0, \quad \zeta \in \Gamma_2.\end{gathered} \tag{4.23}$$

Здесь $S^+ = \{\zeta : \zeta_n > 0\}$, $\Gamma_1 := \{\zeta \in \mathbb{R}^n :\ \zeta' \in \gamma,\ \zeta_n = 0\}$, $\Gamma_2 := \{\zeta : \zeta_n = 0\}\backslash\overline{\Gamma}_1$,

$$\begin{aligned}G_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} :=& \sum_{l=1}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}} \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg[\left(2\zeta_n^l A_{ij}^{l,0} \frac{\partial^2}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} - \zeta_n^{l-1} B_{ij}^{l-1} \frac{\partial}{\partial\zeta_j}\right) w_{q_\varepsilon-l,q_\eta-l,q_l}\\
&+ \zeta_n^{l-1}\left(2A_{ij}^{l,0}\left(\zeta_n\rho\frac{\partial}{\partial\zeta_i} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta_i\partial x_j}\right) + B_{ij}^l\left(\rho - \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + A_j^{2,l}\right) w_{q_\varepsilon-(l+1),q_\eta-(l+1),q_l}\\
&+ \left(\zeta_n^l\left(B_{ij}^{l-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_j} + A_{ij}^{l,1}\left(\rho^2 - 2\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\right)\right) - 2\zeta_n^{l-1}A_{ij}^{l,0}\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\right) w_{q_\varepsilon-(l+2),q_\eta-(l+2),q_l}\\
&- 2\zeta_n^l A_{ij}^{l,0}\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial x_j} + \zeta_n\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) w_{q_\varepsilon-(l+3),q_\eta-(l+3),q_l}\\
&+ \left(\zeta_n^{l+2}A_{ij}^{l,0}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right) w_{q_\varepsilon-(l+4),q_\eta-(l+4),q_l} + \left(2\rho\frac{\partial}{\partial\zeta_n} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta_j\partial x_j}\right) w_{q_\varepsilon-1,q_\eta-1,q_l}\\
&+ \left(\rho^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \zeta_n\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta_j} - \lambda\right) w_{q_\varepsilon-2,q_\eta-2,q_l} + \zeta_n\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j^2} + 2\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right) w_{q_\varepsilon-3,q_\eta-3,q_l}\\
&+ \left(\zeta_n\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)^2 w_{q_\varepsilon-4,q_\eta-4,q_l}\Bigg], \quad A_j^{2,l} := A_j^{0,l} + \frac{\partial^l f}{\partial x_n^l}.\end{aligned}$$

Производные коэффициентов A_{ij} и A_j, а также производные функции f здесь берутся в точках $(x',0)$. Таким образом, функции $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ внутреннего разложения являются решениями задач (4.23), (4.19). Для исследования разрешимости этих задач нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Напомним, что функции $Y_s(\theta)$ были введены в предыдущем разделе как собственные функции оператора Δ_θ^N, отвечающие собственным значениям $s(s+n-2)$. Согласно [33, глава 5, §2], функция $Y_s(\theta)\left(|\zeta|^s + |\zeta|^{-n+2-s}\right)$ является решением уравнения Лапласа на бесконечности. В работе [14, Лемма 6.2] была доказана

Лемма 4.3. *Существуют функции Ψ_s, являющиеся решениями задач*

$$\Delta\Psi_s = 0, \quad \zeta \in S^+, \qquad \Psi_s = 0, \quad \zeta \in \Gamma_1, \qquad \frac{\partial\Psi_s}{\partial\zeta_n} = 0, \quad \zeta \in \Gamma_2,$$

имеющие при $\zeta \to \infty$ асимптотику

$$\Psi_s(\zeta) = Y_s(\theta)\left(|\zeta|^s + |\zeta|^{-n+2-s}\right) + \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} U_\alpha \zeta^\alpha |\zeta|^{-2|\alpha|-n+2},$$

где $s \geqslant 0$, U_α – некоторые постоянные.

Для решения задач (4.23) мы будем пользоваться задачей (2.6). В задаче (2.6) в качестве множества $\omega^{(i)}$ возьмем множество Γ_1 и обозначим через Y решение уже измененной задачи (2.6). Согласно [14, лемма 5.4], решение этой задачи существует, единственно и при $\zeta\to\infty$ имеет асимптотику

$$Y(\zeta)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}N_\alpha\zeta^\alpha|\zeta|^{-2|\alpha|-n+2}, \tag{4.24}$$

где N_α – некоторые постоянные. Для дальнейшего построения асимптотику функции $Y(\zeta)$ на бесконечности представим в виде:

$$Y(\zeta)=N_0|\zeta|^{-n+2}+\sum_{i=0}^{\infty}\widetilde{Z}_{1,i,0}(\theta)|\zeta|^{-n+1-i}.$$

Здесь $\widetilde{Z}_{k,i,0}$ – бесконечно дифференцируемые функции на единичной полусфере S_1^{n-1}, удовлетворяющие граничному условию Неймана на ее границе. Сходимость этого ряда не предполагается, ряд понимается как асимптотический.

Разрешимость задач (4.23), (4.20) доказывается аналогично разделу 6 из [14]. Тогда согласно разделу 6 из [14], можно доказать, что коэффициенты $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ внутреннего разложения имеют вид:

$$w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta)=\mathbf{T}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)(1-Y(\zeta))+\overline{\delta}_{q_\varepsilon,0}\left(\sum_{i=0}^{q_\eta-(q_l+1)}C_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)\Psi_i(\zeta)+w^0_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta)\right),$$

где функции $\mathbf{T}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ имеют вид:

$$\mathbf{T}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}:=T^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}-\overline{\delta}_{q_\varepsilon,0}C_0^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l},$$

а коэффициенты $C_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)$ будут определены ниже. Полученные решения имеют на бесконечности следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta)=&T^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)+\mathbf{B}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)\zeta|^{-n+2}+\sum_{i=0}^{q_\eta-(q_l+1)}Z_{2,i,0}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^i\\&+\sum_{j=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l}\sum_{i=0}^{\infty}Z_{1,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{-n+\widetilde{K}_j-i}\ln^j|\zeta|\\&+\sum_{j=1}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l}\sum_{i=0}^{q_\eta-2}Z_{2,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^{i+2}\ln^j|\zeta|\\&+\sum_{i=0}^{Q_{q_\varepsilon,q_\eta}-q_l-n+2}\sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{n-1}\right]+1}Z_{3,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)|\zeta|^i\ln^j|\zeta|,\end{aligned}$$

где $\mathbf{B}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ имеют вид:

$$\mathbf{B}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}:=-T^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}N_0+\overline{\delta}_{q_\varepsilon,0}\mathbf{C}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l},\qquad \mathbf{C}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}:=C_0^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}+U_0\sum_{i=0}^{q_\eta-(q_l+1)}C_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}. \tag{4.25}$$

Замечание 4.3. Для функций $Z_{k,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)$ верно равенство:

$$Z_{k,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)=\sum_{m=0}^{M_1}\psi_m^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)Y_{m,k,i,j}(\theta),$$

где $\psi_m^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ – линейная комбинация всех функций $u_{q_\varepsilon-1,q_\eta-1,q_l}$ и производных этих функций, M_1 – некоторое число, зависящее от верхних индексов функций $\psi_m^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, а $Z_{m,k,i,j}$ – бесконечно дифференцируемые функции на полусфере $\overline{S_1^{n-1}}$, удовлетворяющие граничному условию Неймана на ее границе. В справедливости этого утверждения можно убедиться чуть ниже. В частности, для функций $Z_{k,i,0}^{1,q_\eta,0}(x',\mu,\theta)$ выполнено равенство:

$$Z_{k,i,0}^{1,q_\eta,0}(x',\mu,\theta)=\sum_{m=0}^{M_1}\psi_m^{1,q_\eta,0}(x',\mu)Z_{m,k,i,0}(\theta),$$

где $\psi_m^{1,q_\eta,0}$ – линейная комбинация функций $u_{0,q_\eta-1,0}$ и производных этих функций. Это равенство следует из асимптотики функций $w_{0,q_\eta-1,0}$ на бесконечности и правых частей $G_{1,q_\eta,0}$.

Вернемся к построению функций $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$. Асимптотики функций $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ на бесконечности должны удовлетворять (4.20). В результате приходим к равенствам:

$$\mathbf{B}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}=\rho_\varepsilon\left(T_0\Psi_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}+A_0^{q_\varepsilon+1,q_\eta-1,q_l}\right),\qquad Z_{2,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)=Y_{5,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta),\tag{4.26}$$

$$Z_{1,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)=Y_{4,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta),\qquad Z_{3,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta)=Y_{6,i,j}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\theta).\tag{4.27}$$

Первое равенство из (4.26) является условием, при котором разрешимы задачи на функции $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$. Справедливость второго равенства из (4.26) и равенств из (4.27) доказывается аналогично разделу 7 из [14]. Из равенств (4.26), (4.27) определяются коэффициенты $A_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)$ и $C_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)$, рассмотренные в (4.13) и (4.25), соответственно. Напомним, что эти коэффициенты мы добавили с решениями из лемм 4.1, 4.3 к функциям $v_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ пограничного слоя и к $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ внутреннего разложения, соответственно. И каждые из этих коэффициентов являются линейными комбинациями всех соответствующих функций внешнего разложения и производных этих функций. Справедливость этого утверждения следует из замечаний 4.1 и 4.3, равенств для правых частей функций $G_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, равенств из (4.26), (4.27) и определения оператора Δ_θ^N. Асимптотика функции Y и равенства (4.26), (4.27) объясняют выбор решений однородной задачи в пограничном слое, обсуждавшийся выше в замечании 4.2. Из первого равенства в (4.26) и из (2.12), (4.13), (4.14) и (4.21) получаем граничные условия для оставшихся членов внешнего разложения $u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+a+\frac{N_0\,(\mu+K_0)}{T_0}\right)u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}=&\frac{\mu+K_0}{T_0}\Bigg(-N_0\left(\varrho\mathbf{A}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}+\Psi_{q_\varepsilon-1,q_\eta,q_l}\widetilde{X}_0\right)\\&+\overline{\delta}_{q_\varepsilon,0}\mathbf{C}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}\Bigg)-\frac{A_0^{q_\varepsilon,q_\eta-1,q_l}}{T_0}\quad\text{при}\quad x\in\Upsilon.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Здесь постоянная $\widetilde{X}_0$ и функция ϱ определены в (4.11) и (4.21), соответственно. Ясно, что знаменатели в этих равенствах не равны нулю, поскольку T_0 отлична от нуля (см. асимптотику функции X), а ρ_ε стремится к постоянной при $\varepsilon\to0$ в силу (2.10). Кроме того, отметим, что при $(q_\varepsilon,q_\eta,q_l)=(0,0,0)$ правая часть (4.28) равна нулю в силу определений функций ϱ, $\mathbf{A}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, $\mathbf{C}^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ и $A_0^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$. Соотношения (4.3), (4.4), (4.5) и (4.28) определяют задачи на коэффициенты $u_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$.

Замечание 4.4. При построении коэффициентов внутреннего разложения мы добавили некоторые решения однородной задачи из леммы 4.3 с произвольными коэффициентами $C_i^{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu)$. Согласно лемме 4.3, эта задача имеет бесконечно много решений. При этом из имеющегося бесконечного набора решений из этой леммы мы прибавили только указанные выше. Добавление этих функций достаточно для того, чтобы асимптотики построенных членов внутреннего разложения удовлетворяли (4.20). Таким образом, наш априорный выбор добавляемых решений обусловлен требованиями, которые возникли при согласовании с коэффициентами внутреннего разложения.

Обозначим $\Gamma_3 := \{\zeta : \zeta_n \geqslant 0,\ \zeta \notin \partial\Gamma_1 \times \{0\}\}$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что будет выполнено вложение $\partial\Gamma_1 \subset \{\zeta : |\zeta'| < \delta,\ \zeta_n = 0\}$. Здесь $\partial\Gamma_1$ понимается как граница множества Γ_1 размерности $n-1$. Аналогично [14, лемма 6.3] доказывается

Лемма 4.4. *Задачи (4.23) разрешимы, функции $w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ и $G_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ представимы в виде сумм*

$$w_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta) = \sum_{q=1}^{M^1_{q_\varepsilon,q_\eta}} \rho^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) w^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(\zeta),$$

$$G_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu,\zeta) = \sum_{q=1}^{M^2_{q_\varepsilon,q_\eta}} \phi^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(x',\mu) G^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}(\zeta),$$

где $M^i_{q_\varepsilon,q_\eta}$ – некоторые числа, $\rho^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$, $\phi^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l}$ – конечные линейные комбинации следов коэффициентов внешнего разложения и их производных, $w^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in C^\infty(\Gamma_3)$, $w^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in W^1_2(\{\zeta : \zeta_n > 0,\ |\zeta| < \delta\})$, $G^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in C^\infty(\Gamma_3)$, $G^q_{q_\varepsilon,q_\eta,q_l} \in L_2(\{\zeta : \zeta_n > 0,\ |\zeta| < \delta\})$.

Обозначим $\Omega_{\tau_0-\delta} := \{x\colon 0 < \tau < \tau_0 - \delta\}$.

Лемма 4.5. *Пусть функции $f \in W^m_2(\Omega_{\tau_0}) \cap L_2(\Omega)$ и $\varphi \in W^{m+1}_2(\Upsilon)$ для всех $m \in \mathbb{N}$ голоморфны по μ в норме $W^m_2(\Omega_{\tau_0}) \cap L_2(\Omega)$ и $W^{m+1}_2(\Upsilon)$, соответственно, функция u – решение задачи*

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}-\lambda)\,u = f, \quad x \in \Omega,\\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + a + \frac{N_0\,(\mu+K_0)}{T_0}\right)u = \varphi, \quad x \in \Upsilon, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + a\right)u = 0, \quad x \in \Xi.\end{gathered} \tag{4.29}$$

Тогда эта задача разрешима в $W^2_2(\Omega)$, для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любого $\delta > 0$ функция u принадлежит $W^{m+2}_2(\Omega_{\tau_0-\delta})$, голоморфна по μ в норме $W^{m+2}_2(\Omega_{\tau_0-\delta}) \cap W^2_2(\Omega)$ и верна оценка

$$\|u\|_{W^{m+2}_2(\Omega_{\tau_0-\delta})} \leqslant C,$$

где константа C не зависит от u, f, μ и φ, но зависит от m и δ.

Доказательство. Разрешимость задачи при $\mu = 0$ следует из предположения, что λ не принадлежит спектру оператора $\mathcal{H}_0$. Следовательно, существует обратный ограниченный оператор $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\colon L_2(\Omega) \to W^2_2(\Omega)$.

Пусть χ_4 – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $x_n > \frac{\tau_0}{2}$ и единице при $0 < x_n < \frac{\tau_0}{3}$. Сделаем замену функции u:

$$v(x,\mu) = u(x,\mu)\psi_0(x_n,\mu), \qquad \psi_0(x_n,\mu) := 1 - \chi_4(x_n)\left(\mathrm{e}^{-C_0\mu x_n} - 1\right), \qquad C_0 := \frac{N_0}{T_0}.$$

В силу (4.29) функция v есть решение операторного уравнения $(\mathcal{H}_0 - \lambda - \mu L_0)\,v = F$, где $F := \psi_0 f$, а L_0 – ограниченный оператор из $W^1_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и имеет вид

$$L_0 := \frac{\psi_1}{\psi_0}\left(\overline{A}_n - A_n - A_{nn} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{jn}}{\partial x_j}\right) + A_{nn}\frac{\psi_2}{\psi_0} + \frac{2\psi_1}{\psi_0}\sum_{j=1}^n A_{nj}\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{4.30}$$

где

$$\psi_1 := \frac{d\chi_4}{dx_n} + \mathrm{e}^{-C_0\mu x_n}(1-\chi_4), \qquad \psi_2 := \frac{d^2\chi_4}{dx_n^2} - \mathrm{e}^{-C_0\mu x_n}\left(2\frac{d\chi_4}{dx_n} + C_0\mu(1-\chi_4)\right).$$

Отметим, что знаменатели в (4.30) не равны нулю, поскольку функция ψ_0 стремится к постоянной при $\mu \to 0$. Из определения операторов L_0 и $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ следует, что $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} L_0$

является ограниченным оператором в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что функция v представляется равенством $v = (I - \mu(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} L_0)^{-1} (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} F$, которое доказывает разрешимость задачи. Тогда, раскладывая оператор $(I - \mu(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} L_0)^{-1}$ в ряд Неймана и используя определение функции v, устанавливаем утверждаемую голоморфность функции u по μ в норме $W_2^2(\Omega)$.

В силу гладкости функций f и φ, голоморфности этих функций по μ и теорем о повышении гладкости [29, глава 4, §2] устанавливаем, что функция u для любого целого $m > 0$ и для любого $\delta > 0$ принадлежит пространству $W_2^{m+2}(\Omega_{\tau_0 - \delta})$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^{m+2}(\Omega_{\tau_0-\delta})} \leqslant C \left(\|f\|_{W_2^m(\Omega_{\tau_0})} + \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^{m+1}(\Upsilon)} \right).$$

Тогда индукцией по m несложно доказать утверждение леммы о голоморфности функции u по μ в норме $W_2^{m+2}(\Omega_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^2(\Omega)$. □

Согласно последней лемме, коэффициенты внешнего разложения голоморфны по μ. Тогда отсюда и из равенств для функций пограничного слоя и внутреннего разложения, вытекает, что коэффициенты пограничного слоя и внутреннего разложения также голоморфны по μ в нормах $W_2^1(\Pi^\delta)$ и $W_2^1(\zeta\colon \zeta_n > 0,\ |\zeta| < \delta)$, соответственно. В силу предыдущей леммы, функции $\varphi^q_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$, $\psi^q_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$ и $\rho^q_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$, $\phi^q_{q_\varepsilon, q_\eta, q_l}$, рассматриваемые в леммах 4.2 и 4.4, принадлежат $W_2^m(\Upsilon)$ для всех $m \geqslant 0$. Формальное построение внешнего разложения (2.16) и внутреннего разложения (2.18) закончено. Обоснование построенных асимптотик проводится аналогично обоснованию асимптотик из [14, раздел 7]. В процессе обоснования будут получены всевозможные оценки норм как коэффициентов пограничного слоя, внешнего и внутреннего разложений, так и оценки остатков. При этом все константы в этих неравенствах будут равномерно ограничены по ε, η и μ. Данное утверждение следует из леммы 4.5 и явного вида функций пограничного слоя и внутреннего разложения.

5. Точность оценки

В данном разделе мы обсудим точность оценок, установленных в теореме 2.1. Вначале покажем, что оценка (2.9) сохраняется для периодической структуры чередования граничных условий. Для примера рассмотрим гиперплоскость $\Upsilon := \{x\colon x_n = 0\}$, и на ней введем множество γ_ε. Это множество задается таким же, как и в предыдущем параграфе. Пусть $N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, $[\cdot]$ – целая часть числа, $b := N\varepsilon$, $\square_\varepsilon^i \subset \Upsilon$ – куб со стороной ε такой, что выполнено вложение $\gamma_\varepsilon^{(i)} \subset \square_\varepsilon^i$, соответственно. На гиперплоскости Υ выберем куб Q со стороной b, содержащий целое число множеств $\square_\varepsilon^i$, и объединение всех таких кубов целиком покроют Υ.

Обозначим $\beta_\varepsilon := \alpha - \alpha_\varepsilon$. Разложим функцию β_ε в ряд Фурье на Q:

$$\beta_\varepsilon(x') := \sum_{q \in \mathbb{Z}^{n-1}} C_q \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{b} q \cdot x'}.$$

Возьмем теперь функцию $U(x) = -\sum\limits_{q \in \mathbb{Z}^{n-1}} C_q \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{b} q\cdot x' - (|q|+1) x_n}}{|q|+1}$. Несложно проверить, что ряд сходится в $W_2^1\left(\widetilde{\Sigma}\right)$, $\widetilde{\Sigma} := \{x\colon x_n > 0,\ x' \in Q\}$. Функция U является обобщенным решением краевой задачи

$$\Delta U = 0, \quad x \in \widetilde{\Sigma}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_n} = \beta_\varepsilon, \quad x' \in Q,$$

с однородным граничным условием Неймана на боковых гранях Σ.

В соответствии с определением функции β_ε, верно равенство

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} \frac{1}{|q|+1}\left|\int\limits_Q \beta_\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{b}q\cdot x'}dx'\right|^2 = \sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} \frac{|C_q|^2}{|q|+1}.$$

С другой стороны, согласно определению функции U, выполнено

$$\|\nabla U\|^2_{L_2(\widetilde{\Sigma})} = 2\sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} |C_q|^2 \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(|q|+1)x_n}dx_n = C\sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} \frac{|C_q|^2}{|q|+1}.$$

Следовательно, получаем

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}^{n-1}} \frac{1}{|q|+1}\left|\int\limits_Q \beta_\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{b}q\cdot x'}dx'\right|^2 \leqslant C\|\nabla U\|^2_{L_2(\widetilde{\Sigma})}. \tag{5.1}$$

Наш следующий шаг состоит в том, чтобы оценить правую часть последнего неравенства. Для этого введем следующие обозначения: $\square_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^{n-1}\colon -\frac{1}{2N} < x_j < \frac{1}{2N}$, $j = 1, \ldots, n-1,\ x_n = 0\}$, $\widetilde{\Sigma}_1 := \{x\colon x_n > 0,\ x' \in \square_\varepsilon\}$, $\xi = x\varepsilon^{-1}$, $\widetilde{\Sigma}_\eta := \{\xi\colon \xi_n > 0,\ \xi' \in \square\}$, где $\square$ – область, полученная растяжением области $\square_\varepsilon$ в ε^{-1} раз.

Аналогично [34] для $n \geqslant 3$ можно вычислить асимптотику первого собственного значения оператора Лапласа в $\widetilde{\Sigma}_\eta$ с краевым условием Неймана на $\square \setminus \{0\}$. Первый ненулевой член асимптотики есть величина порядка ε. Действительно, для функции U верно:

$$\|U - \varepsilon u\|_{W_2^1(\widetilde{\Sigma}_\eta)} = O(\varepsilon\eta).$$

Здесь функция u – решение задачи

$$\Delta_\xi u = 0, \quad \xi \in \widetilde{\Sigma}_\eta, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square \setminus \{0\},$$

с периодическими условиями на боковых гранях $\widetilde{\Sigma}_\eta$, имеющая при $|\xi| \to 0$ асимптотику $u = |\xi|^{-n+2} + O(|\xi|^{-n+1})$.

Аналогично [14, лемма 7.3] для $U \in W_2^1(\widetilde{\Sigma}_\eta)$ можно доказать, что верна оценка $\|\nabla_\xi U\|^2_{L_2(\widetilde{\Sigma}_\eta)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Переходя обратно к переменным x и учитывая, что множество Q содержит $O(\varepsilon^{-n+1})$ ячеек периодичности, выводим оценку

$$\|\nabla U\|^2_{L_2(\widetilde{\Sigma})} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (5.1) следует, что функцию $\kappa(\varepsilon)$ в (2.9) нужно выбрать равной $C\varepsilon^{\frac{1}{4}}$, чтобы оценка (2.9) удовлетворяла нашему примеру. Осталось проверить, что функция α равна нулю на $\overline{\Upsilon} \cap \overline{\Xi}$, если данное пересечение не пусто. В нашем случае эти множества не пересекаются. Поэтому мы не требуем обращения в нуль функции α на $\overline{\Upsilon} \cap \overline{\Xi}$. Таким образом, мы показали, что для периодического чередования существует функция α и выполнено условие (C2).

Теперь перейдем к обсуждению точности оценок, установленных в теореме 2.1. Если мы попытаемся доказать неулучшаемость оценки (2.13), то мы получим только грубые оценки. Поэтому здесь будет доказана только точность оценки (2.14).

Всюду в этом разделе через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от коэффициентов внутреннего и внешнего разложений, пограничного слоя, f, ε, η, μ, $\kappa(\varepsilon)$ и x. Дополнительно предполагаем, что $u_{0,0,0}$ и f – финитные бесконечно дифференцируемые функции. Напомним, что асимптотика функции u_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ имеет вид (2.15). Тогда

$$\|u_\varepsilon-(1-W_\varepsilon)u_{0,0,0}\|_{W_2^1(\Omega)}=\Bigg\|\Big(\varepsilon u_{1,0,0}+\eta u_{0,1,0}+\varepsilon\chi_0 v_{1,0,0}+\dots\Big)\chi_5 + (\chi_5-1+W_\varepsilon)u_{0,0,0}+\Big(w_{0,0,0}+\dots\Big)\chi_6\Bigg\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{5.2}$$

где через "..." мы обозначим следующие члены асимптотического ряда, функция W_ε определена в (3.3), а функции χ_5, χ_6 имеют вид:

$$\chi_5:=\prod_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\chi_1\left(|x-M_\varepsilon^k|\varepsilon^{-1}\eta^{-1/2}\right),\qquad \chi_6:=\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\left(1-\chi_1\left(|x-M_\varepsilon^k|\varepsilon^{-1}\eta^{-1/2}\right)\right).$$

Оценим норму $\chi_6 w_{0,0,0}+\varepsilon\chi_0\chi_5 v_{1,0,0}+u_{0,0,0}W_\varepsilon$ в $W_2^1(\Omega)$. В соответствии с определениями функций χ_0, χ_1, χ_2, $w_{0,0,0}$ $v_{1,0,0}$, W_ε и свойств функции $u_{0,0,0}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\|\chi_6 w_{0,0,0}+\varepsilon\chi_0\chi_5 v_{1,0,0}+u_{0,0,0}W_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)}\geqslant C_1\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left\|\frac{\partial w_{0,0,0}}{\partial x_n}+u_{0,0,0}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_n}\right\|^2_{L_2(B^{k,1})}\\
&+C_2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left\|\varepsilon\frac{\partial v_{1,0,0}}{\partial x_n}+u_{0,0,0}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_n}\right\|^2_{L_2(B^{k,2})}=C_1(\varepsilon\eta)^{-2}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left\|-T^{0,0,0}\frac{\partial Y}{\partial\zeta_n}+u_{0,0,0}\frac{\partial Y}{\partial\zeta_n}\right\|^2_{L_2(B^{k,1})}\\
&+C_2\varepsilon\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left\|\Psi_{0,0,0}\frac{\partial X}{\partial\xi_n}+u_{0,0,0}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\xi_n}\right\|^2_{L_2(B^{k,2})},
\end{aligned}$$

где множества $B^{k,1}$ и $B^{k,2}$ имеют вид $B^{k,1}:=\{x\colon |x-M_\varepsilon^k|\varepsilon^{-1}\eta^{-1/2}<1\}$, $B^{k,2}:=\{x\colon |x-M_\varepsilon^k|\varepsilon^{-1}\eta^{-1/2}>1\}\cap\Omega_{\tau_0}$. Из последнего неравенства, равенства (4.28), асимптотики функций X в малой окрестности нуля и Y на бесконечности, а также определений функций $T^{0,0,0}$, W_ε, выводим:

$$\|\chi_6 w_{0,0,0}+\varepsilon\chi_0\chi_5 v_{1,0,0}+u_{0,0,0}W_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}\geqslant C\varepsilon^{\frac12}.$$

Тогда отсюда, из (5.2), леммы 7.3 из [14] и определения функции W_ε имеем

$$\|u_\varepsilon-(1-W_\varepsilon)u_{0,0,0}\|_{W_2^1(\Omega)}\geqslant C\varepsilon^{\frac12}. \tag{5.3}$$

Эта оценка отличается от правой части неравенства (2.14). А именно, первое слагаемое в правой части совпадает с аналогичным в оценке скорости сходимости. И это означает, что это слагаемое неулучшаемое по порядку. Третье слагаемое $\kappa(\varepsilon)$ в нашей оценке приходит из леммы 3.5. И как уже было сказано, доказательство этой леммы основано на неулучшаемых оценках. Это дает нам право предположить, что член $\kappa(\varepsilon)$ в неравенстве (2.14) неулучшаем по порядку.

Обсудим точность слагаемого μ в правой части (2.14). Поскольку коэффициенты пограничного слоя, внешнего и внутреннего разложений голоморфны по μ, а также в силу того, что мы не строим асимптотику функции u_ε по степеням μ, то у нас возникает невязка порядка μ. Тогда отсюда, из неравенства (5.3), леммы 7.3 из [14] получаем, что

$$\|u_\varepsilon-(1-W_\varepsilon)u_{0,0,0}\|_{W_2^1(\Omega)}\geqslant C\left(\varepsilon^{\frac12}+\mu\right).$$

Тем самым, наша оценка (2.14) по порядку близка к точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чечкин Г.А. *Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий* // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99-150.
2. Гадыльшин Р.Р. *Осреднение и асимптотики в задаче о часто закрепленной мембране* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 12. С. 1857–1869.
3. A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong *Effective permeability of the boundary of a domain* // Commun. Part. Diff. Equat. 1995. V. 20. No. 1–2. P. 59–102.
4. Чечкин Г.А. *О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями* // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР. 1988. С. 95–104.
5. A. Damlamian, Li Ta-Tsicn (Li Daqian) *Boundary homogenization for ellpitic problems* // J. Math. Pure et Appl. 1987. V. 66. No. 4. P. 351–361.
6. M. Lobo, E. Perez *Asymptotic behaviour of an elastic bodx with a surface having small stuck regions* // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. 1988. V. 22. No. 4. P. 609–624.
7. G. Chechkin, E. Doronina *On the asymptotics of the spectrum of a boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions* // Funct. Differ. Equ. 2001. V. 8. No. 1–2. P. 111–122.
8. O. Oleinik, G. Chechkin *Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity* // Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni. Scric IX. 1996. V. 7. No. 1. P. 5–15.
9. Борисов Д.И. *Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий* // Изв. РАН., Сер. матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.
10. Борисов Д.И. *О задаче с частым непериодическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах* // Ж. вычис. мат. мат. физ. 2006. Т. 46. № 2. С. 284–294.
11. Чечкин Г.А., Доронина Е.И. *Об усреднении решений эллиптического уравнения второго порядка с непериодическими быстро меняющимися граничными условиями* // Вестн. Моск. Унив. Сер. 1. Матем. Мех. 2001. № 1. С. 14–19.
12. Беляев А.Г., Чечкин Г.А. *Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда "предельная" задача неразрешима* // Матем.сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 47–60.
13. Шарапов Т.Ф. *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле* // Матем. сб. 2014. Т. 205. № 10. С. 125–160.
14. Борисов Д.И., Шарапов Т.Ф. *О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усредненного условия* // Проблемы математического анализа. 2015. № 83. С. 3–40.
15. D. Borisov, G. Cardone *Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions* // J. Phys. A. 2009. V. 42. No. 36. id 365205 (21pp).
16. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone *On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition* // Ann. H. Poincaré. 2010. V. 11. No. 8. P. 1591–1627.
17. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone *Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows* // J. Math. Sc. 2011. V. 176. No. 6. P. 774–785.
18. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone *Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics* // Z. Angew. Math. Phys. 2013. V. 64. No. 3. P. 439–472.
19. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante *Norm resolvent convergence for elliptic operators in domain with perforation along curve* // C.R. Math. 2014. V. 352. No. 9. P. 679–683.
20. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante *Homogenization and norm resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve* // Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sec. A. Math. To appear.
21. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. *Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей* // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 730–754.
22. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. *Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием* // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 7. С. 3–20.

23. Гадыльшин Р.Р. *Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями* // Дифф. уравн. 1999. Т. 35. № 4. С. 540–551.
24. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий* // Теор. мат. физ. 1999. Т. 118. № 3. С. 347–353.
25. Чечкин Г.А. *Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий* // Тр. сем. им. И.Г.Петровского. 1996. Т. 19. С. 323–337.
26. D. Borisov *On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition* // Asympt. Anal. 2003. V. 35. No. 1. P. 1–26.
27. Борисов Д.И. *О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий* // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 7. С. 37–68.
28. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Изд-во Мир, 1972. 739 с.
29. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1976. 391 с.
30. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
31. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука, 1974. 407 с.
32. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.:Наука, 1989. 336 с.
33. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. *Классические ортогональные полинимы дискретной переменной.* М.: Наука, 1985. 215 с.
34. Гадыльшин Р.Р. *Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях* // Дифф. уравн. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.

Тимур Фархатович Шарапов,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: stf0804@mail.ru