ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 2 (2016). С. 59-65.

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОСТИ И МНОГООБРАЗИЯХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р. ПИРОВ

Аннотация. В работе рассматривается класс переопределенных систем дифференциальных уравнений (д.у.) в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, содержащий в правой части одну или две производных второго порядка. Выявлены условия совместности, доказаны теоремы существования и единственности решений, содержащих не более шести произвольных постоянных.

Ключевые слова: переопределенные системы, условия совместности, многообразия решений, операция перекрестного дифференцирования.

Mathematics Subject Classification: 35N10

1. Введение и подстановка задачи

В монографии [1] рассматривались системы уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией. В [2] и [3] изучены некоторые квазилинейные системы второго порядка с одной неизвестной функцией. Эти исследования были продолжены в работах [4]–[6].

В данной работе рассматриваются нелинейные системы четырех д.у. второго порядка, где неизвестная функция зависит от трех независимых переменных, а правые части содержат нелинейным образом одну или две из производных U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{xy}, U_{yz}, U_{xz}.

Ограничимся рассмотрением по одной системе из каждой группы, а именно:

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \quad i = \overline{1, 4} \tag{1.1}$$

и

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}), \quad i = \overline{1, 4}. \tag{1.2}$$

Использование в системах (1.1) и (1.2) одинакового обозначения f^i для функций, зависящих от различного числа аргументов (8 и 9 соответственно), оправдано тем, что эти системы изучаются независимо друг от друга. В этих системах $U = U(x, y, z)$ – неизвестная функция, которая ищется в классе $C^4(\Pi_0)$; здесь

$$\Pi_0 = \{(x, y, z) : |\, x - x_0 \,| \leqslant a, |\, y - y_0 \,| \leqslant a, |\, z - z_0 \,| \leqslant a\}$$

при некотором $a > 0$.

R. Pirov, On compatibility conditions and manilolds of solutions to one class of overdetermined systems of second order partial differential equations.

Поступила 3 декабря 2015 г.

Основной метод исследования вышеуказанных систем состоит в замене производных первого и второго порядка на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных и в установлении связей с достаточно изученными (см., например, [2]) системами в полных дифференциалах (п.д.-система).

2. Исследование системы (1.1)

Рассмотрим сначала систему (1.1). Через $\Pi = \Pi(a, b)$ обозначим прямоугольник в пространстве R^8, заданный неравенствами: $|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant a, |z - z_0| \leqslant a$, $|U - U_0| \leqslant b, |U_x - U_x^0| \leqslant b, |U_y - U_y^0| \leqslant b, |U_z - U_z^0| \leqslant b, |U_{yy} - U_{yy}^0| \leqslant b$. Индексом "нолик" будем снабжать значения тех или иных функций в точке (x_0, y_0, z_0). Пусть $f^i \in C^2(\Pi), i = \overline{1, 4}$.

Осуществляем замену $U_x = p(x, y, z), U_y = q(x, y, z), U_z = W(x, y, z)$ $U_{yy} = q_y = \tau(x, y, z)$. Тогда имеют место очевидные тождества: $p_y \equiv q_x, q_z \equiv W_y$ и $p_z \equiv W_x$. В силу этих замен система (1.1) примет вид:

$$\begin{cases} U_x = P(x, y, z), U_y = q(x, y, z), U_z = W(x, y, z), \\ p_x, p_y, p_z = f^i(x, y, z; U, p, g, W, \tau), i = \overline{1, 3}, \\ q_x = f^2(x, y, z; U, p, g, W, \tau), q_y = \tau, q_z = f^4(x, y, z; U, p, g, W, \tau), \\ W_x = f^3(x, y, z; U, p, g, W, \tau), W_y = f^4(x, y, z; U, p, g, W, \tau). \end{cases} \tag{2.1}$$

Равенства смешанных производных $p_{yz} = p_{zy}, q_{yz} = q_{zy}, q_{xy} = q_{yx}$ и $q_{xz} = q_{zx}$ после несложных преобразований приводят к уравнениям:

$$\begin{aligned} f_W^2 W_z + f_\tau^2 \tau_z - f_\tau^3 \tau_y = f_y^3 - f_z^2 + f_U^3 q - f_U^2 W + f_p^3 f^2 - f_P^2 f^3 - \\ - f_q^3 \tau - f_q^2 f^4 + f_W^3 f^4 (\equiv L^1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$-f_\tau^4 \tau_y + \tau_z = f_y^4 + f_U^4 q + f_p^4 f^2 + f_q^4 \tau + f_W^4 f^4 (\equiv L^2), \tag{2.3}$$

$$\tau_x - f_\tau^2 \tau_y = f_y^2 + f_U^2 q + f_p^2 f^2 + f_q^2 \tau + f_W^2 f^4 (\equiv L^3), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} f_W^2 W_z + f_\tau^2 \tau_z - f_\tau^4 \tau_x = f_x^4 - f_z^2 + f_U^4 p - f_U^2 W + f_p^4 f^1 - \\ - f_p^2 f^3 + f_q^4 f^2 - f_q^2 f^4 + f_W^4 f^3 (\equiv L^4). \end{aligned} \tag{2.5}$$

При $f_W^2 \neq 0$ и $f_\tau^2 f_\tau^4 - f_\tau^3 \neq 0$ из (2.2)–(2.5) алгебраическим разрешением находим W_z, τ_y, τ_x и τ_z в виде

$$W_z, \tau_y, \tau_x, \tau_z = f^j(x, y, z, U, p, q, W, \tau), j = \overline{5, 8}, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} f_W^2 f^5 = L^4 - f_\tau^2 L^2 + f_\tau^2 f^3, \\ (f_\tau^2 f_\tau^4 - f_\tau^3) f^6 = L^1 - L^4 - f_\tau^4 f^3, \\ f^7 = L^3 + f_\tau f^2, f^8 = f_\tau^4 f^6 + L^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Присоединяя (2.6) к (2.1), приходим к п.д.-системе относительно пяти неизвестных функций. Проверка равенств вторых смешанных производных $p_{yz} = p_{zy}, q_{xy} = q_{yx}, q_{yz} = q_{zy}$ в системах (2.1) и (2.6) осуществляется простым подсчетом; кстати, они однажды использовались при пополнении системы. Остальные девять равенств $q_{zx} = q_{xz}, p_{xy} = p_{yx}$, $p_{zx} = p_{xz}, W_{xy} = W_{yx}, W_{yz} = W_{zy}, W_{xz} = W_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ в конечном итоге преобразуются в следующие функциональные соотношения:

$$
\begin{aligned}
H^1(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_z^2 + f_U^2 W + f_p^2 f^3 + f_q^2 f^4 + f_W^2 f^5 + f_\tau^2 f^8 - \\
&\quad - f_x^4 - f_U^4 p - f_p^4 f^1 - f_q^4 f^2 - f_W^4 f^3 - f_\tau^4 f^7 = 0,\\
H^2(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &= f_y^1 + f_U^1 q + f_p^1 f^2 + f_q^1 \tau + f_W^1 f^4 + f_\tau^1 f^6 - \\
&\quad - f_x^2 - f_U^2 p - f_p^2 f_1 - f_q^2 f^2 - f_\tau^2 f^7 = 0,\\
H^3(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_z^1 + f_U^1 W + f_p^1 f^3 + f_q^1 f^4 + f_W^1 f^5 + f_\tau^1 f^8 - \\
&\quad - f_x^3 - f_U^3 p - f_p^3 f^1 - f_q^3 f^2 - f_W^3 f^3 - f_\tau^3 f^7 = 0,\\
H^4(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_y^3 + f_U^3 q + f_p^3 f^2 + f_q^3 \tau + f_W^3 f^4 + f_\tau^3 f^6 - \\
&\quad - f_x^4 - f_U^4 p - f_p^4 f^1 - f_q^4 f^2 - f_W^4 f^3 - f_\tau^4 f^7 = 0,\\
H^5(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_z^4 + f_U^4 W + f_p^4 f^3 + f_q^4 f^4 + f_W^4 f^5 - \\
&\quad - f_y^5 - f_U^5 f^2 - f_p^5 f^2 - f_q^5 \tau - f_W^5 f^4 - f_\tau^5 f^6 = 0,\\
H^6(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_z^3 + f_U^3 W + f_p^3 f^3 + f_q^3 f^4 + f_W^3 f^5 - \\
&\quad - f_x^5 - f_U^5 f^1 - f_p^5 f^1 - f_q^5 f^2 - f_W^5 f^3 - f_\tau^5 f^7 = 0,\\
H^7(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_y^7 + f_U^7 q + f_p^7 f^2 + f_q^7 \tau + f_W^7 f^4 + f_\tau^7 f^6 - \\
&\quad - f_x^6 - f_U^6 p - f_p^6 f^1 - f_q^6 f^2 - f_W^6 f^3 - f_\tau^6 f^7 = 0,\\
H^8(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_z^6 + f_U^6 W + f_p^6 f^3 + f_q^6 f^4 + f_w^6 f^5 + f_\tau^6 f^8 - \\
&\quad - f_y^8 - f_U^8 q - f_p^8 f^2 - f_q^8 \tau - f_W^8 f^4 - f_\tau^8 f^6 = 0,\\
H^9(x,y,z;U,p,q,W,\tau) &\equiv f_z^7 + f_U^7 W + f_p^7 f^3 + f_q^7 f^4 + f_W^7 f^5 + f_\tau^7 f^8 - \\
&\quad - f_x^8 - f_U^8 f^1 - f_p^8 f^1 - f_q^8 f^2 - f_W^8 f^3 - f_\tau^8 f^7 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Поскольку (2.1) и (2.6) получены эквивалентными преобразованиями из (1.1), то начальные условия для этой системы задаются формулами

$$
[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{yy}]_0 = c_5. \tag{2.9}
$$

На основе вышеизложеной схемы исследования, приводящей нелинейную систему к квазилинейной системе в полных дифференциалах, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $f^i \in C^2(\Pi)$, при этом $f_W^2 \neq 0$ и $f_\tau^2 f_\tau^4 - f_\tau^3 \neq 0$. Если тождественно относительно U, U_x, U_y, U_z, U_{yy} выполняются все девять условий (2.8) и $\alpha < \min(a, b/M), M = max|f^i|$, то на $\Pi(\alpha, b)$ задача (1.1),(2.9) в классе $C^4(\Pi_0)$ разрешима единственным образом.*

Иными словами, при выполнении условий теоремы 2.1 многообразие решений системы (1.1) содержит пять произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5.

Замечание 2.1. Пусть одно из условий (2.8) не выполняется тождественно и пусть оно приводит к соотношению вида $\tau = \varphi(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z), \varphi \in C^1(\Pi)$. Тогда решение содержит четыре произвольных постоянных $c_1, ..., c_4$.

Приведем два примера, иллюстрирующих теорему 2.1 и замечание 2.1. В качестве первого примера рассмотрим переопределенную систему: $U_{xx} = U_{yy}, U_{xy} = U_z, U_{xz} = -U_{yy}$, $U_{yz} = -U_{yy}$. После соответствующих замен эта система приводится к п.д. системе относительно пяти неизвестных U, p, q, W и τ:

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = W, \\ p_x = \tau, p_y = W, p_z = -\tau, \\ q_x = W, q_y = \tau, q_z = -\tau, \\ W_x = -\tau, W_y = -\tau, W_z = \tau, \\ \tau_x = -\tau, \tau_y = -\tau, \tau_z = \tau. \end{cases} \tag{2.10}$$

Все условия теоремы 2.1 выполнены; в частности, соотношения (2.8) выполняются тождественно. Следовательно, рассматриваемая система совместна; несложно видеть, что ее решением будет функция $U(x, y, z) = c_1 e^{-x-y+z} + c_2(xy + z) + c_3 y + c_4 x + c_5$.

В качестве второго примера рассмотрим переопределенную систему: $U_{xx} = U_x$, $U_{xy} = U_z, U_{xz} = -U_{yy}, U_{yz} = U_{yy}$. Она приводится к п.д. – системе вида

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = W, \\ p_x = p, p_y = W, p_z = -\tau, \\ q_x = W, q_y = \tau, q_z = \tau, \\ W_x = -\tau, W_y = \tau, W_z = \tau, \\ \tau_x = \tau, \tau_y = \tau, \tau_z = -\tau\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Все соотношения (2.8) выполняются тождественно, за исключением соотношения, соответствующего равенству $P_{xy} = P_{yx}$. Последнее соотношение приводит к уравнению $\tau + W = 0$. В силу замечания 2.1 последняя система приводится к п.д. системе относительно четырех неизвестных функций:

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = W, \\ p_x = p, p_y = W, p_z = W, \\ q_x = W, q_y = -W, q_z = -W, \\ W_x = W, W_y = -W, W_z = -W. \end{cases} \tag{2.12}$$

Следовательно, рассматриваемая система совместна; несложно видеть, что ее решением будет функция $U(x, y, z) = -c_1 e^{x-y-z} + c_2 y + c_3 e^x + c_4$.

3. Исследование системы (1.2)

Рассмотрим теперь нелинейную систему (1.2). Через $\Pi = \Pi(a, b)$ обозначим прямоугольник в пространстве R^9, заданный неравенствами: $|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant a$, $|z - z_0| \leqslant a, |U - U_0| \leqslant b, |U_x - U_x^0| \leqslant b, |U_y - U_y^0| \leqslant b, |U_z - U_z^0| \leqslant b, |U_{yy} - U_{yy}^0| \leqslant b$, $|U_{zz} - U_{zz}^0| \leqslant b$. Пусть $f^i \in C^2(\Pi), i = \overline{1, 4}$.

Замена $U_x = p(x,y,z), U_y = q(x,y,z), U_z = W(x,y,z), U_{yy} = q_y = \tau(x,y,z)$ и $U_{zz} = W_z = \theta(x,y,z)$ преобразует систему (1.2) в следующую квазилинейную систему первого порядка

$$\begin{cases} U_x = P, U_y = q, U_z = W, \\ P_x = f^i, P_y = f^2, P_z = f^3, \\ q_x = f^2, q_y = \tau, q_z = f^4, \\ W_x = f^3, W_y = f^4, W_z = \theta. \end{cases} \tag{3.1}$$

Заметим, что осуществленная замена обеспечивает тождественное выполнение тождеств $p_y = q_x, q_z = W_y, p_z = W_x$. Равенства $p_{xy} = p_{yx}, q_{xy} = q_{yx}, W_{xy} = W_{yx}, p_{xz} = p_{zx}, q_{xz} = q_{zx}, W_{xz} = W_{zx}, p_{yz} = p_{zy}, q_{yz} = q_{zy}, W_{yz} = W_{zy}$ приводят к девяти следующим уравнениям

$$\begin{aligned}
-f^2_\tau\tau_x + f^1_\tau\tau_y - f^2_\theta\theta_x + f^1_\theta\theta_y &= f^2_x + f^2_U p + f^2_p f^1 + f^2_q f^2 + f^2_W f^3 - \\
&\quad - f^1_y - f^1_U q - f^1_p q - f^1_p f^2 - f^1_q \tau - f^1_W f^4, \\
\tau_x - f^2_\tau\tau_y - f^2_\theta\theta_y &= f^2_y + f^2_U q + f^2_p f^2 + f^2_q \tau + f^2_W f^4, \\
-f^4_\tau\tau_x + f^3_\tau\tau_y - f^4_\theta\theta_x + f^3_\theta\theta_y &= f^4_y + f^4_U p + f^4_p f^1 + f^4_q f^2 + f^4_W f^3 - \\
&\quad - f^3_y - f^3_U q - f^3_p f^2 - f^3_W f^4, \\
-f^3_\tau\tau_x + f^1_\tau\tau_z - f^3_\theta\theta_x + f^1_\theta\theta_z &= f^3_x + f^3_U p + f^3_p f^1 + f^3_q f^2 + f^3_W f^3 - \\
&\quad - f^1_z - f^1_U W - f^1_p f^3 - f^1_q f^4 - f^1_W \theta, \\
-f^4_\tau\tau_x + f^2_\tau\tau_z - f^4_\theta\theta_x + f^2_\theta\theta_z &= f^4_x + f^4_U p + f^4_p f^1 + f^4_q f^2 + f^4_W f^3 - \\
&\quad - f^2_z - f^2_U W - f^2_p f^3 - f^2_q f^4 - f^2_W \theta, \\
-f^3_\tau\tau_z + \theta_x - f^3_\theta\theta_z &= f^3_z + f^3_U W + f^3_p f^3 + f^3_q f^4 + f^3_W \theta, \\
-f^3_\tau\tau_y + f^2_\tau\tau_z - f^3_\theta\theta_y + f^2_\theta\theta_z &= f^3_y + f^3_U q + f^3_p f^2 + f^3_W f^4 - f^2_z - \\
&\quad - f^2_U W - f^2_p f^3 - f^2_q f^4 - f^2_W \theta, \\
-f^4_\tau\tau_y + \tau_z - f^4_\theta\theta_y &= f^4_y + f^4_U q + f^4_p f^2 + f^4_q \tau + f^4_W f^4, \\
-f^4_\tau\tau_z + \theta_y - f^4_\theta\theta_z &= f^4_z + f^4_U W + f^4_p f^3 + f^4_q f^4 + f^4_W \theta.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Поскольку в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; U^0, U^0_x, U^0_y, U^0_z, U^0_{yy}, U^0_{zz})$ ранг матрицы 6x9

$$\begin{Vmatrix}
-f^2_\tau & f^1_\tau & 0 & f^2_\theta & f^1_\theta & 0 \\
1 & -f^2_\tau & 0 & 0 & -f^2_\theta & 0 \\
-f^4_\tau & f^2_\tau & 0 & -f^4_\theta & f^3_\theta & 0 \\
-f^3_\tau & 0 & f^1_\tau & -f^3_\theta & 0 & f^1_\theta \\
-f^4_\tau & 0 & f^2_\tau & -f^4_\theta & 0 & f^2_\theta \\
0 & 0 & -f^3_\tau & 1 & 0 & -f^3_\theta \\
0 & -f^3_\tau & f^2_\tau & 0 & -f^3_\theta & f^2_\theta \\
0 & -f^4_\tau & 1 & 0 & -f^4_\theta & 0 \\
0 & 0 & -f^4_\tau & 0 & 1 & -f^4_\theta
\end{Vmatrix}, \tag{3.3}$$

составленной из коэффициентов при производных $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$, равен 6 (в этом можно убедиться непосредственным вычислением), то из (3.2) можно найти

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z = f^k(x,y,z; U, p, q, W, \tau, \theta), k = \overline{5,10}. \tag{3.4}$$

Отметим, что функции $f^k, k=\overline{5,10}$, явно выражаются через функции $f^1,...,f^4$, и их частные производные первого порядка. Присоединяя (3.4) к (3.1), приходим к п.д.-системе относительно шести неизвестных функций U, p, q, W, τ, θ :

$$\begin{cases} U_x = P, U_y = q, U_z = W, \\ p_x = f^1, p_y = f^2, p_z = f^3, \\ q_x = f^2, q_y = \tau, q_z = f^4, \\ W_x = f^3, W_y = f^4, W_z = \theta, \\ \tau_x = f^5, \tau_y = f^6, \tau_z = f^7, \\ \theta_x = f^8, \theta_y = f^9, \theta_z = f^{10}. \end{cases} \tag{3.5}$$

В системе (3.5), эквивалентной (1.2), первые 12 равенств смешанных производных выполняются автоматически, а остальные шесть $\tau_{xy}=\tau_{yx}, \tau_{yz}=\tau_{zy}, \tau_{xz}=\tau_{zx}, \theta_{xy}=\theta_{yx}$, $\theta_{yz}=\theta_{zy}, \theta_{xz}=\theta_{zx}$, после несложных преобразований, приводят к шести функциональным уравнениям вида

$$\begin{gathered}
\widetilde{H}^1(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv f^5_y - f^6_x + f^5_U q - f^6_U p + f^5_p f^2 - f^6_p f^1 + f^5_q \tau - \\
- f^6_q f^2 + f^5_W f^4 - f^6_W f^3 + f^5_\theta q - f^6_\theta f^8 + f^5_\tau f^6 - f^6_\tau f^5 = 0, \\
\widetilde{H}^2(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv f^6_z - f^7_y + f^6_U W - f^7_U f^4 + f^6_p f^3 - f^7_p f^2 + \\
+ f^6_q f^4 - f^7_q \tau + f^6_W \theta - f^7_W f^4 + f^6_\tau f^7 - f^7_\tau f^6 + f^6_\theta f^{10} - f^7_\theta f^9 = 0, \\
\widetilde{H}^3(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv f^5_z - f^7_x + f^5_U W - f^7_U p + f^5_p f^3 - f^7_p f^1 + f^5_q f^4 - \\
- f^7_q f^2 + f^5_W \theta - f^7_W f^3 + f^5_\tau f^7 - f^7_\tau f^5 + f^5_\theta f^{10} + f^7_\theta f^8 = 0, \\
\widetilde{H}^4(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv f^8_y - f^9_x + f^8_U q - f^9_U p + f^8_p f^2 - f^9_p f^1 + f^8_q \tau - \\
- f^9_q fr^2 + f^8_W f^4 - f^9_W f^3 + f^8_\tau f^6 - f^5_\tau + f^8_\theta f^9 - f^9_\theta f^8 = 0, \\
\widetilde{H}^5(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv f^9_z - f^{10}_y + f^9_U W - f^{10}_U q + f^9_p f^3 - f^{10}_p f^2 + f^9_q f^4 - \\
- f^{10}_q \tau + f^9_W \theta - f^{10}_W f^4 + f^9_\tau f^7 - f^{10}_\tau f^6 + f^{10}_\theta f^9 = 0, \\
\widetilde{H}^6(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv f^8_z - f^{10}_x + f^8_U W - f^{10}_U p + f^8_p f^3 - \\
- f^{10}_p f^1 + f^8_q f^4 - f^{10}_q f^2 + f^8_W \theta - f^{10}_W f^3 + f^8_\tau f^7 - f^{10}_\tau f^5 + f^8_\theta f^{10} - f^{10}_\theta f^8 = 0.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Ясно, что если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; U_0, p_0, q_0, W_0, \tau_0, \theta_0)$ выполнены тождества $H^i(x,y,z;U,p,q,W,\tau,\theta) \equiv 0$, $i=\overline{1,6}$, то система (3.5) вполне интегрируема и к ней можно применить п.д.-теорию [7], [8] со следующей задачей с начальными данными:

$$[U]_0 = c_1, [p]_0 = c_2, [q]_0 = c_3, [W]_0 = c_4, [\tau]_0 = c_5, [\theta]_0 = c_6,$$

которая по отношению к исходной системе (1.2) преобразуется в задачу

$$[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{xx}]_0 = c_5, [U_{zz}]_0 = c_6. \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $f^i \in C^2(\Pi)$. *Пусть в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, z_0; U^0, U^0_x, U^0_y, U^0_z, U^0_{xx}, U^0_{zz})$ *выполнены тождества* $\widetilde{H}^i \equiv 0$, $i=\overline{1,6}$ *(функции* $\widetilde{H}^i$ *заданы формулами (3.6)). Пусть, наконец,* $\alpha < \min(a, b/M), M = max|f^i|$. *Тогда на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача (1.2), (3.7) в классе* $C^4(\Pi_0)$ *разрешима единственным образом.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что в ее условиях многообразие решений системы (1.2) содержит шесть произвольных постоянных $c_1, ..., c_6$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat *Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles du premier ordre.* Paris. 1921. 454 p.
2. Михайлов Л.Г. *Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.* Душанбе: Дониш. 1986. 116 с.
3. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012. 376 с.
4. Пиров Р. *К теории нелинейных переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в пространстве* // Известия ТО МАН ВШ, Душанбе. № 1. 2010. С. 85–90.
5. Пиров Р. *О существовании гармонических решений одной переопределенной системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в пространстве* // Вестник Педуниверситета, Душанбе. № 2(38). 2011. С. 3–6.
6. Пиров Р. *О совместности некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // ДАН Респ. Таджикистан. Т.54, № 5. 2011. С. 359–366.
7. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1970. 720 с.
8. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* М: ГИФМЛ. 1958. 470 с.

Пиров Рахмон,
Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни,
ул. С. Носирова 29, кв.93,
734003, Республика Таджикистан
E-mail: pirov_60@mail.ru