ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 2 (2016). С. 44-58.

УДК 517.954+517.956.45+517.958:531.72

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Ф.Х. МУКМИНОВ**

**Аннотация.** Рассматривается задача Коши для некоторого класса анизотропных параболических уравнений второго порядка с двойными нестепенными нелинейностями. Уравнение содержит "неоднородность"в виде недивергентного члена, зависящего от искомой функции и пространственных переменных. Нелинейности характеризуются $N$-функциями, на которые $\Delta_2$-условие не накладывается. Методом удвоения переменных, предложенным С.Н. Кружковым, доказывается единственность ренормализованного решения в пространствах Соболева–Орлича.

**Ключевые слова:** анизотропное параболическое уравнение, ренормализованное решение, нестепенная нелинейность, $N$-функции, единственность решения.

**Mathematics Subject Classification:** 35D05; 35K55; 35B50; 35B45; 35B05

## 1. Введение

В слое $D^T = (0,T) \times \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ рассматривается задача Коши для уравнения вида

$$(\beta(x,u))'_t = \mathrm{div} a(x,u,\nabla u) + b(t,x,u,\nabla u),\ a = (a_1,...,a_n). \tag{1.1}$$

$$\beta(x,u(0,x)) = \beta(x,u_0(x)), \tag{1.2}$$

где $\beta(x,u)$ – неубывающая и непрерывная по $u$ функция, измеримая по $x$.

Модельным примером рассматриваемых уравнений служит уравнение вида

$$(\beta(u))_t = \sum_{i=1}^{n}(B'_i(u_{x_i}) + \Psi_i(x))_{x_i} + \Phi(x), \tag{1.3}$$

где $B_i$ – $N$-функции (см. [1]).

В работе P. A. Raviart [2] впервые было доказано существование решения уравнения с двойной нелинейностью

$$(|u|^{\alpha-2}u)_t = \sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + f(t,x), \quad \alpha, p > 1, \nabla u_0(x) \in L_p, \tag{1.4}$$

в ограниченной области $D^T = (0,T) \times \Omega$.

A. Bamberger [3] доказал единственность решения уравнения (1.4) в случае, когда $\alpha \in (1,2)$, в предположении $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$, $u_0 \geq 0$. Однако существование такого решения при $\alpha \in (1,2)$ доказать не удается.

H. W. Alt, S. Luckhaus [4] доказали существование и единственность решения уравнения $(\beta(u))'_t = \mathrm{div} a(\beta(u), \nabla u)$ в случае $\alpha \geq 2$ в предположении $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$. Похожие результаты для уравнения (1.1), записанного в другой форме, были установлены в [5, 6].

---

F.Kh. Mukminov, Uniqueness of the renormalized solutions to the Cauchy problem for an anisotropic parabolic equation.



Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00081-а).

*Поступила 6 февраля 2016 г.*

Требование $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$ было ослаблено до $\beta \in L_1(D^T)$ в работе F. Otto [7] при доказательстве единственности решения.

В работе [8] авторы показывают необходимость расширения понятия решения в случае уравнения $\triangle_p u = F(x,u)$ с $L_1$ данными: $\sup_{|u|<c} F(x,u) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. А именно, они рассматривают энтропийное решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения и доказывают его существование и единственность. Авторы указывают, что вместо энтропийного решения, введенного впервые С.Н. Кружковым [9] для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованные решения. Понятие ренормализованного решения было впервые введено в работе R. J. DiPerna and P.-L. Lions [10] при изучении задачи Коши для уравнения Больцмана.

D. Blanchard and F. Murat [11] доказали единственность ренормализованного решения уравнения $u_t - \mathrm{div} a(t,x,\nabla u) = f$. A. Prignet [12] для этого же уравнения доказал единственность энтропийного решения и показал его эквивалентность ренормализованному решению.

Существенно более сильное утверждение — единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи для уравнения со степенными нелинейностями $(\beta(u))'_t = \mathrm{div} a(u,\nabla u)$ — сформулировано J. Carrillo, P. Wittbold в [13], однако в доказательстве имеется существенный пробел. Доказательство использует метод удвоения переменных, предложенный С.Н. Кружковым в [9].

В настоящей работе методом удвоения переменных доказывается единственность ренормализованного решения задачи Коши (1.1),(1.2) с нестепенными нелинейностями, определяемыми $N$-функциями.

В работе С.Н. Антонцева и С.И. Шмарева [14] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для параболических уравнений вида (1.1) в частном случае $\beta = u$, $a = u^{\gamma(t,x)}\nabla u$. Единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для изотропного уравнения (1.1) с нестепенными нелинейностями доказана в работе H. Redwane [15] при сильном ограничении $0 < c < \beta'_u < C(K)$, $\nabla_x \beta'_u < C(K)$, $|u| < K$. При тех же предположениях в работе [16] доказано существование ренормализованного решения. Существование и единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для уравнения (1.1) с $\beta = u$ и переменными нелинейностями доказана в работах Ch Zhang, Sh Zhou [17] и M. Bendahmane, P. Wittbold [18].

В работах [19], [20] рассматривались уравнения вида (1.1) с нестепенными нелинейностями в цилиндрической области с неограниченным основанием, при условии принадлежности начальной функции некоторому пространству Соболева-Орлича. В [19] для модельного уравнения при $b \equiv 0$, в предположении ограниченности функции $\beta'_u$ в окрестности $u \in (-\delta, \delta)$, доказано существование решения и установлены степенные (по $t$) оценки сверху и снизу скорости убывания решения при больших значениях $t$. В [20] доказано существование обобщенного решения первой смешанной задачи при условии сильной монотонности (то есть всего оператора в правой части уравнения). В случае степенных нелинейностей точные оценки скорости убывания решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью установлены в [21].

## 2. Функциональные пространства и основные предположения

Определим здесь используемые в работе функциональные пространства и приведем некоторые известные факты из теории пространств Соболева–Орлича [1] (см. также [22]).

Введем следующие обозначения

$$\langle F(t)\rangle = \int\limits_{\Omega} F(t,x)dx, \quad [F] = \int\limits_{D^T} F(t,x)dxdt,$$

где, как правило, $\Omega = \mathbb{R}^n$, но возможны и другие области. Значение обобщенной функции $\sigma$ на элементе $\phi \in C_0^\infty(D^T)$ будем записывать так: $\sigma(\phi) = (\sigma,\phi)_{D^T}$.

Для выпуклых функций $B(s),\ s \geq 0$, следующая функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{s\geq 0}(s|z| - B(s))$$

называется дополнительной. Очевидно свойство дополнительных функций (неравенство Юнга)

$$|zs| \leqslant B(z) + \overline{B}(s).$$

Выпуклая функция $B(s),\ s \geq 0$, называется $N$-функцией, если

$$\lim_{s\to 0} B(s)/s = 0, \quad \lim_{s\to\infty} B(s)/s = \infty.$$

Говорят, что $N$-функция $B(s)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию, если существуют такие числа $s_0, k > 0$, что $B(2s) \leqslant kB(s)$, $\forall s \geq s_0$.

В настоящей работе не предполагается, что используемые $N$-функции удовлетворяют $\Delta_2$-условию.

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны.

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее $N$-функции $B(s)$, с нормой Люксембурга

$$||u||_{\text{для которых}} = ||u||_{B,Q} = \inf\{k > 0 : \int\limits_Q B\left(\frac{u(x)}{k}\right)dx \leqslant 1\}.$$

Ниже в качестве $Q$ могут выступать области $\mathbb{R}^n, D^T$ и другие, причем индекс $Q = \mathbb{R}^n$ может быть опущен.

Через $Lip_0(Q)$ обозначим пространство липшицевых функций с компактным носителем, лежащим в $Q$. Замыкание пространства $Lip_0(Q)$ в $L_B(Q)$ будем обозначать через $E_B(Q)$. Определим анизотропные пространства Соболева-Орлича $W^1_{\mathbf{LB}}(\mathbb{R}^n)$, как множество тех элементов $\theta = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \prod_{i=1}^n L_{B_i}(\mathbb{R}^n)$, для которых существуют последовательности $\varphi_m \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\nabla\varphi_m \to \theta$ слабо как последовательности функционалов над $\prod_{i=1}^n E_{B_i}(\mathbb{R}^n)$. Будем предполагать выполненным следующее условие на набор $N$-функций $B_i$: *для каждого $\theta \in W^1_{\mathbf{LB}}(\mathbb{R}^n)$ существует потенциал $v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\nabla v = \theta$.* Достаточным условием для этого является существование $N$-функции $G$ такой, что при всех $\varphi \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\|\varphi\|_{L_G(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^n ||\varphi_{x_i}||_{B_i,\mathbb{R}^n}. \tag{2.1}$$

Действительно, как легко видеть, это неравенство в предположении слабой сходимости $\nabla\varphi_m \to \theta$ влечет $*$-слабую сходимость $\varphi_m \to v \in L_G(\mathbb{R}^n)$ и равенство $\nabla v = \theta$. Отметим, что неравенство вида (2.1) установлено в работе [23] в предположении, что сходится следующий интеграл

$$\int_0^1 \frac{\Theta(s)}{s} ds, \quad \Theta(s) = s^{-\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^{n} \left(B_i^{-1}(s)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Пространство $W^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$ с нормой

$$||u||_{W^1_{\mathbf{B}}(D^T)} = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}||_{B_i, D^T}$$

определяется аналогично описанному выше и в дальнейшем будет обозначаться через $X$.

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда $P$ истинно, и 0, когда $P$ ложно.

Приведем теперь условия на функции, входящие в уравнение (1.1). Функция $\beta(x,u)$, $\beta(x,0) = 0$, удовлетворяет условию Каратеодори и не убывает по $u$. Функции $a_i(x,u,s,)$, $s \in \mathbb{R}^n$ также удовлетворяют условию Каратеодори.

Потребуем существование непрерывной функции $C(R,N)$ такой, что

$$\overline{B_i}(a_i(x,r,p)) \leq C(R,N)(1 + S(p)), S(p) = \sum_{i=1}^{n} B_i(p_i); \tag{2.2}$$

$$(a(x,r,p) - a(x,\widetilde{r},q)) \cdot (p-q) + C(R,N)(1 + S(p) + S(q))|r - \widetilde{r}| \geq 0 \tag{2.3}$$

при всех $r, \widetilde{r} \in [-N,N]$, $p,q \in \mathbb{R}^n$, $|x| < R$. Это условие аналогично условию из работы [13] с непрерывными функциями $C(N)$ и вектор-функциями $\Gamma$, $\widetilde{\Gamma}$:

$$(a(r,p) - a(\widetilde{r},q)) \cdot (p-q) + C(N)(1 + |p|^k + |q|^k)|r - \widetilde{r}| \geq \Gamma(r,\widetilde{r})p + \widetilde{\Gamma}(r,\widetilde{r})q,$$

при всех $r, \widetilde{r} \in [-N,N]$, $p,q \in \mathbb{R}^n$.

## 3. Формулировка основных результатов

Определим функции

$$T_k(v) = \begin{cases} k & \text{если } v > k, \\ v & \text{если } |v| \leq k, \\ -k & \text{если } v < -k; \end{cases} \qquad \eta(r) = \begin{cases} 0 & \text{если } r > 1, \\ 1-r & \text{если } 0 \leq r \leq 1, \\ 1 & \text{если } r < 0; \end{cases}$$

$H_\varepsilon(r) = 1 - \eta(r/\varepsilon)$.

**Определение 1.** *Ренормализованным решением задачи Коши* (1.1), (1.2) *называется измеримая функция* $u : D^T \to \mathbb{R}$ *такая, что*

1) $\beta(x,u) \in L_1(D^T)$, $f(t,x) = b(t,x,u,\nabla u) \in L_1(D^T)$,
2) $T_k(u) \in X$ *при всех* $k > 0$;

*и функция* $A(t,x)=a(x,u,\nabla u)$ *удовлетворяет при всех* $k,N>0$ *условиям:*

*при всех* $h\in Lip_0(\mathbb{R}),\ \xi\in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$ *выполнено равенство*

$$[\xi_t\int\limits_{u_0}^{u} h(r)d\beta(x,r)+\xi f h(u)]=[A\cdot\nabla(h(u)\xi)];\tag{3.1}$$

$$[\chi(m\le|u|\le m+1)|A\cdot\nabla u|]\to 0 \text{ при } m\to\infty;\tag{3.2}$$

$$[\chi(|u|\le k)|A(t,x)|\chi(m<|x|<m+1)]\to 0 \text{ при } m\to\infty;\tag{3.3}$$

$$\lim_{l\to\infty} l\int\limits_0^{1/l}\langle\eta(|x|-N)|\beta(x,u(t))-\beta(x,u_0)|\rangle dt=0.\tag{3.4}$$

*Замечание 1.* Интеграл Стильтьеса в формуле (3.1) вычисляется при фиксированных $x$.

*Замечание 2.* Из условий (2.2) и 2) следует, что

$$\overline{B_i}(a_i(x,u,\nabla u))\chi(|u|\le k)\chi(|x|\le R)\in L_1(D^T).\tag{3.5}$$

Определим многозначную функцию $\mathrm{sign}^+r=1$ при $r>0$, $\mathrm{sign}^+r=0$ при $r<0$ и $\mathrm{sign}^+r=[0,1]$ при $r=0$; $r^+=\max(r,0)$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (2.2) *и* (2.3). *Пусть при* $i=1,2$ *функции* $u_{0i}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *таковы, что* $\beta(x,u_{0i})\in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Пусть* $u_i$ *– ренормализованные решения задачи Коши* (1.1), (1.2) *с* $u_{0i}$, $b_i$. *Тогда существует функция* $G(t,x)\in\mathrm{sign}^+(u_1-u_2)$ *такая, что для всех* $\alpha(t)\in Lip_0(-1,T)$, $\alpha(0)=1$, $\alpha\ge 0$ *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}-[\alpha'(\beta(x,u_1(t))-\beta(x,u_2(t)))^+]&\le\\ \le\langle(\beta(x,u_{01})-\beta(x,u_{02}))^+\rangle&+[\alpha G(f_1-f_2)],\end{aligned}\tag{3.6}$$

*где* $f_i=b_i(t,x,u_i,\nabla u_i)$. *В частности, если* $\beta(x,u_{0i})=\beta(x,u_0)$, $b_i=b=b(x,u)$ *и функция* $b(x,u)$ *не возрастает по* $u$, *то* $\beta(x,u_1)=\beta(x,u_2)$.

Ниже приводится лемма 1, из которой легко следует, что обобщенное решение, удовлетворяющее условию (3.3), является ренормализованным.

Назовем обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) с $\beta(x,u_0)\in L_1(\mathbb{R}^n)$ функцию $u\in X$ такую, что

$$\beta(x,u)\in L_1(D^T),\ f(t,x)=b(t,x,u,\nabla u),\overline{B}_i(a_i(x,u,\nabla u))\in L_1(D^T),$$

удовлетворяющую условию (3.4) и тождеству

$$[(\beta(x,u)-\beta(x,u_0))\varphi_t+f\varphi]=\sum_{i=1}^n[a_i\varphi_{x_i}]$$

при всех $\varphi\in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$. Из последнего соотношения, в частности, следует, что $\beta(x,u)_t\in X'+L_1(D^T)$.

Следующая лемма близка к соответствующему утверждению из работы [13]. В настоящей работе, в отличие от [13], область $\Omega=\mathbb{R}^n$ не ограничена, поэтому, ради полноты изложения, в приложении дается ее доказательство.

**Лемма 1.** *Пусть* $u\in X$ *– обобщенное решение задачи Коши* (1.1), (1.2). *Тогда*

$$[(\beta(x,u)-\beta(x,u_0))(h(u)\varphi)_t]=[\varphi_t\int\limits_{u_0}^{u}h(r)d\beta(x,r)]\tag{3.7}$$

*при всех* $h\in Lip_0(\mathbb{R})$, *и* $\varphi\in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$.

## 4. Вспомогательные утверждения

Приведем некоторые обозначения и факты, которые будут использованы ниже в методе удвоения переменных.

Положим $\chi(f \neq 0 \wedge \varepsilon) := \chi((f \neq 0) \wedge (f \neq \varepsilon))$, $\chi(f = 0 \vee \varepsilon) := \chi((f = 0) \vee (f = \varepsilon))$, где в качестве $f$ могут быть различные функции, $\varepsilon > 0$. Пусть $\rho_m$ – ядро осреднения в $\mathbb{R}^n$, $\langle \rho_m \rangle = 1$, $|\rho_m| \leq Cm^n$, $\rho_m(x) = 0$ при $m|x| > 1$. Для измеримой функции $v$ положим $\chi_m(x, v) := \langle \rho_m(x - y)\chi(0 < v(y) < \varepsilon)\rangle_y$, $K(x, v) := \lim\limits_{m\to\infty} \chi_m(x, v)$. Предел существует почти всюду в $\mathbb{R}^n$ и $0 \leq K(x, v) \leq 1$. В тех случаях, когда зависимость функции $K$ от аргументов несущественна, не будем их указывать.

Напомним, что $x$ называется точкой Лебега суммируемой функции $v$, если

$$\lim_{m\to\infty} \langle m^{-n}\chi(m|x - y| < 1)|v(y) - v(x)|)\rangle_y = 0.$$

**Лемма 2.** *Если $x$ – точка Лебега ограниченной в $\mathbb{R}^n$ измеримой функции $v$, то*

$$K(x, v)\chi(v(x) \neq 0 \wedge \varepsilon) = \chi(0 < v(x) < \varepsilon),\ \varepsilon > 0.$$

*Доказательство.* Найдется $\delta(x) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned}\chi(0 < v(y) < \varepsilon)\chi(|v(y) - v(x)| < \delta)\chi(v(x) \neq 0 \wedge \varepsilon) = \\ = \chi(0 < v(x) < \varepsilon)\chi(|v(y) - v(x)| < \delta),\end{aligned}$$

при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $x$ – точка Лебега функции $v$, то

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \langle \rho_m(x - y)\chi(|v(y) - v(x)| \geq \delta)\rangle_y \leq \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \langle \rho_m(x - y)|v(y) - v(x)|/\delta)\rangle_y = 0.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \chi_m(x, v)\chi(v(x) \neq 0 \wedge \varepsilon) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \langle \rho_m(x - y)\chi(0 < v(y) < \varepsilon)\chi(|v(y) - v(x)| < \delta)\rangle_y \chi(v(x) \neq 0 \wedge \varepsilon) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \langle \rho_m(x - y)\chi(|v(x) - v(y)| < \delta)\rangle \chi(0 < v(x) < \varepsilon) = \chi(0 < v(x) < \varepsilon).\end{aligned}$$

□

В следующем утверждении $\Omega$ – произвольная область в $\mathbb{R}^n$ (допустимо $\Omega = \mathbb{R}^n$).

**Лемма 3.** *Пусть $v_1, v_2$ – ограниченные в $\Omega$ измеримые функции и $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда*

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \langle\langle \rho_m(x - y)f(y)g(x)\chi(0 < v_1(y) - v_2(x) < \varepsilon)\rangle_y\rangle_x = \\ &= \langle K(x, v_1 - v_2(x))f(x)g(x)\chi(v_1(x) - v_2(x) = 0 \vee \varepsilon\rangle_x + \\ &+ \langle f(x)g(x)\chi(0 < v_1(x) - v_2(x) < \varepsilon)\rangle_x.\end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}&\langle\langle \rho_m(x - y)f(y)g(x)\chi(0 < v_1(y) - v_2(x) < \varepsilon)\rangle_y\rangle_x = \\ &= \langle\langle \rho_m(x - y))(f(y) - f(x))\chi(0 < v_1(y) - v_2(x) < \varepsilon)\rangle_y g(x)\rangle_x + \\ &+ \langle \chi_m(x, v_1 - v_2(x))f(x)g(x)\rangle_x = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Ввиду непрерывности и ограниченности функции $f$, по теореме Лебега о мажорированной сходимости,

$$\lim_{m\to\infty} |I_1| \leq \lim_{m\to\infty} \langle\langle \rho_m(x - y)|f(y) - f(x)|\rangle_y |g(x)|\rangle_x = 0.$$

Далее, полагая $\Delta(x) = v_1(x) - v_2(x)$, имеем

$$I_2 = \langle \chi_m(x, v_1 - v_2(x))f(x)g(x)(\chi(\Delta \neq 0 \wedge \varepsilon) + \chi(\Delta = 0 \vee \varepsilon))\rangle_x = I_{21} + I_{22}.$$

Остается отметить, что по лемме 2,

$$\lim_{m\to\infty} I_{21} = \lim_{m\to\infty}\langle \chi_m(x, v_1 - v_2(x))f(x)g(x)(\chi(\Delta \neq 0 \wedge \varepsilon)\rangle_x =$$
$$= \langle f(x)g(x)\chi(0 < v_1(x) - v_2(x) < \varepsilon)\rangle_x.$$

□

*Замечание 3.* Предельным переходом устанавливается справедливость леммы 3 также и для функций $f \in E_B(\Omega)$, $g \in L_{\overline{B}}(\Omega)$ при произвольной $N$-функции $B$.

*Замечание 4.* Лемма 3 остаётся справедливой при $\varepsilon = \infty$ и $\Omega = (0, T)$.

**Лемма 4.** *Пусть $u_i$, $i = 1, 2$ – ренормализованные решения задачи Коши с начальными функциями $u_{0i}$, и $A_i = a(x, u_i, \nabla u_i)$, $f_i = b_i(t, x, u_i, \nabla u_i)$. Тогда существует функция $G(t, x) \in \operatorname{sign}^+(u_1 - u_2)$ такая, что*

$$- [\chi(u_1 > u_2)\xi_t \int_{u_2}^{u_1} h(r)d\beta(x, r)] + [\chi(u_1 > u_2)((h(u_1)A_1 -$$
$$- h(u_2)A_2) \cdot \nabla\xi] + [\chi(u_1 > u_2)\xi(h'(u_1)A_1 \cdot \nabla u_1 - h'(u_2)A_2 \cdot \nabla u_2)] \leq$$
$$\leq [\xi G(h(u_1)f_1 - h(u_2)f_2)] \qquad (4.2)$$

*для всех неотрицательных $h \in Lip_0(\mathbb{R})$ и неотрицательных $\xi \in Lip_0((0, T) \times \mathbb{R}^n)$.*

*Доказательство.* Мы выбираем две различные пары переменных $(t, x)$, $(s, y)$ и рассматриваем $u_1, A_1, f_1$ как функции от $(s, y)$ и $u_2, A_2, f_2$ – от $(t, x)$. Пусть $\rho_m$ – ядро осреднения в $\mathbb{R}^n$, $\varrho_l$ – ядро осреднения в $\mathbb{R}$. Положим

$$\rho_{lm}(z) = \rho_{lm}(t, x, s, y) = \rho_m(x - y)\varrho_l(s - t), \quad \xi_{lm}(z) = \xi(t, x)\rho_{lm}(z).$$

Подставим в определение (3.1) ренормализованного решения $u_1$ вместо $h$ функцию $h(r)H_\varepsilon(r - u_2(t, x))$:

$$[(\xi_{lm})_s \int_{u_{01}}^{u_1} h(r)H_\varepsilon(r - u_2(t, x))d\beta(y, r) + \xi_{lm}f_1 h(u_1)H_\varepsilon(u_1 - u_2(t, x))]_{s,y} =$$
$$= [A_1 \cdot \nabla_y(h(u_1)H_\varepsilon(u_1 - u_2(t, x))\xi_{lm})]_{s,y}.$$

Для $u_2$ справедливо аналогичное соотношение

$$[(\xi_{lm})_t \int_{u_{02}}^{u_2} h(r)H_\varepsilon(u_1(s, y) - r)d\beta(x, r) + \xi_{lm}f_2 h(u_2)H_\varepsilon(u_1(s, y) - u_2)]_{t,x} =$$
$$= [A_2 \cdot \nabla_x(h(u_2)H_\varepsilon(u_1(s, y) - u_2)\xi_{lm})]_{t,x}.$$

Проинтегрировав эти соотношения по $(t, x)$ и $(s, y)$ соответственно, и взяв их разность, получим (с использованием обозначения $\{g\} = \int_{D^T\times D^T} g dt dx ds dy$ )

$$\{(\xi_{lm})_s \int_{u_{01}}^{u_1} h(r)H_\varepsilon(r - u_2)d\beta(y, r) - (\xi_{lm})_t \int_{u_{02}}^{u_2} h(r)H_\varepsilon(u_1 - r)d\beta(x, r)\} +$$
$$+ \{\xi_{lm}H_\varepsilon(u_1 - u_2)(f_1 h(u_1) - f_2 h(u_2))\} =$$
$$= \{(h(u_1)A_1 - h(u_2)A_2) \cdot (\nabla_x + \nabla_y)(H_\varepsilon(u_1 - u_2)\xi_{lm})\} +$$
$$+ \{(h'(u_1)A_1 \cdot \nabla_y u_1 - h'(u_2)A_2 \cdot \nabla_x u_2)H_\varepsilon(u_1 - u_2)\xi_{lm}\}. \qquad (4.3)$$

В последнем соотношении использованы равенства вида $\{h(u_1)A_1 \cdot \nabla_x(H_\varepsilon(u_1 - u_2)\xi_{lm})\} = 0$.

Два интеграла слева обозначим через $I_1, I_2$, а справа через $I_3, I_4$. Для этих интегралов совершим предельные переходы в следующем порядке: $m \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ и $l \to \infty$. В частности, для $I_2$ имеем

$$\lim_{m,\varepsilon} I_2 = [\int_0^T \xi(t,x)\varrho_l\chi(u_1(s,x) > u_2(t,x))(f_1h(u_1) - f_2h(u_2))ds]_{t,x}.$$

По лемме 3 с $\varepsilon = \infty$ и интервалом $(0,T)$ вместо $\Omega$ получим

$$\lim_{m,\varepsilon,l} I_2 = [\xi(t,x)(K_1(t,x,u_1-u_2)\chi(u_1=u_2) + \chi(u_1>u_2))(f_1h(u_1)- \\ - f_2h(u_2))]_{t,x} = [\xi(t,x)G(f_1h(u_1) - f_2h(u_2))]_{t,x}. \tag{4.4}$$

Здесь использовано обозначение $G = K_1\chi(u_1 = u_2) + \chi(u_1 > u_2)$, где $K_1$ – функция из леммы 3.

Аналогично, с учетом того, что градиент равен нулю почти всюду на множестве уровня функции,

$$\lim_{m,\varepsilon,l} I_4 = [\chi(u_1 > u_2)\xi(h'(u_1)A_1 \cdot \nabla u_1 - h'(u_2)A_2 \cdot \nabla u_2)]. \tag{4.5}$$

Перейдем к $I_1$. Рассмотрим интеграл

$$J = \{(\xi_{lm})_s \int_{u_{01}}^{u_1} h(r)H_\varepsilon(r-u_2)d(\beta(y,r) - \beta(x,r))\} =$$

$$= \{(\xi_{lm})_s \int_{u_2}^{u_1} h(r)H_\varepsilon(r-u_2)d(\beta(y,r) - \beta(x,r))\} +$$

$$+ \{(\xi_{lm})_s \int_{u_{01}}^{u_2} h(r)H_\varepsilon(r-u_2)d(\beta(y,r) - \beta(x,r))\} = J_1 + J_2.$$

Ясно, что $J_2 = 0$, поскольку $\xi_{lm}\big|_{s=0}^{s=T} = 0$ при достаточно больших $l$, а другой сомножитель в этом интеграле от $s$ не зависит. Положим $\Phi(y,v,k) = \int\limits_k^v h(r)H_\varepsilon(r-k)d\beta(y,r)$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 =& \{(\xi_{lm})_s(\Phi(y,u_1,u_2) - \Phi(x,u_1,u_2))\} = \\ &= \{(\xi_{lm})_s(\Phi(y,u_1(s,y),u_2(t,x)) - \Phi(y,u_1(s,y),u_2(t,y)))\} + \\ &+ \{(\xi_{lm})_s(\Phi(y,u_1(s,y),u_2(t,y)) - \Phi(x,u_1(s,x),u_2(t,x)))\} + \\ &+ \{(\xi_{lm})_s(\Phi(x,u_1(s,x),u_2) - \Phi(x,u_1(s,y),u_2))\} = J_{11} + J_{12} + J_{13}. \end{aligned}$$

Ввиду ограниченности и непрерывности функции $\Phi$ по второму и третьему аргументам

$$\lim_m J_{11} = \lim_m J_{12} = \lim_m J_{13} = 0.$$

Поскольку $(\partial_s+\partial_t)\rho_{lm}=0$, то

$$\lim_{m,\varepsilon,l} I_1=\lim_{m,\varepsilon,l}(I_1-J)=\lim_{m,\varepsilon,l}\big(\{(\xi_{lm})_s\int\limits_{u_2}^{u_1} h(r)H_\varepsilon(r-u_2)d\beta(x,r)\}-$$

$$-\{(\xi_{lm})_t\int\limits_{u_1}^{u_2} h(r)H_\varepsilon(u_1-r)d\beta(x,r)\}\big)=$$

$$=[\chi(u_1>u_2)\xi_t\int\limits_{u_2}^{u_1} h(r)d\beta(x,r)]_{t,x}. \tag{4.6}$$

Остается рассмотреть $I_3$. Имеем

$$I_3=\{\varrho_l\rho_m H_\varepsilon(u_1-u_2)(h(u_1)A_1-h(u_2)A_2)\cdot\nabla_x\xi(t,x)\}+$$
$$+1/\varepsilon\{\chi(0<u_1-u_2<\varepsilon)\xi_{lm}(h(u_1)A_1-h(u_2)A_2)\cdot(\nabla_y u_1-\nabla_x u_2)\}=$$
$$=I_{31}+I_{32}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{m,\varepsilon,l} I_{31}=[\chi(u_1>u_2)(h(u_1)A_1-h(u_2)A_2)\cdot\nabla\xi(t,x)]. \tag{4.7}$$

Пользуясь теоремой Фубини и леммой 3, устанавливаем, что

$$\lim_{m\to\infty} I_{32}-1/\varepsilon\int\limits_0^T ds[\chi(u_1(s,x)-u_2(t,x)=0\vee\varepsilon)K(x,u_1-u_2)\times$$

$$\times\,\xi\varrho_l(h(u_1)A_1-h(u_2)A_2)\cdot\nabla_x(u_1-u_2)]_{t,x}=\lim_{m\to\infty} I_{32}=1/\varepsilon\int\limits_0^T ds\times$$

$$\times\,[\chi(0<u_1(s,x)-u_2(t,x)<\varepsilon)\xi\varrho_l(h(u_1)A_1-h(u_2)A_2)\cdot\nabla_x(u_1-u_2)].$$

Обозначим через $M$ последнее выражение. Ввиду (4.3)–(4.7) достаточно показать, что $\liminf\limits_{\varepsilon,l} M\ge 0$. Для этого отметим равенство

$$M=1/\varepsilon\int\limits_0^T ds[\chi(0<u_1(s,x)-u_2(t,x)<\varepsilon)\xi\varrho_l((h(u_1)-h(u_2))A_1+$$

$$+h(u_2)(A_1-A_2))\cdot\nabla_x(u_1-u_2)]_{t,x}=M_1+M_2,$$

в котором оба интеграла справа определены: действительно, поскольку функции $u_1,u_2$ близки на множестве интегрирования, срезка одной из функций влечет срезание другой.

Пусть, далее число $N>0$ – таково, что $\mathrm{supp}h\subset(-N,N)$. Тогда, при достаточно малых $\varepsilon$, пользуясь (2.2), получаем

$$M_1\le\int\limits_0^T ds[\chi(0<u_1(s,x)-u_2(t,x)<\varepsilon)\xi\varrho_l\times$$

$$\times\,L_h\sum_{i=1}^n\overline{B}_i^{-1}(C(R,N)(1+S(\nabla T_N(u_1))))(|T_N(u_1)_{x_i}|+|T_N(u_2)_{x_i}|)]_{t,x},$$

где $L_h=\sup h'$, $R$ – радиус носителя функции $\xi$. При фиксированных $l$, пользуясь неравенством Юнга, устанавливаем, что интегранд последнего интеграла принадлежит

$L_1((0,T)\times D^T)$, и поэтому интеграл $M_1$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для оставшейся части, ввиду условия (2.3), имеем

$$1/\varepsilon \int_0^T ds[\chi(0<u_1(s)-u_2(t)<\varepsilon)\xi\varrho_l h(u_2)(A_1-A_2)\cdot\nabla_x(u_1-u_2)] \geq$$

$$\geq -1/\varepsilon \int_0^T ds[\chi(0<u_1(s,x)-u_2(t,x)<\varepsilon)\xi\varrho_l h(u_2)C(R,N)\times$$
$$\times (1+S(\nabla_x T_N(u_1))+S(\nabla_x T_N(u_2)))|u_1-u_2|]_{t,x} = M_{21}.$$

Рассуждая, как и выше, получаем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_{21}=0$. Утверждение доказано.

□

## 5. Доказательство теоремы единственности

Пусть $u_1, u_2$ — ренормализованные решения задачи (1.1),(1.2) с начальными функциями $u_{01}, u_{02}$ и функциями $b_1, b_2$ в правой части. Подставим в (4.2) функцию $\xi(t,x)=\alpha_l(t)\eta(|x|-N)$, $\alpha_l(t)\in Lip_0(0,T)$, $h(r)=\eta(|r|-m)$. Полученное неравенство условно запишем в виде

$$I_1+I_2+I_3\leq I_4. \tag{5.1}$$

Положим $\alpha_l(t)=\alpha(t)(1-\eta(lt))$, $\alpha(t)\in Lip_0(-1,T)$, $0\leq\alpha(t)\leq 1$, $\alpha(0)=1$. Перейдем к пределу в (5.1) при $l\to\infty$, $N\to\infty$, $m\to\infty$ в каждом из интегралов. Для второго интеграла слева имеем

$$|I_2|\leq[(\chi(|u_1|<m+1)|A_1|+\chi(|u_2|<m+1)|A_2|)\chi(N<|x|<N+1)].$$

Пользуясь (3.3), устанавливаем, что $\lim\limits_{l,N} I_2=0$. Для $I_3$ имеем

$$|I_3|=|[\xi\chi(u_1>u_2)(h'(u_1)A_1\cdot\nabla u_1-h'(u_2)A_2\cdot\nabla u_2)]|\leq$$
$$\leq[\chi(m<|u_1|<m+1)|A_1\cdot\nabla u_1|]+$$
$$+[\chi(m<|u_2|<m+1)|A_2\cdot\nabla u_2|].$$

Ввиду (3.2), два интеграла справа стремятся к нулю при $m\to\infty$. Итак, $I_3\to 0$.

Рассмотрим теперь интеграл $I_1$. Предположим сначала, что $\alpha(t)=1$ при $|t|<\delta$. Тогда при $l\delta>1$ имеем

$$I_1=-[\chi(u_1>u_2)\alpha'(t)(1-\eta(lt))\eta(|x|-N)\int_{u_2}^{u_1} h(r)d\beta(x,r)]-$$

$$-l\int_0^{1/l}\langle\chi(u_1>u_2)\eta(|x|-N)\int_{u_2}^{u_1} h(r)d\beta(x,r)\rangle dt = I_{11}-I_{12}.$$

Введем обозначение $\Phi_N(x,v)=\eta(|x|-N)\int_0^v h(r)d\beta(x,r)$. Тогда

$$I_{12}=l\int_0^{1/l}\langle(\Phi_N(x,u_1)-\Phi_N(x,u_2))^+\rangle dt.$$

Очевидно, что

$$(\Phi_N(x,u_1)-\Phi_N(x,u_2))^+\leq(\Phi_N(x,u_1)-\Phi_N(x,u_{10}))^+ +$$

$$+(\Phi_N(x,u_{10})-\Phi_N(x,u_{20}))^+ + (\Phi_N(x,u_{20})-\Phi_N(x,u_2))^+.$$

Следовательно,

$$I_{12}-\langle(\Phi_N(x,u_{10})-\Phi_N(x,u_{20}))^+\rangle \le$$

$$\le l\int_0^{1/l}\langle(\Phi_N(x,u_1)-\Phi_N(x,u_{10}))^+ + (\Phi_N(x,u_{20})-\Phi_N(x,u_2))^+\rangle dt.$$

Далее,

$$l\int_0^{1/l}\langle(\Phi_N(x,u_1)-\Phi_N(x,u_{10}))^+\rangle dt \le l\int_0^{1/l}\langle\eta(|x|-N)\Big|\int_{u_{10}}^{u_1} h(r)d\beta(x,r)\Big|\rangle dt \le$$

$$\le l\int_0^{1/l}\langle\eta(|x|-N)|\beta(x,u_1)-\beta(x,u_{10})|\rangle dt.$$

Поэтому, в силу (3.4), переход к пределу при $l\to\infty$, $N\to\infty$ в интеграле $I_1$ дает

$$\lim_{l,N} I_1 \ge -[\chi(u_1>u_2)\alpha'(t)\int_{u_2}^{u_1} h(r)d\beta(x,r)]-$$

$$-\langle\chi(u_{10}>u_{20})\int_{u_{20}}^{u_{10}} h(r)d\beta(x,r)\rangle.$$

Таким образом, тройной предельный переход в (5.1) завершает доказательство неравенства (3.6) теоремы. Предельный переход к функции $\alpha$ общего вида очевиден.

Докажем теперь, что из (3.6) следует единственность ренормализованного решения задачи Коши. Действительно, условие невозрастания функции $b(x,u)$ по $u$ влечет неравенство $G(f_1-f_2)\le 0$, поэтому из (3.6) при $\alpha(t)=\eta(t/T)\eta(-t)$ получаем, что $[(\beta(x,u_1)-\beta(x,u_2))^+]\le 0$, или $\beta(x,u_1)\le\beta(x,u_2)$ почти всюду в $D^T$. Переставив $u_1$ и $u_2$, получим противоположное неравенство, то есть $\beta(x,u_1)=\beta(x,u_2)$, что завершает доказательство единственности.

Легко видеть, что единственность имеет место и при более слабых требованиях на ренормализованное решение:

$$\beta(x,u)\in L_{1,\mathrm{loc}}(D^T),\ f(t,x)=b(t,x,u,\nabla u)\in L_{1,\mathrm{loc}}(D^T).$$

## 6. Приложение

Доказательство леммы 1 легко выводится из следующего утверждения.

**Лемма 5.** *Пусть $v\in X$, $\beta(x,v)$ – каратеодориева функция, неубывающая по $v$, $\beta(x,0)=0$, $\beta(x,v)\in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{D^T})$ и $v_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\beta(x,v_0)\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $w\in X'+L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{D^T})$, и выполнено неравенство*

$$[(\beta(x,v)-\beta(x,v_0))\varphi_t]\ge(\mathrm{resp.}\le)(w,\varphi)_{D^T} \tag{6.1}$$

*при всех неотрицательных $\varphi\in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$[\varphi_t\int_{v_0}^{v} h(r)d\beta(x,r)]\ge(\mathrm{resp.}\le)(w,h(v)\varphi)_{D^T} \tag{6.2}$$

*при всех неотрицательных $h\in W^1_\infty(\mathbb{R})$ и $\varphi\in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство леммы 5. Поскольку $|\int\limits_{v_0}^{v} h(r)d\beta(x,r)| \leq \|h\|_\infty|\beta(x,v)-\beta(x,v_0)|$, то $\int\limits_{v_0}^{v} h(r)d\beta(x,r) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{D^T})$, и интегралы в (6.2) определены. Достаточно доказать одно из неравенств леммы, так как если $v$ удовлетворяет первому неравенству в (6.1), то $-v$ удовлетворяет другому с заменой $\widetilde{\beta}(x,r)=-\beta(x,-r)$, $\widetilde{v}_0=-v_0$ и $\widetilde{w}=-w$ соответственно.

Если справедливо первое из неравенств (6.1), то оно справедливо также и для неотрицательных функций $\varphi \in Y$,

$$Y=\{\varphi(t,x)=\int\limits_t^T z(s,x)ds | z\in X\cap L_\infty(D^T),\ \operatorname{supp} z \text{ ограничен}\}$$

– это легко установить соответствующим предельным переходом.

Сначала предположим, что $h\geq 0$ не убывает, $h\in W^1_\infty(\mathbb{R})$. Ясно, что

$$\int\limits_r^s h(\tau)d\beta(x,\tau)\leq h(s)(\beta(x,s)-\beta(x,r))$$

при всех $r,s\in\mathbb{R}$ и почти всех $x\in\mathbb{R}^n$. Следовательно, при всех $t>0$

$$\int\limits_{v(t-\eta)}^{v(t)} h(r)d\beta(x,r)\leq h(v(t))(\beta(x,v(t))-\beta(x,v(t-\eta))), \tag{6.3}$$

$$\int\limits_{v(t-\eta)}^{v(t)} h(r)d\beta(x,r)\geq h(v(t-\eta))(\beta(x,v(t))-\beta(x,v(t-\eta))) \tag{6.4}$$

почти всюду в $\mathbb{R}^n$, где полагаем $v(t)=v_0$ при $t<0$. Пусть $\varphi\in C^1_0((-\infty,T)\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi\geq 0$, тогда $\zeta=h(v)\varphi\in X$ . Отметим, что при любом малом $\eta>0$ функция $\zeta_\eta(t)=1/\eta\int\limits_t^{t+\eta}\zeta(s)ds$, $\zeta_\eta(T)=0$ лежит в пространстве $Y$. Поэтому $\zeta_\eta$ можно подставить в (6.1). Согласно (6.3), запишем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
&(w,\zeta_\eta)_{D^T}\leq[(\zeta_\eta)_t(\beta(x,v)-\beta(x,v_0))]= \qquad (6.5)\\
&=\int\limits_{D^T_{-\infty}}\frac{1}{\eta}(\zeta(t+\eta)-\zeta(t))(\beta(x,v(t))-\beta(x,v_0))dxdt=\\
&=\int\limits_{D^T_{-\infty}}\frac{1}{\eta}\zeta(t)(\beta(x,v(t-\eta))-\beta(x,v(t)))dxdt=\\
&=\int\limits_{D^T_{-\infty}}\frac{\varphi(t)}{\eta}h(v(t))(\beta(x,v(t-\eta))-\beta(x,v(t)))\leq\\
&\leq\int\limits_{D^T_{-\infty}}\frac{\varphi(t)}{\eta}\int\limits_{v(t)}^{v(t-\eta)}h(r)d\beta(x,r)dxdt=\left[\frac{\varphi(t+\eta)-\varphi(t)}{\eta}\int\limits_{v_0}^{v(t)}h(r)d\beta(x,r)\right].
\end{aligned}$$

Так как функции $\zeta_\eta\to\zeta=h(v)\varphi$ в $X$, $(\varphi(t+\eta)-\varphi(t))/\eta\to\varphi_t(t)$ в $L_\infty(D^T)$ при $\eta\to 0$ и

$$[\zeta_\eta,f]=[\zeta,f_{-\eta}]\to[\zeta,f],\forall f\in L_{1,\mathrm{loc}}(D^T),$$

после предельного перехода в (6.5) получим (6.2).

Теперь предположим, что $h \geq 0$ не возрастает. Пусть $v_{0m} \in X$, $\beta(x, v_{0m}) \to \beta(x, v_0)$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $m \to \infty$ и пусть $m$ фиксировано в следующих выкладках. Подставляя $\widetilde{h} = -h(r)$ в (6.4), будем иметь

$$\int\limits_{v(t-\eta)}^{v(t)} h(r)d\beta(x,r) \leq h(v(t-\eta))(\beta(x,v(t)) - \beta(x,v(t-\eta))) \tag{6.6}$$

для п.в. $t > 0$, при $\eta > 0$, где в этот раз при $t < 0$ мы определяем $v(t) = v_{0m}$. Как и ранее, $\zeta = h_1(v)\varphi$. Следовательно, при малых $\eta > 0$ функция $\zeta_{-\eta}(t) = 1/\eta \int\limits_{t-\eta}^{t} \zeta(s)ds$, $\zeta_{-\eta}(T) = 0$ лежит в пространстве $Y$. Поэтому $\zeta_{-\eta}$ можно подставить в (6.1). Используя (6.6), запишем следующие соотношения

$$\begin{gathered}
(w, \zeta_{-\eta})_{D^T} \leq [(\zeta_{-\eta})_t(\beta(x,v(t)) - \beta(x,v_0))] = \\
= [\frac{1}{\eta}(\zeta(t) - \zeta(t-\eta))(\beta(x,v(t)) - \beta(x,v_0))] = \\
= [\frac{1}{\eta}\zeta(t-\eta)(\beta(x,v(t-\eta)) - \beta(x,v(t)))] - \\
-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^{\eta}\langle\zeta(t-\eta)(\beta(x,v_{0m}) - \beta(x,v_0)\rangle dt \leq \\
\leq \left[\frac{\varphi(t-\eta)}{\eta}\int\limits_{v(t)}^{v(t-\eta)} h_1(r)d\beta(x,r)\right] - \\
-\frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle\varphi(t)h_1(v_{0m})(\beta(x,v_{0m}) - \beta(x,v_0))\rangle dt = \\
= \left[\frac{\varphi(t) - \varphi(t-\eta)}{\eta}\int\limits_{v_0}^{v(t)} h_1(r)d\beta(x,r)\right] + \frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle\varphi(t)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r)d\beta(x,r)\rangle dt - \\
-\frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle\varphi(t)h_1(v_{0m})(\beta(x,v_{0m}) - \beta(x,v_0))\rangle dt.
\end{gathered}$$

Отметим, что

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle\varphi(t)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r)d\beta(x,r)\rangle dt = \langle\varphi(0)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r)d\beta(x,r)\rangle + \\
+\frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle(\varphi(t) - \varphi(0))\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r)d\beta(x,r)\rangle dt,
\end{gathered}$$

где последний интеграл стремится к 0 при $\eta \to 0$. Аналогично, имеем

$$\frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle\varphi(t)h_1(v_{0m})(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0))\rangle dt =$$

$$= \langle\varphi(0)h_1(v_{0m})(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0))\rangle +$$

$$+\frac{1}{\eta}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle(\varphi(t)-\varphi(0))h_1(v_{0m})(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0))\rangle dt,$$

где последний интеграл стремится к 0 при $\eta \to 0$. Теперь, пользуясь тем, что функция $\zeta_{-\eta} \to h_1(v)\varphi$ в $X$ и $(\varphi(t+\eta)-\varphi(t))/\eta \to \varphi_t(t)$ в $L_\infty(D^T)$ при $\eta \to 0$, получаем

$$(w, h_1(v)\varphi)_{D^T} \le [\varphi_t \int\limits_{v_0}^{v} h_1(r)d\beta(x,r)] + \langle\varphi(0)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r)d\beta(x,r)\rangle -$$

$$-\langle\varphi(0)h(v_{0m})(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0))\rangle.$$

Поскольку $\beta(x,v_{0m}) \to \beta(x,v_0)$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то после предельного перехода $m \to \infty$, пользуясь ограниченностью функции $h_1$, получаем (6.2) в случае невозрастания $h_1$.

Перепишем (6.2) в виде

$$(\widetilde{w}, \psi)_{D^T} \le [\psi_t(\widetilde{\beta}(x,v)-\widetilde{\beta}(x,v_0))], \tag{6.7}$$

где $\widetilde{w} = wh_1(v)$, $\widetilde{\beta}(x,s) = \int\limits_0^s h_1(r)d\beta(x,r)$. Неравенство (6.7), установленное для $\psi \in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$, предельным переходом распространяется и на функции $\psi \in Y$. В частности, как было показано выше, для неубывающей неотрицательной функции $h_2$ из (6.7) следует соотношение

$$(\widetilde{w}, h_2(v)\varphi)_{D^T} \le [\varphi_t \int\limits_{v_0}^{v} h_2(r)d\widetilde{\beta}(x,r)],$$

при любой функции $\varphi \in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi \ge 0$, равносильное (6.2) с $h = h_1h_2$. Любая неотрицательная функция $h \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ может быть приближена выпуклой комбинацией таких произведений. Поэтому лемма верна для таких функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Москва: 1958, Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры, 268с.
2. P.A. Raviart *Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal., 5 (1970). P. 209–328.
3. A. Bamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire* // J. Funct. Anal., 24 (1977). P. 148–155.
4. H.W. Alt, S. Luckhaus *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z., 183 (1983). P. 311–341.
5. Иванов А.В., Мкртычян П.З., Ягер В. *Существование и единственность регулярного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений* // С.-Петербургское отделение института математики им. В.А. Стеклова РАН, 359 (1993). С. 209–328.
6. Мкртычян П.З. *О единственности решения второй начально-краевой задачи для уравнения политропической неньютоновской фильтрации* // Записки научных семинаров ПОМИ, 200 (1992). С. 110-–117.

7. F. Otto *L1-Contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations* // J. of Differenutial Equations, 131(1996). P. 20–38.
8. Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Galluet, M. Pierre, J.L. Vazquez *An L1-theory of existence and Uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations* // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 22:2 (1995). P. 241–273.
9. Кружков С.Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // Матем. сб. 81(123):2(1970). С. 228–255.
10. R.J. DiPerna and P.-L. Lions *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability* // Ann. of Math., 130 (1989). P. 321–366.
11. D. Blanchard, F. Murat *Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with L1 data: existence and uniqueness* // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 127 A(1997). P. 1137–1152.
12. A. Prignet *Existence and uniqueness of entropy solutions of parabolic problems with L1 data* // Nonlinear Analysis Th. Math. Appl., 28 (1997). P. 1943–1954.
13. J. Carrillo, P. Wittbold *Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems* // J. Differential Equations, 156 (1999). P. 93–121.
14. Антонцев С.Н., Шмарев С.И. *Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности* // Фундамент. и прикл. матем., 12:4(2006). С. 3–19.
15. H. Redwane *Uniqueness of renormalized solutions for a class of parabolic equations with unbounded nonlinearities* // Rendiconti di Matematica, Serie VII, Roma,28(2008). P. 189–200.
16. H. Redwane *Existence results for a class of nonlinear parabolic equations in Orlicz spaces* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/ , 2(2010). P. 1–19.
17. Chao Zhang, Shulin Zhou *Renormalized and entropy solutions for nonlinear parabolic equations with variable exponents and $L_1$ data* // J. Differential Equations, 248(2010). P. 1376–1400.
18. M. Bendahmane, P. Wittbold, A. Zimmermann *Renormalized solutions for a nonlinear parabolic equation with variable exponents and $L_1$ data* // J. Differential Equations, 249 (2010). P. 1483–1515.
19. Андриянова Э.Р. *Оценки скорости убывания решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями* // Уфимск. матем. журн., 6:2(2014). С. 3–25.
20. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Существование решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями* // Уфимск. матем. журн., 6:4(2014). С. 32—49.
21. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Уфимск. матем. журн., 5:1 (2013). С. 63–82.
22. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сб., 206:8 (2015). С. 99–126.
23. Королев А.Г. *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева-Орлича* // Вестн. Москов. ун.-та, 4(1983). С. 32–36.



Мукминов Фарит Хамзаевич
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mfkh@rambler.ru