ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 2 (2016). С. 3-13.

УДК 517.938

К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.А. АЙСАГАЛИЕВ, Ж.Х. ЖУНУСОВА

Аннотация. Предлагается метод решения краевой задачи с параметром при наличии фазовых и интегральных ограничений. Получены необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработан метод построения решения краевой задачи с параметром и ограничениями, путем построения минимизирующих последовательностей. Основой предлагаемого метода решения краевой задачи является принцип погружения. Принцип погружения был создан путем построения общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В качестве примера приведено решение задачи Штурма–Лиувилля для значения параметра на заданном отрезке.

Ключевые слова: принцип погружения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности, интегральное уравнение, задача Штурма–Лиувилля.

Mathematics Subject Classification: 34H05, 49J15

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу с параметром

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,\lambda,t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \omega(t) \leqslant F(x,\lambda,t) \leqslant \varphi(t), \quad t \in I\}, \tag{3}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(x_0,x_1,\lambda) \leqslant c_j, \quad j = \overline{1,m_1}; \quad g_j(x_0,x_1,\lambda) = c_j, \quad j = \overline{m_1+1,m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x_0,x_1,\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),x_0,x_1,\lambda,t)dt, \quad j = \overline{1,m_2}. \tag{5}$$

с параметром

$$\lambda \in \Lambda \subset R^s, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s). \tag{6}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times m$, вектор функция $f(x,\lambda,t) = (f_1(x,\lambda,t), \ldots, f_r(x,\lambda,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,\lambda,t) \in R^n \times R^s \times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т.е.

$$|f(x,\lambda,t) - f(y,\lambda,t)| \leqslant l(t)|x-y|, \quad \forall (x,\lambda,t),(y,\lambda,t) \in R^n \times R^s \times I \tag{7}$$

и условию

$$|f(x,\lambda,t)| \leqslant c_0(|x| + |\lambda|^2) + c_1(t), \quad \forall (x,\lambda,t), \tag{8}$$

A.S. Aisagaliev, Zh.Kh. Zhunussova, To the solution of a boundary value problem with a parameter for an ordinary differential equations.

Поступила 17 июля 2015 г.

где $l(t) \geq 0$, $l(t) \in L_1(I, R^1)$, $c_0 = const > 0$, $c_1(t) \geq 0$, $c_1(t) \in L_1(I, R^1)$.

Заметим, что при выполнении условий (7), (8) дифференциальное уравнение (1) при фиксированных $x_0 = x(t_0) \in R^n$, $\lambda \in R^s$ имеет единственное решение для значений $t \in I$.

Вектор–функция $F(x, \lambda, t) = (F_1(x, \lambda, t), \ldots, F_S(x, \lambda, t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x, \lambda, t) \in R^n \times I$.

Функция $f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) = f_{01}(x, x_0, x_1, \lambda, t), \ldots\ldots, f_{0m_2}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$|f_0(x, x_0, x_1, \lambda, t)| \leqslant c_2(|x| + |x_0| + |x_1| + |\lambda|^2) + c_3(t),$$

$$\forall (x, x_0, x_1, \lambda, t) \in R^n \times R^n \times R^n \times R^s \times I,$$

$$c_2 = const \geq 0, \;\; c_3(t) \geq 0, \;\; c_3(t) \in L_1(I, R^1).$$

$\omega(t)$, $\varphi(t)$, $t \in I$ – заданные r-мерные непрерывные функции. S – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^{2n}, Λ – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^s, моменты времени t_0, t_1 – фиксированы, $t_1 > t_0$.

Заметим, что если $A(t) \equiv 0$, $m = n$, $B(t) = I_n$, где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x, \lambda, t) + \mu(t), \;\; t \in I. \tag{9}$$

Поэтому полученные ниже результаты остаются верными для уравнения вида (9) при условиях (2)–(6). В частности, множество S определяется соотношением

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} / H_j(x_0, x_1) \leqslant 0, \; j = \overline{1, p};$$

$$< a_j, x_0 > + < b_j, x_1 > - e_j = 0, \; j = \overline{p+1, s_1}\},$$

где $H_j(x_0, x_1)$, $j = \overline{1, p}$ – выпуклые функции относительно переменных (x_0, x_1), $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $a_j \in R^n$, $b_j \in R^n$, $e_j \in R^1$, $j = \overline{p+1, s}$ – заданные векторы и числа $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение. В частности, множество

$$\Lambda = \{\lambda \in R^s / h_j(\lambda) \leqslant 0, \;\; j = \overline{1, p_1}; \;\; < \overline{a}_j, \lambda > - \overline{e}_j = 0, \;\; j = \overline{p_1 + 1, s_1}\},$$

где $h_j(\lambda)$, $j = \overline{1, p_1}$ – выпуклые функции относительно λ, $\overline{a}_j \in R^s$, $\overline{e}_j \in R^1$, $j = \overline{p_1 + 1, s_1}$ – заданные векторы и числа.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1)–(6).

Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары $(x_0, x_1) \in S$ и параметра $\lambda \in \Lambda$ таких, что решение системы (1), исходящее из точки x_0 в момент времени t_0, проходит через точку x_1 в момент времени t_1, при этом вдоль решения системы (1), где $x(t) = x(t; x_0, t_0, \lambda)$, $t \in I$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (3), и интегралы (5) удовлетворяют условиям (4).

Задача 2. Построить решение краевой задачи (1)–(6).

В частности, из краевой задачи (1)–(6) при отсутствии фазовых и интегральных ограничений следует задача Штурма–Лиувилля. Применение метода Фурье к решению задач математической физики приводит к решению следующей задачи [1]: найти такие значения параметра λ, при которых в конечном промежутке $[t_0, t_1]$ существует отличное от нуля решение однородного уравнения

$$L[y] + \lambda r(t) y(t) \equiv 0, \tag{10}$$

удовлетворяющее на концах условиям:

$$\alpha_1 y(t_0) + \alpha_2 \dot{y}(t_0) = 0, \;\; \beta_1 y(t_1) + \beta_2 \dot{y}(t_1) = 0, \tag{11}$$

где $L[y] = \dfrac{d}{dt}[p(t)\dot{y}(t)] - q(t)y(t),\ \ p(t) > 0,\ \ t \in [t_0, t_1]$.

Вводя обозначения $y(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, уравнение (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x_1, \lambda, t),\ \ t \in I = [t_0, t_1], \tag{12}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{q(t)}{p(t)} & -\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)} \end{pmatrix},\ \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix},\ \ f(x_1, \lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}.$$

Граничное условие (11) запишется в виде

$$\alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} = 0,\ \ \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} = 0, \tag{13}$$

где $x(t_0) = (x_{10}, x_{20})$, $x(t_1) = (x_{11}, x_{21})$. Параметр $\lambda \in R^1$. Уравнение (12), краевое условие (13), $\lambda \in R^1$ являются частными случаями (1), (2), (6) соответственно.

Как известно [2], решение задачи Штурма–Лиувилля (10), (11) сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$y(t) = -\lambda \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi, \tag{14}$$

где $G(t, \xi)$ – функция Грина. Заметим, что построение функции Грина $G(t, \xi)$ и решение интегрального уравнения (14) довольно сложны. Поэтому представляет интерес разработка новых методов исследования решения краевых задач (1)–(6).

В работах [3–5] делаются попытки распространить методы исследования краевых задач, созданных для линейных систем второго порядка на системы высоких порядков и на нелинейные системы со сложными граничными условиями. В работе [3] для двухточечной однородной краевой задачи для системы, состоящей из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, предлагаются достаточные условия ее разрешимости и получены априорные оценки решений. В статье [4] рассматриваются задачи на собственные значения и собственные функции для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Исследуются требования, налагаемые на нелинейность, при которых задача имеет кратные собственные значения. Исследованию нелинейных задач на собственные значения для оператора Штурма–Лиувилля посвящена работа [5]. Для задачи на обоих концах интервала краевые условия зависят от спектрального параметра, устанавливается существование системы собственных функций образующей базис в пространстве $L_p(0, 1), p > 1$.

Создание общей теории краевых задач с параметрами для обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка со сложными граничными условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений являются актуальной проблемой.

Во многих случаях на практике исследуемый процесс описывается уравнением вида (1) в области фазового пространства системы, определяемой фазовым ограничением вида (3). Вне указанной области процесс описывается совершенно другими уравнениями либо исследуемый процесс не существует. В частности, такие явления имеют место в исследованиях динамики ядерных и химических реакторов (вне области (3) реактор не существует). Интегральные ограничения вида (4) характеризуют суммарные нагрузки, испытываемые элементами и узлами системы (например, суммарная перегрузка космонавтов), которые не должны превосходить заданных величин, а равенства вида (4) соответствуют суммарным ограничениям, налагаемых на систему (например, расход топлива равен заданной величине).

Основой предлагаемого метода решения краевой задачи с параметром является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача с ограничениями заменяется на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Далее, выяснение существования решения исходной задачи и построение ее решения осуществляется путем решения задачи оптимального управления специального вида. При таком подходе необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1)–(6) могут быть получены из условия достижения нижней грани функционала на заданном множестве, а решение исходной краевой задачи определяется по предельным точкам минимизирующих последовательностей. В этом заключается принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов исследования. Данная работа является продолжением научных исследований, изложенных в [6–12].

2. Принцип погружения

Рассмотрим интегральные ограничения (4), (5). Путем введения дополнительных переменных $d = (d_1, \dots, l_{m_1}) \in R^{m_1}$, $d \geq 0$, соотношения (4), (5) можно представить в виде

$$g_j(x_0, x_1, \lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), x_0, x_1, \lambda, t)dt = c_j - d_j, \quad j = \overline{1, m_1},$$

где $d \in \Gamma = \{d \in R^{m_1}/d \geq 0\}$. Пусть вектор $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_2})$, где $\bar{c}_j = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $\bar{c}_j = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

Введем вектор функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$ где

$$\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), x_0, x_1, \lambda, \tau)d\tau, \quad t \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\eta}(t) = f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t), \quad t \in I = [t_0, t_1].$$

Тогда

$$\dot{\eta} = f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t), \quad t \in I,$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \bar{c}, \quad d \in \Gamma.$$

Теперь исходная краевая задача (1)–(6) запишется в виде

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(P\xi, \lambda, t) + B_2 f_0(P\xi, x_0, x_1, \lambda, t) + B_3\mu(t), \quad t \in I, \tag{15}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \quad \xi(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}), \tag{16}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \quad P\xi(t) \in G(t), \quad t \in I, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{17}$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,m} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} I_n \\ O_{m_2,n} \end{pmatrix}, \quad P = (I_n, O_{n,m_2}), \quad P\xi = x,$$

где $O_{j,k}$ – матрица порядка $j \times k$ с нулевыми элементами, $O_q \in R^q$ – вектор $q \times 1$ с нулевыми элементами, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m_2})$.

Основой предлагаемого метода решения задач 1, 2 являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода вида

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \tag{18}$$

где $K(t_0,t) = \|K_{ij}(t_0,t)\|$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, s_1}$ – известная матрица порядка $n_1 \times s$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированном t_0, $u(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1})$ – искомая функция, $I = [t_0, t_1]$, $a \in R^{n_1}$ – заданный n_1 – мерный вектор.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (18) при любом фиксированном $a \in R^{n_1}$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt, \tag{19}$$

порядка $n_1 \times n_1$, является положительно определенной, где $(*)$ – знак транспонирования.

Теорема 2. *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$, определяемая по формуле (19), положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (18) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a + v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt, \ \ t \in I, \tag{20}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1})$ – произвольная функция, $\in R^{n_1}$ – любой вектор.

Доказательство теорем 1, 2 приведено в работах [6, 7]. Приложение теоремы 1, 2 для решения задачи управляемости и оптимального управления изложено в [8–10], а решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений приведены в [11, 12].

Наряду с дифференциальным уравнением (15) с краевыми условиями (16), рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2 w_2(t) + \mu_1(t), \ \ t \in I, \tag{21}$$

$$y(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \ \ y(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}), \tag{22}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ w_2(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{23}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \ \ d \in \Gamma, \tag{24}$$

где $\mu_1(t) = B_3\mu(t)$, $t \in I$.

Пусть матрица $\overline{B}(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n + m_2) \times (m_2 + m)$, а вектор функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$. Легко убедиться в том, что множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (21) из точки $\xi_0 \in R^n$ в точку $\xi_1 \in R^n$, является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{B}(t)w(t)dt = a, \tag{25}$$

где $\Phi(t_0, t) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1(t)\zeta$, вектор

$$a = a(\xi_0, \xi_1) = \Phi(t_0, t_1)[\xi_1 - \Phi(t_1, t_0)\xi_0] - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu_1(t)dt.$$

Как следует из (18), (25), интегральное уравнение (25) совпадает с (18), если матрица $K(t_0,t)=\Phi(t_0,t)\overline{B}(t)$. Введем следующие обозначения:

$$W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\overline{B}(t)\overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt$$

$$W(t_0,t)=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\overline{B}(\tau)\overline{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)dt$$

$$W(t,t_1)=W(t_0,t_1)-W(t_0,t),\ \ E(t)=\overline{B}^*\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$\mu_2(t)=-E(t)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu_1(t)dt,\ \ E_1(t)=\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$E_2(t)=\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\mu_3(t)=\Phi(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)\mu_1(\tau)d\tau-E(t)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)\mu_1(t)dt.$$

Вычислим функции $\lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)$, $\lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ по формулам:

$$\lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)=E(t)a=T_1(t)\xi_0+T_2(t)\xi_1+\mu_2(t),$$

$$\lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)=E_1(t)\xi_0+E_2(t)\xi_1+\mu_3(t),$$

$$N_1(t)=-E(t)\Phi(t_0,t_1),\ \ N_2(t)=-E_2(t),\ \ t\in I.$$

Теорема 3. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$. Управление $w(\cdot)\in L_2(I,R^{m+m_2})$ переводит траекторию системы (21) из любой начальной точки $\xi_0\in R^{n+m_2}$ в конечное состояние $\xi_1\in R^{n+m_2}$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}w(t)\in W=W(v,\xi_0,\xi_1,z(t_1,v))=\{w(\cdot)\in L_2(I,R^{m+m_2})/w(t)=v(t)+\lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)+\\+N_1(t)z(t_1,v),\ \ t\in I,\ \ \forall v(\cdot)\in L_2(I,R^{m+m_2})\},\end{gathered}\tag{26}$$

где функция $z(t)=z(t,v)$, $t\in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot z=A_1z+\overline{B}(t)v(t),\ \ z(t_0)=0,\ \ t\in I,\ \ v(\cdot)\in L_2(I,R^{m+m_2}.\tag{27}$$

Решение дифференциального уравнения (21), соответствующее управлению $w(t)\in W$, определяется по формуле

$$y(t)=z(t)+\lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)+N_2(t)z(t_1,v),\ \ t\in I.\tag{28}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, для существования решения интегрального уравнения (25) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0,t_1)$=$C(t_0,t_1)$>0, где $K(t_0,t)=\Phi(t_0,t)\overline{B}(t)$. Теперь соотношение (20) запишется в виде (26). Решение системы (21), соответствующее управлению (26), определяется по формуле (28), где $z(t)=z(t,v)$, $t\in I$ – решение дифференциального уравнения (27). Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$. Тогда краевая задача (1)–(6) (либо (15) – (17)) равносильна следующей задаче*

$$w(t)=(w_1,w_2)\in W,\ w_1(t)=f(Py(t),\lambda,t),\ w_2(t)=f_0(Py(t),x_0,x_1,\lambda,t),\tag{29}$$

$$\dot z=A_1(t)z+B_1(t)v_1(t)+B_2v_2(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I,\tag{30}$$

$$v(t)=(v_1(t),v_2(t)),\ \ v_1(\cdot)\in L_2(I,R^m),\ v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}),\tag{31}$$

$$(x_0,x_1)\in S,\ \lambda\in\Lambda,\ d\in\Gamma,\ Py(t)\in G(t),\ t\in I,\tag{32}$$

где $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ *– произвольная функция,* $y(t)$, $t \in I$ *определяется по формуле (28).*

Доказательство. При выполнении соотношений (29)–(32), функция $y(t) = \xi(t)_0$, $t \in I$, $Py(t) = P\xi(t) \in G(t)$, $t \in I$, $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in W$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал:

$$J_1(v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - f(Py(t), \lambda, t)|^2 +$$
$$+|w_2(t) - f_0(Py(t), x_0, x_1, \lambda, t)|^2 + |p(t) - F(Py(t), \lambda, t)|^2]dt = \tag{33}$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(t, v_1(t), v_2(t), p(t), d, x_0, x_1, \lambda, z(t), z(t_1))dt \to \infty$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I, \tag{34}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R_2^m),\ (x_0, x_1) \in S,\ \lambda \in \Lambda,\ d \in \Gamma, \tag{35}$$

$$p(t) \in V(t) = \{\omega(t) \leqslant p(t) \leqslant \varphi(t),\ \ t \in I\}, \tag{36}$$

где

$$w_1(t) = v_1(t) + \lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{11}(t)z(t_1, v),\ \ t \in I, \tag{37}$$

$$w_2(t) = v_2(t) + \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{12}(t)z(t_1, v),\ \ t \in I, \tag{38}$$

$$N_1(t) = (N_{11}(t), N_{12}(t)),\ \ \lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = (\lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1), \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1)).$$

Обозначим через

$$X = L_2(I, R^{m+m_2}) \times V(t) \times \Gamma \times S \times \Lambda \subset H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^{m_2}) \times$$
$$\times L_2(I, R^r) \times R^{m_1} \times R^n \times R^n \times R^s,\ \ J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta),$$
$$\theta = (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) \in X,\ \ X_* = \{\theta_* \in X / J(\theta_*) = 0\}.$$

Теорема 4. *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$, $X_* \neq \emptyset$, $\emptyset$ *– пустое множество. Для того чтобы краевая задача (1)–(6) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(\theta_*) = 0 = J_*$, *где* $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_2^*, \lambda_*) \in X$ *– оптимальное управление для задачи (33) – (36).*

Если $J_* = J(\theta_*) = 0$, *то функция*

$$x_*(t) = P[z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t)z(t_1, v_1^*, v_2^*)],\ \ t \in I$$

решение краевой задачи (1)–(6). Если $J_* > 0$, *то краевая задача (1)–(6) не имеет решение.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть краевая задача (1)–(6) имеет решение. Тогда, как следует из леммы 1, значение $w_1^*(t) = f(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $w_2^*(t) = f_0(Py_*(t), x_0^*, x_1^*, \lambda_*, t)$, где $w_*(t) = (w_1^*(t), w_2^*(t)) \in W$, $y_*(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (28), $\xi_0^* = (x_0^*, O_{m_2})$, $\xi_1^* = (x_1^*, \overline{c}_*)$, $\overline{c}_* = (c_j - d_j^*)$, $j = \overline{1, m_1}$; c_j, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$. Включение $Py_*(t) \in G(t)$, $t \in I$ равносильно тому, что $p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $t \in I$, где $\omega(t) \leqslant p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t) \leqslant \varphi(t)$, $t \in I$. Следовательно, значение $J(\theta_*) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $J(\theta_*) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $w_1^*(t) = f(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $w_2^*(t) = f_0(Py_*(t), x_0^*, x_1^*, \lambda_*, t)$, $p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S$, $v_1^*(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $v_2^*(\cdot) \in L_2(I, R_2^m)$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Переход от краевой задачи (1)–(6) к задаче (33)–(36) называется принципом погружения.

3. Оптимизационная задача

Рассмотрим решение оптимизационной задачи (33)–(36). Заметим, что функция

$$F_0(t,v_1,v_2,p,d,x_0,x_1,\lambda)=|w_1(t)-f(Py(t),\lambda,t)|^2+|w_2(t)-f_0(Py(t),x_0,x_1,\lambda,t)|^2+$$
$$+|p(t)-F(Py(t),\lambda,t)|^2=F_0(t,q),\ \ q=(\theta,z,\overline{z}),$$

где w_1, w_2 определяются формулами (37), (38), соответственно, функция

$$y=z+\lambda_2(t,x_0,x_1,d)+N_2(t)\overline{z},\ \ Py=x.$$

Теорема 5. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$, функция $F_0(t,q)$ определена и непрерывна дифференцируема по $q=(\theta,z,\overline{z})$, и выполнены следующие условия:*

$$|F_{0z}(t,\theta+\Delta\theta,z+\Delta z,\overline{z}+\Delta\overline{z})-F_{0z}(t,\theta,z,\overline{z})|\leqslant L(|\Delta z|+|\Delta\overline{z}|+|\Delta\theta|),$$
$$|F_{0\overline{z}}(t,\theta+\Delta\theta,z+\Delta z,\overline{z}+\Delta\overline{z})-F_{0\overline{z}}(t,\theta,z,\overline{z})|\leqslant L(|\Delta z|+|\Delta\overline{z}|+|\Delta\theta|),$$
$$|F_{0\theta}(t,\theta+\Delta\theta,z+\Delta z,\overline{z}+\Delta\overline{z})-F_{0\theta}(t,\theta,z,\overline{z})|\leqslant L(|\Delta z|+|\Delta\overline{z}|+|\Delta\theta|),$$
$$\forall\theta\in R^{m+m_2+r+m_1+2n+s},\ \ \forall z\in R^{n+m_2},\ \ \forall\overline{z}\in R^{n+m_2}.$$

Тогда функционал (33) при условиях (34) – (36) непрерывен и дифференцируем по Фреше в любой точке $\theta\in X$, причем

$$J'(\theta)=(J'_{v_1}(\theta),J'_{v_2}(\theta),J'_p(\theta),J'_d(\theta),J'_{x_0}(\theta),J'_{x_1}(\theta),J'_\lambda(\theta))\in H,$$

где

$$\begin{aligned}&J'_{v_1}(\theta)=F_{0v_1}(t,q)-B_1^*(t)\psi(t),\ \ J'_{v_2}(\theta)=F_{0v_2}(t,q)-B_2^*\psi(t),\ \ J'_p(\theta)=F_{0p}(t,q),\\&J'_d(\theta)=\int_{t_0}^{t_1}F_{0d}(t,q)dt,\ \ J'_{x_0}(\theta)=\int_{t_0}^{t_1}F_{0x_0}(t,q)dt,\ \ J'_{x_1}(\theta)=\int_{t_0}^{t_1}F_{0x_1}(t,q)dt,\\&J'_\lambda(\theta)=\int_{t_0}^{t_1}F_{0\lambda}(t,q)dt,\ \ q=(\theta,z(t),z(t_1)),\end{aligned}\tag{39}$$

функция $z(t)$, $t\in I$ – решение дифференциального уравнения (34) при $v_1(\cdot)\in L_2(I,R^m)$, $v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2})$, а функция $\psi(t)$, $t\in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot\psi=F_{0z}(t,q(t))-A_1^*(t)\psi,\ \ \psi(t_1)=-\int_{t_0}^{t_1}F_{0z(t_1)}(t,q(t))dt.\tag{40}$$

Кроме того, градиент $J'(\theta)$, $\theta\in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1)-J'(\theta_2)\|\leqslant K\|\theta_1-\theta_2\|,\ \ \forall\,\theta_1,\ \theta_2\in X,\tag{41}$$

где $K>0$ – постоянная Липшица.

Доказательство. Пусть θ, $\theta+\Delta\theta\in X$,
где $\Delta\theta=(\Delta v_1,\Delta v_2,\Delta p,\Delta d,\Delta x_0,\Delta x_1,\Delta\lambda)$. Можно показать, что

$$\Delta\dot z=A_1(t)\Delta z+B_1(t)\Delta v_1+B_2\Delta v_2,\ \ \Delta z(t_0)=0,$$

приращение функционала

$$\Delta J=J(\theta+\Delta\theta)-J(\theta)=<J'_{v_1}(\theta),\Delta v_1>_{L_2}+<J'_{v_2}(\theta),\Delta v_2>_{L_2}+$$
$$+<J'_p(\theta),\Delta p>_{L_2}+<J'_d(\theta),\Delta d>_{R_{m_1}}+<J'_{x_0}(\theta),\Delta x_0>_{R_n}+$$
$$+<J'_{x_1}(\theta),\Delta x_1>_{R_n}+<J'_\lambda(\theta),\Delta\lambda>_{R_s}+R,\ \ R=\sum_{i=1}^7R_i,$$

где $|R|\leqslant c_*\|\Delta\theta\|_X^2$, $|R|/\|\Delta\theta\|_X\to 0$ при $\|\Delta\theta\|_X\to 0$, $c_*=const>0$.
Отсюда следует соотношения (39), где $\psi(t)$, $t\in I$ – решение уравнения (40).

Пусть $\theta_1 = (v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2, p + \Delta p, d + \Delta d, x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, \lambda + \Delta\lambda) \in X$, $\theta_2 = (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda)$. Поскольку

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)| \leqslant c_0|\Delta q(t)| + c_1|\Delta\psi(t)| + c_2\|\Delta\theta\|,$$

$$\Delta\dot{\psi} = [F_{0z}(t, q + \Delta q) - F_{0z}(t, q)] - A_1^*(t)\Delta\psi,$$

$$\Delta\psi(t_1) = -\int [F_{0z(t_1)}(t, q + \Delta q) - F_{0z(t_1)}(t, q)]dt,$$

то верны оценки $\|\Delta q\| \leqslant c_3\|\Delta\theta\|$, $|\Delta\psi(t)| \leqslant c_4\|\Delta\theta\|$. Тогда

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 dt \leqslant K\|\Delta\theta\|^2.$$

Теорема доказана.

Используя соотношения (39)–(41), строим последовательность $\{\theta_n\} = \{v_{1n}, v_{2n}, p_n, d_n, x_{0n}, x_{1n}, \lambda_n\} \subset X$ по следующим правилам:

$$\begin{aligned} &v_{1n+1} = v_{1n} - \alpha_n J'_{v_1}(\theta_n), \;\; v_{2n+1} = v_{2n} - \alpha_n J'_{v_2}(\theta_n), \\ &p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J'_p(\theta_n)], \;\; d_{n+1} = P_\Gamma[d_n - \alpha_n J'_d(\theta_n)], \\ &x_{0n+1} = P_S[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \;\; x_{1n+1} = P_S[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ &\lambda_{n+1} = P_\Lambda[d_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)], \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{42}$$

где $0 < \alpha_n = \dfrac{2}{K + 2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ – постоянная Липшица из (41). Введем следующие обозначения

$$M_0 = \{\theta \in X / J(\theta) \leqslant J(\theta_0)\}, \;\; X_{**} = \{\theta_{**} \in X / J(\theta_{**}) = \inf_{\theta \in X} J(\theta)\},$$

где $\theta_0 = (v_{10}, v_{20}, p_0, d_0, x_{10}, x_{20}, \lambda_0) \in X$ – начальная точка итерационного процесса (42).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5, функционал $J(\theta)$, $\theta \in X$ ограничен снизу, последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ определяется по формуле (42). Тогда*

$$1) \;\; J(\theta_n - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{43}$$

$$2) \;\; \lim_{n\to\infty} \|\theta_n - \theta_{n+1}\| = 0. \tag{44}$$

Доказательство. Так как θ_{n+1} является проекцией точки $\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)$, то $< \theta_{n+1} - \theta_n + \alpha_n J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} >_H \geq 0$, $\forall\theta$, $\theta \in X$. Отсюда, с учетом того, что $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$, получим

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2}\right)\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, и верно неравенство (43). Равенство (44) следует из ограниченности снизу функционала $J(\theta)$, $\theta \in X$. Заметим, что $J(\theta) > 0$, $\forall\theta$, $\theta \in X$. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 5, множество M_0 – ограничено и выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} &< F_{0q}(t, q_1) - F_{0q}(t, q_2), q_1 - q_2 >_{R^N} \geq 0, \;\; \forall q_1, \; q_2 \in R^N, \\ &N = m + m_2 + 2n + s + m_1 + r + 2(n + m_2). \end{aligned} \tag{45}$$

Тогда:

1) множество M_0 – слабо бикомпактно, $X_{**} \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество;

2) последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta);$$

3) последовательность $\{\theta_n\} \subset M_0$ слабо сходится к точке $\theta_{**} \in X_{**}$;

4) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leqslant J(\theta_n) - J_* \leqslant \frac{c_1}{n}, \ \ c_1 = const > 0, \ \ n = 1, 2, \dots;$$

5) краевая задача (1)–(6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta\in X} J(\theta) = J(\theta_{**}) = 0;$$

6) если $J(\theta_{**}) = 0$, где $\theta_{**} = \theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_1^*, \lambda_*) \in X_*$, то решение краевой задачи (1)–(6) является функция

$$x_*(t) = Py_*(t), \ \ y_*(t) = z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t)z(t_1; v_1^*, v_2^*), \ \ t \in I.$$

7) если $J(\theta_{**}) > 0$, то краевая задача (1)–(6) не имеет решения.

Доказательство. Из условия (5) следует, что функционал $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$ является выпуклым. Первое утверждение теоремы следует из того, что M_0 – ограниченное выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахово пространства H, а также из слабой полунепрерывности снизу функционала $J(\theta)$ на слабо бикомпактном множестве M_0. Второе утверждение следует из оценки $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда имеем $J(\theta_{n+1}) < J(\theta_n)$, $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\{\theta_n\} \subset M_0$. Тогда из выпуклости функционала $J(\theta)$, $\theta \in M_0$ следует, что $\{\theta_n\}$ минимизирующая. Третье утверждение следует из слабой бикомпактности множества M_0, $\{\theta_n\} \subset M_0$. Оценка скорости сходимости следует из неравенства $J(\theta_n) - J(\theta_{**}) \leqslant c_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|$. Утверждения 5), 6) следуют из теоремы 4. Теорема доказана.

Заметим, что если $f(x, \lambda, t)$, $f_{0j}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$, $j = \overline{1, m_2}$, $F(x, \lambda)$ – линейные функции относительно переменных (x, x_0, x_1, λ), то функционал $J(\theta)$ является выпуклым.

4. Заключение

Разработан метод решения краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии фазовых и интегральных ограничений. Основой предлагаемого является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача с параметром при наличии фазовых и интегральных ограничений заменяется на равносильную начальную задачу оптимального управления. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Существование решения краевой задачи с параметром и ограничениями сведено к построению минимизирующей последовательности и определению значения нижней грани функционала.

В общем случае оптимизационная задача (33)–(36) может иметь бесконечное множество решений $\{\theta_*\} \subset X$, для которых $J(\{\theta_*\}) = 0$. В зависимости от выбора начального приближения минимизирующие последовательности сходятся к какому-либо элементу множества $\{\theta_*\}$. Пусть $\theta_* = (v_{1*}, x_0^*, x_1^*, \lambda_*)$, где $J(\theta_*) = 0$ – некоторое решение. Здесь $x_0^* = x(t_0)$, $x_1^* = x(t_1)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1 = S$, $\lambda_* \in \Lambda$, где x_0^* – начальное состояние системы. В постановке задачи приведены требования (7), (8), налагаемые на правую часть дифференциального уравнения (1), при выполнении которых начальная задача Коши имеет единственное решение. Следовательно, дифференциальное уравнение (1) с начальным состоянием $x_0^* = x(t_0)$ при $\lambda = \lambda_* \in \Lambda$ имеет единственное решение для значений $t \in [t_0, t_1]$. Более того, $x_1^* = x(t_1)$, и выполнены все ограничения (2)–(6). Независимо от того, какое решение выделяется итерационной процедурой, в случае, $J(\theta_*) = 0$, находим соответствующее решение краевой задачи (1)–(6).

Принципиальное отличие предлагаемого метода состоит в том, что разрешимость и построение решения краевой задачи с параметром и ограничениями решаются воедино, путем построения минимизирующих последовательностей, ориентированных на применении компьютерной техники. Разрешимость и построение решения краевой задачи определяются путем решения оптимизационной задачи (33) – (36), где $\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = \inf_{\theta\in X} J(\theta) = 0$ дает условия разрешимости, а через предельные точки последовательности $\{\theta_m\}$ равные θ_* определяется решение краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т. 4. Ч. II (6-е изд.) М.: Наука, 1981. 550 с.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Светников А.Г. *Дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1985. 231 с.
3. Клоков Ю.А. *О некоторых краевых задачах для систем двух уравнений второго порядка* // Дифференциальные уравнения, Т. 48. № 10. 2012. С. 1368–1373.
4. Колмогоров Д.П., Шейка Б.А. *Задача о кратных собственных и положительных собственных функциях для однородного квазилинейного уравнения второго порядка.* // Дифференциальные уравнения, Т. 48. № 9. С. 1475–1486.
5. Макин А.С., Томпсон Г.В. *О разложениях по собственным функциям нелинейного оператора Штурма–Лиувилля с краевыми уловиями зависящими от спектрального параметра* // Дифференциальные уравнения, Т. 27. № 8. С. 1096–1104.
6. Айсагалиев С.А. *Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнния. Т. 27. № 9. С. 1475–1486.
7. Айсагалиев С.А. *Общее решение одного класса интегральных уравнений* // Математический журнал. Т. 5. 2005. №14(18).
8. Айсагалиев С.А., Белогуров А.П. *Упраляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением.* Сибирский математический журнал, январь-февраль, Т. 53. 2011, № 1. С. 20–37.
9. Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. *Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями* // Дифференциальные уравнения. Т. 48. 2012. № 6. С. 826–838.
10. Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. *Оптимальное управление динамических систем.* Palmarium Academic Publishing (Verlag, Германия). 2012. 288 с.
11. Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.Н., Жунусова Ж.Х. *Принцип погружения для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений* // Математический журнал. Т. 12. 2012. №2(44). С. 5–22.
12. Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.Н., Поздеева Е.М. *К краевой задаче обыкновенных дифференциальных уравнений* // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2012. №2(76). С. 5–24.

Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
механико-математический факультет,
пр. Аль-Фараби, 71, корп. 13,
050040, г. Алматы, Казахстан
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Жунусова Жанат Хафизовна,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
механико-математический факультет,
пр. Аль-Фараби, 71, корп. 13,
050040, г. Алматы, Казахстан
E-mail: zhzhkh@mail.ru