ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 8. № 2 (2016). С. 14-21.

УДК 519.216

О ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ: В n НЕЗАВИСИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ СХЕМАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕМ КАЖДОЙ ЯЧЕЙКИ НЕ ПРЕВОСХОДИТ r

А.И. АФОНИНА, И.Р. КАЮМОВ, А.Н. ЧУПРУНОВ

Аннотация. Рассматриваются n обобщенных одинаковых схем размещения частиц по ячейкам. В работе исследуется вероятность события, состоящего в том, что в каждой ячейке каждой обобщенной схемы размещения содержится не более, чем r частиц, где r — фиксированное число. Получена асимптотическая оценка данной вероятности, а также рассмотрено приложение полученных результатов к помехоустойчивому кодированию.

Ключевые слова: обобщенная схема размещения, интеграл Коши, код Хемминга.

Mathematics Subject Classification: 60K30

1. Введение и основные результаты

Пусть ξ, ξ_j, $1 \le j \le N$, – независимые неотрицательные целочисленные одинаково распределенные случайные величины. Напомним ([1]), что случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_{\rm N}$ называются обобщенной схемой размещения m частиц по N ячейкам, если их совместное распределение имеет вид

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_{\rm N} = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = m\},$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_N = m$.

Многие схемы размещения дискретной теории вероятностей, такие как схема размещения различимых частиц по ячейкам, схема размещения неразличимых частиц по ячейкам, случайные перестановки, случайные леса, являются обобщенными схемами размещения (см. об обобщенных схемах размещения [2]–[6].

Далее в качестве случайных величин ξ, ξ_j мы будем рассматривать случайные величины $\xi = \xi(x), \xi_j = \xi_j(x)$, $x > 0$, с распределением

$$\mathbf{P}(\xi(x) = k) = \frac{a_k x^k}{S(x)}, \quad k = 0, 1, 2 \dots,$$

где $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ — сумма ряда с неотрицательными коэффициентами, имеющего положительный радиус сходимости R. В этом случае мы будем говорить, что обобщенная схема размещения $\eta_1, \dots, \eta_{\rm N}$ определена функцией $S(x)$.

Случайные величины $\xi = \xi(x), \xi_j = \xi_j(x)$ были введены в работе [7]. В работах [7]– [9] получены предельные теоремы для сумм случайных величин $\xi_j(x)$.

Рассмотрим событие $A_N(m, r)$, состоящее в том, что в обобщенной схеме размещения m частиц по N ячейкам в каждой ячейке содержится не более r частиц:

$$A_N(m, r) = \{\omega \in \Omega : \eta_1(\omega) \le r, \dots, \eta_{\rm N}(\omega) \le r\} = \{\omega \in \Omega : \max_{1 \le i \le N} \eta_{\rm i}(\omega) \le r\}.$$

A.I. Afonina, I.R. Kayumov, A.N. Chuprunov, On the probability of the event: in n generalized allocation schemes the volume of each cell does not exceed r.

Поступила 29 декабря 2015 г.

Вероятность события $A_N(m,r)$ имеет следующее представление.

Лемма А. *Пусть $S_r(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k$ – частичная сумма ряда $S(z)$, $a_m(S^N)$ – m-й коэффициент разложения функции $(S(z))^N$ - N-й степени функции $S(z)$, $a_m(S_r^N)$ – m-й коэффициент разложения функции $(S_r(z))^N$ - N-й степени функции $S_r(z)$. Тогда*

$$\mathbf{P}(A_N(m,r)) = \frac{a_m(S_r^N)}{a_m(S^N)} = \frac{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_C \frac{S_r(z)^N}{z^{m+1}} dz}{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_C \frac{S(z)^N}{z^{m+1}} dz}, \tag{1}$$

где C – замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, внутренность которого не содержит нулей функций S и S_r.

Пусть $\eta_{\mathrm{i}1}, \ldots, \eta_{\mathrm{iN}}$, $1 \le i \le n$, — последовательность независимых одинаково распределенных обобщенных схем размещения m частиц по N ячейкам (т.е. таких, что совместное распределение определяется формулой

$$\mathbf{P}\{\eta_{\mathrm{i}1} = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{iN}} = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \,|\, \xi_1 + \cdots + \xi_N = m\},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = m$).

Мы будем предполагать, что выполнено условие (A_k): $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k = 1$, $a_{k+1} > 0$.

В [13], используя представление (1), мы доказали следующую теорему.

Теорема В. *Пусть условие (A_0) выполнено, $m > r$. Тогда*

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) = \exp\left[\frac{-m(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}} \frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}} \alpha \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right], \tag{2}$$

при $n, N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^r)$, где α – отношение количества независимых серий частиц к числу ячеек, т.е.

$$\alpha = \alpha_{nN} = \frac{n}{N}.$$

В частности, если $m > r$, $n, N \to \infty$ так, что $\frac{n}{N^r} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) \to \exp\left[-m(m-1)\cdots(m-r)\frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\beta\right].$$

Справедливо следующее обобщение теоремы В на случай произвольного k.

Теорема 1. *Пусть условие (A_k) выполнено, $k < r < K < \infty$. Обозначим: $m_1 = m - kN$. Тогда*

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) = \tag{3}$$

$$= \exp\left[\frac{-m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-k))}{N^{r-k-1}} \frac{a_{r+1}}{a_{k+1}^{r-k+1}} \alpha \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right],$$

равномерно по $m_1 \in (k, K]$ при m, n, $N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^{r-k})$. В частности, если m, n, $N \to \infty$ так, что m_1 фиксировано, $m_1 > r$ и $\frac{n}{N^{r-k}} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) \to \exp\left[-m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-k))\frac{a_{r+1}}{a_{k+1}^{r-k+1}}\beta\right]. \tag{4}$$

Рассмотрим обобщенную схему размещения $\eta_1^*, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^*$, определенную функцией $S^*(x) = \sum_{i=0}^\infty a_i^* x^i$, событие $A_{n,N}^*(m,r) = \cap_{i=1}^n \{\eta_{\mathrm{i}1}^* \le r, \ldots, \eta_{\mathrm{iN}}^* \le r\}$, где $\eta_{\mathrm{i}1}, \ldots, \eta_{\mathrm{iN}}$, $1 \le i \le n$, — независимые копии схемы $\eta_1^*, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^*$.

Следствие. *Пусть условие* (A_k) *выполнено для схем* $\eta_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}$ *и* $\eta_1^*, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^*$, $a_{k+1} = a_{k+1}^*$, $a_{r-k+1} = a_{r-k+1}^*$, $k < r < K < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) = \mathbf{P}(A_{n,N}^*(m,r))^{\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)}$$

равномерно по $m_1 \in (k, K]$ *при* $m, n, N \to \infty$ *таким образом, что* $\alpha = o(N^{r-k})$.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что для вероятностей $\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r))$ и $\mathbf{P}(A_{n,N}^*(m,r))$ справедлива формула (3).

Замечание 1. Случайная величина $\eta_{(N)} = \max_{1 \le i \le N} \eta_i$ называется максимальным объемом ячейки. Изучению предельного поведения максимального объема ячейки посвящено большое количество работ ([2], [6], [17]). При $n = 1$ теорему B и теорему 1 можно рассматривать как предельную теорему для функции распределения случайной величины $\eta_{(N)}$ в случае, когда m_1 ограничено, а $N \to \infty$.

Пусть $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1^{\cdot}, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\cdot}$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1^{\cdot} = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\cdot} = k_N\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}} = k_N \mid r_1 \le \min_{1 \le i \le N} \eta_i, \ \ \max_{1 \le i \le N} \eta_i \le r_2\},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = m$, $r_1 \le k_i \le r_2$, $1 \le i \le N$.

Теорема 2. *Случайные величины* $\eta_1^{\cdot}, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\cdot}$ *являются обобщенной схемой размещения* m *частиц по* N *ячейкам, определенной функцией* $S_{r_1 r_2}(x) = \sum\limits_{i=r_1}^{r_2} a_i x^i$.

Пусть $0 < r_2 \le \infty$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1^{\{2\}}, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{2\}}$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1^{\{2\}} = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{2\}} = k_N\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}} = k_N \mid \max_{1 \le i \le N} \eta_i \le r_2\},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = m$, $0 \le k_i \le r_2$, $1 \le i \le N$.

При $r_1 = 0$ и из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Случайные величины* $\eta_1^{\{2\}}, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{2\}}$ *являются обобщенной схемой размещения* m *частиц по* N *ячейкам, определенной функцией* $S_{0r_2}(x) = \sum\limits_{i=0}^{r_2} a_i x^i$.

Пусть $0 \le r_1 < \infty$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1^{\{1\}}, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{1\}}$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1^{\{1\}} = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{1\}} = k_N\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_{\mathrm{N}} = k_N \mid r_1 \le \min_{1 \le i \le N} \eta_i\},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = m$, $r_1 \le k_i$, $1 \le i \le N$.

При $r_2 = \infty$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Случайные величины* $\eta_1^{\{1\}}, \ldots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{1\}}$ *являются обобщенной схемой размещения* m *частиц по* N *ячейкам, определенной функцией* $S_{r_1\infty}(x) = \sum\limits_{i=r_1}^{\infty} a_i x^i$.

Применим теорему 1 и теорему 2 к изучению асимптотического поведения вероятности события $A_{n,N}(m, r, r_1, r_2)$, состоящего в том, что в каждой ячейке каждой схемы содержится не более r частиц, если известно, что в каждой ячейке каждой схемы содержится не менее r_1 и не более r_2 частиц, т.е. вероятность события $A_{n,N}(m,r)$ при условии: в каждой ячейке каждой схемы содержится не менее r_1 и не более r_2 частиц.

Теорема 3. *Пусть $r_1 < r < r_2$, $r < K < \infty$, условие (A_{r_1}) выполнено. Обозначим: $m_1 = m - r_1 N$. Тогда*

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r,r_1,r_2)) =$$

$$= \exp\left[\frac{-m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-r_1))}{N^{r-r_1-1}}\frac{a_{r+1}}{a_{r_1+1}^{r-r_1+1}}\alpha\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right],$$

равномерно по $r < m_1 < K$ при m, n, $N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^{r-r_1})$, в частности, если $m, n, N \to \infty$ так, что m_1 фиксировано, $m_1 > r$ и $\frac{n}{N^{r-r_1}} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r,r_1,r_2)) \to \exp\left[-m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-r_1))\frac{a_{r+1}}{a_{r_1+1}^{r-r_1+1}}\beta\right].$$

Используя в доказательстве теоремы 3 вместо теоремы 2 следствие 1 теоремы 2, получаем

Следствие 1. *Пусть $0 < r < r_2$ условие (A_0) выполнено. Тогда*

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r,0,r_2)) =$$

$$= \exp\left[\frac{-(m)(m-1)\cdots(m-r)}{N^{r-1}}\frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\alpha\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right],$$

при $n, N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^r)$, в частности, если $n, N \to \infty$ так, что $\frac{n}{N^r} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r,0,r_2)) \to \exp\left[-m(m-1)\cdots(m-r)\frac{a_{r+1}}{a_1^{r+1}}\beta\right].$$

Замечание 2. Из теоремы 3 и следствия 1 теоремы 3 следует, что асимптотическое поведение вероятностей события $A_{n,N}(m,r,r_1,r_2)$ не зависит от r_2.

Вероятность $\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r))$ имеет следующее применение к теории помехоустойчивого кодирования. Рассмотрим код, который позволяет исправить в блоке не больше r ошибок типа замещения. Частным случаем такого кода является код Хемминга (см. о коде Хемминга, например, в [10]). Пусть мы имеем n сообщений. Каждое сообщение имеет N блоков и содержит m ошибок. Мы предполагаем, что вероятности, связанные с различными сообщениями, независимы, и ошибки распределяются по блокам сообщения согласно некоторой обобщенной схемы размещения. Интерпретируя ошибки как частицы, а ячейки как блоки, замечаем, что $\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r))$ — вероятность события, состоящего в том, что ошибки во всех n сообщениях будут исправлены.

В работе [11] исследовалась сходимость вероятности $\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r))$ в случае схемы размещения различимых частиц по различным ячейкам. В [12], [13] изучалась сходимость вероятности $\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r))$ в общем случае. В работах [14], [15] исследовалась сходимость вероятностей некоторых аналогов событий $A_{n,N}(m,r)$. При $r = 1$ в [16] изучалась сходимость вероятности события $A_{n,N}(m,r)$, в котором количество частиц в блоках случайно. Вероятности событий $A_N(m,r)$ в некоторых аналогах обобщенной схемы размещения изучались в [17].

Рассмотрим приложение теоремы 1 к некоторым схемам вероятностной комбинаторики.

Случайные леса. Случайный лес, имеющий N корневых и m некорневых вершин, является обобщенной схемой размещения m частиц по N ячейкам с функцией

$$S(z) = \frac{1^{1-1}}{1!}z + \frac{2^{2-1}}{2!}z^2 + \cdots \frac{r^{r-1}}{r!}z^r + \cdots,.$$

т. е. соответствует случаю $k = 1$ (см. [2]). Поэтому вероятность события: в n случайных лесах, каждый из которых состоит из N деревьев и m некорневых вершин, каждое дерево имеет не более r ветвей равна

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) =$$

$$= \exp\left[\frac{-(m-N)(m-N-1)\cdots(m-N-(r-1))(r+1)^{r-1}}{N^{r-2}r!}\alpha\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right],$$

при $n, N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^{r-1})$. В частности, если m, $n, N \to \infty$ так, что $m - N = m_1$ фиксировано и $\frac{n}{N^{r-1}} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) \to \exp\left[-\frac{m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-1))(r+1)^{r-1}}{r!}\beta\right].$$

Циклы в подстановках. Случайная подстановка степени m, содержащая ровно N циклов, является обобщенной схемой размещения m частиц по N ячейкам с функцией $S(z) = -\ln(1-z)$ (см. [2]). Заметим, что $-\ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k$. Поэтому вероятность события: в n случайных подстановках, каждая из которых имеет степень m и состоит из N циклов, каждый цикл имеет длину не более r, равна

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) =$$

$$= \exp\left[\frac{-(m-N)(m-N-1)\cdots(m-N-(r-1))2^r}{N^{r-2}(r+1)}\alpha\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right],$$

при $n, N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^{r-1})$. В частности, если m, $n, N \to \infty$ так, что $m - N = m_1$ фиксировано и $\frac{n}{N^{r-2}} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) \to \exp\left[-\frac{m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-1))2^r}{r+1}\beta\right].$$

Случайные разбиения. Равновероятное разбиение целого положительного числа m на N упорядоченных слагаемых, не превосходящих k, является обобщенной схемой размещения с функцией

$$S(z) = \frac{z^k}{1-z} = \sum_{i=k}^{\infty} z^i$$

(см. [2]), т. е. удовлетворяет условию (A_k). Поэтому вероятность события: в n независимых случайных разбиениях целого положительного числа m на N упорядоченных слагаемых, не превосходящих k, каждый элемент разбиения не превосходит r, равна

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) =$$

$$= \exp\left[\frac{-(m-kN)(m-kN-1)\cdots(m-kN-(r-k))}{N^{r-k-1}}\alpha\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right],$$

при $m, n, N \to \infty$ таким образом, что $\alpha = o(N^{r-k})$. В частности, если $m > r$, $n, N \to \infty$ так, что $m - kN = m_1$ фиксировано, $\frac{n}{N^{r-k}} \to \beta$, где $\beta < \infty$, то

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) \to \exp\left[-m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-k))\beta\right].$$

2. Доказательства

Доказательство леммы А. Имеем

$$\mathbf{P}(A_{mN}(r)) = \mathbf{P}\{\xi_1 \le r, \xi_2 \le r, \dots \xi_N \le r \mid \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = m\} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 \le r, \xi_2 \le r, \dots \xi_N \le r, \xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_N = m\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_N = m\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\{(k_i),:\, k_1+k_2+\dots+k_N=m,\ k_i \le r,\ 1\le i\le N\}} \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1\}\mathbf{P}\{\xi_2 = k_2\}\dots\mathbf{P}\{\xi_N = k_N\}}{\sum\limits_{\{(k_i)\,:\, k_1+k_2+\dots+k_N=m\}} \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1\}\mathbf{P}\{\xi_2 = k_2\}\dots\mathbf{P}\{\xi_N = k_N\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\{(k_i)\,:\, k_1+k_2+\dots+k_N=m,\ k_i \le r,\ 1\le i\le N\}} \frac{a_{k_1}x^{k_1}}{S(x)}\frac{a_{k_2}x^{k_2}}{S(x)}\dots\frac{a_{k_N}x^{k_N}}{S(x)}}{\sum\limits_{\{(k_i)\,:\, k_1+k_2+\dots+k_N=m\}} \frac{a_{k_1}x^{k_1}}{S(x)}\frac{a_{k_2}x^{k_2}}{S(x)}\dots\frac{a_{k_N}x^{k_N}}{S(x)}} = \frac{a_m(S_r^N)}{a_m(S^N)}.$$

Первое равенство в (1) доказано. Так как

$$a_m(S^N) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{S(z)^N}{z^{m+1}}dz, \quad a_m(S_r^N) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{S_r(z)^N}{z^{m+1}}dz,$$

то справедливо второе равенство в (1). Лемма А доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу (1) вероятность события $A_{n,N}$ имеет следующее представление

$$\mathbf{P}(A_{n,N}) = \mathbf{P}\left(\cap_{i=1}^n \{\eta_{\mathrm{i}1} \le r, \dots, \eta_{\mathrm{iN}} \le r\}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_C \frac{S_r(z)^N}{z^{m+1}}dz}{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_C \frac{S(z)^N}{z^{m+1}}dz}\right)^n. \tag{5}$$

Поэтому, используя (5) и (2), в которой вместо m рассматривается $m - kN$, вместо r рассматривается $r - k$, получаем

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m,r)) = \left(\frac{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_C \frac{\left(\sum_{i=k}^r a_i z^i\right)^N}{z^{m+1}}dz}{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_C \frac{\left(\sum_{i=k}^\infty a_i z^i\right)^N}{z^{m+1}}dz}\right)^n = \left(\frac{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_C \frac{\left(\sum_{i=0}^{r-k} a_{i+k} z^i\right)^N}{z^{m-kN+1}}dz}{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_C \frac{\left(\sum_{i=0}^\infty a_{i+k} z^i\right)^N}{z^{m-kN+1}}dz}\right)^n =$$

$$= \exp\left[\frac{-m_1(m_1-1)\cdots(m_1-(r-k))}{N^{r-k-1}}\frac{a_{r+1}}{a_{k+1}^{r-k+1}}\alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right].$$

Оценка (3) доказана. Оценка (3) влечет (4). Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Будем рассматривать независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i'(x)$ с распределением $\mathbf{P}(\xi_i'(x) = j) = \frac{a_j x^j}{S_{r_1 r_2}(x)}$, $r_1 \le j \le r_2$, $\mathbf{P}(\xi_i'(x) = j) = 0$, $j \notin [r_1, r_2]$. Пусть $k_1 + k_2 + \dots + k_N = m$, $r_1 \le k_i \le r_2$, $1 \le i \le N$. Имеем

$$\mathbf{P}\{\eta_1' = k_1, \dots, \eta_{\mathrm{N}}' = k_N\} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_{\mathrm{N}} = k_N, \xi_1 + \dots + \xi_{\mathrm{N}} = m, \xi_i = k_i, r_1 \le k_i \le r_2, 1 \le i \le N\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{\mathrm{N}} = m, \xi_i = k_i, r_1 \le k_i \le r_2, 1 \le i \le N\}} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_{\mathrm{N}} = k_N\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{\mathrm{N}} = m, \xi_i = k_i, r_1 \le k_i \le r_2, 1 \le i \le N\}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^N \mathbf{P}\{\xi_{\mathrm{i}} = k_i\}}{\sum\limits_{k_1+k_2'+\dots+k_N=m, r_1\le k_i\le r_2, 1\le i\le N} \prod_{i=1}^N \mathbf{P}\{\xi_i = k_i\}} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{N} \frac{a_{k_i} x^{k_i}}{S(x)}}{\sum\limits_{k_1+k_2'+\dots+k_N=m, r_1\le k_i\le r_2, 1\le i\le N} \prod\limits_{i=1}^{N} \frac{a_{k_i} x^{k_i}}{S(x)}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{N} a_{k_i} x^{k_i}}{\sum\limits_{k_1+k_2'+\dots+k_N=m, r_1\le k_i\le r_2, 1\le i\le N} \prod\limits_{i=1}^{N} a_{k_i} x^{k_i}} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{N} \frac{a_{k_i} x^{k_i}}{S_{r_1 r_2}(x)}}{\sum\limits_{k_1+k_2+\dots+k_N=m, r_1\le k_i\le r_2, 1\le i\le N} \prod\limits_{i=1}^{N} \frac{a_{k_i} x^{k_i}}{S_{r_1 r_2}(x)}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{\xi_{\mathrm{i}}' = k_i\}}{\mathbf{P}\{\xi_1' + \dots + \xi_{\mathrm{N}}' = m\}} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1' = k_1, \dots, \xi_{\mathrm{N}}' = k_N, \xi_1' + \dots + \xi_{\mathrm{N}}' = m\}}{\mathbf{P}\{\xi_1' + \dots + \xi_{\mathrm{N}}' = m\}} =$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1' = k_1, \dots, \xi_{\mathrm{N}}' = k_N, \mid \xi_1' + \dots + \xi_{\mathrm{N}}' = m\}.$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1 теоремы 2. Так как событие

$$\{, \max_{1\le i\le N} \eta_i \le r_2\} = \{0 \le \min_{1\le i\le N} \eta_i, \ \max_{1\le i\le N} \eta_i \le r_2\},$$

распределение случайного вектора $\eta_1^{\{\mathbf{2}\}}, \dots, \eta_{\mathrm{N}}^{\{\mathbf{2}\}}$ совпадает с распределением случайного вектора $\eta_1', \dots, \eta_{\mathrm{N}}'$, соответствующего случаю $r_1 = 0$. Поэтому применима теорема 2. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 2 справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A_{n,N}(m, r, r_1, r_2)) =$$

$$= \left(\mathbf{P}\{\max_{1\le i\le N} \eta_i \le r \mid r_1 \le \min_{1\le i\le N} \eta_i, \ \max_{1\le i\le N} \eta_i \le r_2\}\right)^n$$

$$= \left(\mathbf{P}\{\max_{1\le i\le N} \xi_i' \le r \mid \xi_1' + \dots + \xi_N' = m\}\right)^n.$$

Применяя к последнему выражению этого равенства теорему 1, получаем теорему 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В.Ф. *Один класс предельных теорем для условных распределений* // Лит. матем. сб., Т. 8, № 1. 1968. С. 53–63.
2. Колчин В.Ф. *Случайные графы.* М.: Физматгиз. 2000. 256 с.
3. Тимашев А.Н. *Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике.* М.: Научное издательство ТВП. 2011. 312 с.
4. Тимашев А.Н. *Обобщенная схема размещения в задачах вероятностной комбинаторики.* М.: Издательский дом «Академия». 2011. 268 с.
5. Тимашев А.Н. *Большие уклонения в вероятностной комбинаторике*, М.: Издательский дом "Академия". 2011.
6. Павлов Ю.Л. *Случайные леса.* Петрозаводск: Карельский научный центр РАН. 1996. 259 с.
7. Колчин А.В. *Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения* // Дискрет. матем, 15, №4. 2003. С. 143–157.
8. Колчин А.В., Колчин В.Ф. *О переходе раaспределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения* // Дискрет. матем, 18, №4. 2006. С. 113–127.
9. Колчин А.В., Колчин В.Ф. *Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения* // Дискрет. матем, 19, №3. 2007. С. 15–21.
10. Новиков Ф.А., *Дискретная математика для программистов*, Санкт-Петербург: Питер. 2004. 364 с.

11. F.G. Avkhadiev and A.N. Chuprunov *The probability of a successful allocation of ball groups by boxes* // Lobachevskii J. Math., 25. 2007. P. 3–7.
12. Авхадиев Ф.Г., Каюмов И.Р., Чупрунов А.Н. *Исследование вероятности успешного размещения частиц по ячейкам методами комплексного анализа* // Труды Матем. Центра им. Н.И. Лобачевского, Т. 19. 2003. С. 6–7.
13. Каюмов И.Р., Чупрунов А.Н. *О вероятности успешного размещения частиц по ячейкам (общий случай)* // Фундамент. и прикл. матем., 18:5. 2013. С. 119–128.
14. Чупрунов А.Н., Хамдеев Б.И. *О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок принадлежит некоторому конечному множеству* // Информ. и ее примен., 3:3, «Вероятностно-статистические методы и задачи информатики и информационных технологий». 2009. С. 52–59.
15. Чупрунов А.Н., Хамдеев Б.И. *О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок – случайное множество* // Изв. вузов. Матем., № 8. 2010. С. 81–88.
16. Чупрунов А.Н., Хамдеев Б.И., *О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, если число ошибок случайно* // Дискрет. матем., 22, № 2. 2010. С. 41–50.
17. E.V. Khvorostyanskaya, Y.L. Pavlov *Limit distributionsof the maximum filling ofcellsin ont allocation scheme* // European researcher. V. 76, №1-6. 2014. P. 1019–1027.

Афонина Александра Игоревна,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `sanyagirl89@mail.ru`

Каюмов Ильгиз Рифатович,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `ikayumov@kpfu.ru`

Чупрунов Алексей Николаевич,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `Alexey.Chuprunov@ksu.ru`