ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 132-138.

УДК 517.9

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.И. ТИМОШИН

Аннотация. Рассматривается задача использования динамических симметрий для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Выделяется класс динамических симметрий, обладающих инвариантами, обеспечивающими понижение порядка дифференциального уравнения. Приведены примеры.

Ключевые слова: динамические симметрии, инварианты, обыкновенные дифференциальные уравнения, каноническое уравнение Абеля второго рода.

1. Введение

Понятие динамических симметрий приведено, например, в [1]. Дифференциальное уравнение второго порядка заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = z, \;\; \frac{dz}{dx} = f(x, y, z)\,. \tag{1}$$

Инфинитезимальный оператор

$$X = \xi(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

допускается системой (1) тогда и только тогда, когда выполняется условие инвариантности

$$[X, A] = \lambda(x, y, z)\, A, \tag{3}$$

где $A = \dfrac{\partial}{\partial x} + z\dfrac{\partial}{\partial y} + f(x, y, z)\dfrac{\partial}{\partial z}$.

В отличие от касательных симметрий, определяемых характеристической функцией $\Omega(x, y, z)$

$$X = \Omega_z\frac{\partial}{\partial x} + (z\,\Omega_z - \Omega)\frac{\partial}{\partial y} - (\Omega_x + z\,\Omega_y)\frac{\partial}{\partial z},$$

у оператора динамической симметрии (2) компоненты $\xi,\ \eta,\ \mu$ определяются только условием (3).

В работе [2] предпринимались неудачные попытки использовать динамические симметрии к интегрированию автономных ОДУ второго порядка.

В предлагаемой работе исследование интегрируемости дифференциального уравнения проводится на основе специальных динамических симметрий.

M.I. Timoshin, Dynamical symmetries of ODE.

Поступила 7 августа 2009 г.

2. Нахождение динамических симметрий по их инвариантам

При нахождении точечных симметрий ОДУ второго порядка

$$F(x,y,y',y'')=0$$

придерживаются следующего алгоритма. Рассматривают продолженный оператор

$$\underset{2}{X}=\xi\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x}+\eta\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial y}+\eta_1\left(x,y,y'\right)\frac{\partial}{\partial y'}+\eta_2\left(x,y,y',y''\right)\frac{\partial}{\partial y''},\tag{4}$$

где

$$\eta_i=\frac{d\eta_{i-1}}{dx}-y^{(i)}\frac{d\xi}{dx}.\tag{5}$$

Критерий инвариантности

$$\underset{2}{X}F|_{F=0}\equiv 0\tag{6}$$

дает определяющую систему уравнений. Разрешая переопределённую систему определяющих уравнений, находят оператор точечной симметрии (4). Найденная симметрия используется для понижения порядка исходного дифференциального уравнения. При этом может быть использовано выпрямление оператора (4), то есть переход от переменных (x,y) к переменным (t,u). Для этого необходимо разрешить дифференциальные уравнения

$$Xt=1,\quad Xu=0.\tag{7}$$

Если функции $\alpha\left(x,y\right),\ \beta\left(x,y\right)$ являются решениями уравнений (7), то есть

$$t=\alpha\left(x,y\right),\quad u=\beta\left(x,y\right),$$

то компоненты оператора (4) могут быть выражены в терминах функций $\alpha\left(x,y\right),\ \beta\left(x,y\right)$

$$\xi\left(x,y\right)=\frac{\frac{\partial\beta}{\partial y}}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}},\qquad \eta\left(x,y\right)=-\frac{\frac{\partial\beta}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}}.\tag{8}$$

Таким образом, критерий инвариантности (6) с помощью соотношений (8) может быть использован непосредственно для нахождения как симметрии, так и выпрямляющей замены переменных. Отметим, что при этом не обязательно использовать формулу продолжения (5), достаточно заметить, что выражения

$$\frac{du}{dt}=\frac{\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}y'}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}y'},\quad \frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}y'\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}y'\right)-\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}y'\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}y'\right)}{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}y'\right)^3}$$

являются первым и вторым дифференциальными инвариантами, и разрешить систему линейных уравнений

$$Xt=1,\quad Xu=0,\ \underset{1}{X}\frac{du}{dt}=0,\ \underset{2}{X}\frac{d^2u}{dt^2}=0.\tag{9}$$

Определяющая система уравнений будет при таком подходе нелинейной относительно функций $\alpha\left(x,y\right),\ \beta\left(x,y\right)$, однако сохранится её переопределённость.

Отбросив из системы (9) первое уравнение, получим систему линейных однородных уравнений относительно компонент продолженного оператора. Разрешая систему алгебраических уравнений

$$Xu=0,\ \underset{1}{X}\frac{du}{dt}=0,\ \underset{2}{X}\frac{d^2u}{dt^2}=0,\tag{10}$$

получим выражения для координат оператора точечных симметрий с точностью до функционального множителя. При этом также может быть использован критерий инвариантности (6).

Отметим, что переменные, определяемые из (10), также рассматривались в [3] (так называемые полу-канонические переменные) и использовались для интегрирования ОДУ с нелокальными симметриями.

Пусть $u = u(x, y, y')$, $v = v(x, y, y')$ — инварианты оператора динамической симметрии. Потребуем, чтобы выражение

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial y'} y''}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial y'} y''} \tag{11}$$

также являлось инвариантом динамической симметрии. Определим компоненты оператора динамической симметрии

$$X = \xi(x, y, y') \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''}, \tag{12}$$

разрешая систему уравнений

$$Xu = 0, \quad X\,v = 0, \quad X\,\frac{du}{dv} = 0.$$

Очевидно, что и в этом случае условие (6) является критерием инвариантности дифференциального уравнения относительно оператора динамической симметрии (12). Причём наложенное условие (11) позволяет понижать порядок дифференциального уравнения. В общем случае критерий инвариантности (6) не допускает расщепления.

Отметим, что точечные симметрии можно рассматривать как ansatze динамических симметрий, когда

$$u = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} y'}{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y'}, \quad v = \beta(x, y). \tag{13}$$

Инварианты (13) определяются двумя функциями $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ от двух переменных. Взяв в качестве инвариантов выражения

$$u = \frac{\alpha(x, y) + \beta(x, y)\, y'}{\varphi(x, y) + \psi(x, y)\, y'}, \qquad v = \chi(x, y), \tag{14}$$

придём к динамическим симметриям, содержащим в себе все случаи точечных симметрий. Вид инвариантов (14) позволяет расщеплять критерий инвариантности (6), однако необходимо учесть, что увеличение числа функций приводит к уменьшению степени переопределённости определяющей системы.

3. Примеры использования динамических симметрий к интегрированию ОДУ

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим дифференциальное уравнение, опубликованное Н.Х. Ибрагимовым в брошюре [4], посвящённой 150-летию Софуса Ли,

$$y'' = (x + x^2) e^y y' + (1 + 2x) e^y. \tag{15}$$

Уравнение (15) не допускает группу точечных преобразований. Однако, взяв новые переменные в виде

$$u = y' - (x + x^2) e^y, \qquad v = x, \tag{16}$$

придём к уравнению

$$\frac{du}{dv} = 0.$$

После однократного интегрирования и возвращения к исходным переменным получается уравнение

$$y' = \left(x + x^2\right) e^y + C_1,$$

которое линеаризуется заменой
$$z = e^{-y}$$
и приводится к виду
$$z' + C_1 z + x + x^2 = 0.$$
Отсюда
$$z = e^{-C_1 x}\left(C_2 - \int (x + x^2) e^{C_1 x} dx\right)$$
и решение уравнения (15) получается в квадратурах:
$$y = C_1 x - ln\left|C_2 - \int \left(x + x^2\right) e^{C_1 x} dx\right|.$$
Разрешая систему уравнений
$$Xu = 0, \ \ X\,v = 0, \ \ X\,\frac{du}{dv} = 0,$$
в случае уравнения (15) с инвариантами (16) найдём симметрию
$$X = \xi_2\left(x, y, y'\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + e^y\left(x + x^2\right)\frac{\partial}{\partial y'} + e^y\left(x^2\left(1 + x\right)^2 e^y + y'\left(x + x^2\right) + 2x + 1\right)\frac{\partial}{\partial y''}\right).$$
Непосредственной проверкой легко убедиться, что нельзя подобрать функцию $\xi_2\left(x, y, y'\right)$ так, чтобы указанная симметрия стала касательной. В случае уравнения (15) операторы
$$A = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + e^y\left(1 + 2x + z(x + x^2)\right)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X = \xi_2\left(x, y, z\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + e^y\left(x + x^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
и для выполнения условия (3) функция $\xi_2\left(x, y, z\right)$ должна удовлетворять уравнению
$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + z\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \left(z\left(x^2 + x\right) + 2x + 1\right)e^y\frac{\partial \xi_2}{\partial z} - \left(x^2 + x\right)e^y \xi_2 = 0.$$

Таким образом, приведённая симметрия может рассматриваться как динамическая в смысле определений книги [1].

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим дифференциальное уравнение
$$y'' = y' + f\left(y\right). \tag{17}$$
В работе [5] отмечается, что уравнение (17) связано с уравнением диффузии Колмогорова-Петровского-Пискунова, с уравнением Семёнова, используемым в теории цепных химических реакций, и уравнением Зельдовича, играющим фундаментальную роль в математической теории горения и взрыва. Если искать симметрии уравнения (17), взяв инварианты (14) в виде
$$u = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y', \qquad v = x,$$
то придём к симметриям
$$X = \xi_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y}y'}{\beta}\frac{\partial}{\partial y'} - \left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\beta}\right) - \left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\beta}\right)^2 + \\ +y'\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial \beta}{\partial x}}{\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\beta}\right) - 2\left(\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y}}{\beta^2}\right)\right) + \\ +y'^2\frac{\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\beta - 2\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2}{\beta^2} + y''\frac{\frac{\partial \beta}{\partial y}}{\beta} \end{array}\right)\frac{\partial}{\partial y''}\right).$$

Критерий инвариантности (6) в этом случае принимает вид

$$
\begin{aligned}
&- y'^2\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}\beta - 2\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2\right) - \\
&- y'\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\beta + \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x}\beta - \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - 3\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) - \\
&- \left(\frac{df}{dy}\beta^2 - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial x}\beta - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\beta}{\partial y}\beta\, f\right) \equiv 0,
\end{aligned}
$$

и расщепляется на систему трёх уравнений относительно двух функций $\alpha\left(x,y\right)$, $\beta\left(x,y\right)$.

Разрешая полученную систему уравнений, находим, что уравнение (17) допускает динамические симметрии с указанными инвариантами, если функция f(y) имеет вид:

$$f\left(y\right) = Ay + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3}.$$

Используя автономность уравнения (17), можно привести его к виду уравнения Абеля

$$z\frac{dz}{dy} = z + Ay + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3}.$$

В справочнике [6] указаны решения приведённого уравнения Абеля в параметрическом виде. Динамические симметрии позволяют привести явный вид решений уравнения (17). При этом возможны четыре случая.

Первый случай

$$
\begin{aligned}
&y'' = y' - \frac{1+a^2}{4}y + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3}, \\
&y\left(x\right) = \pm e^{\frac{x}{2}}\left(2C_3 sin\frac{ax}{2} - C_1 cos\frac{ax}{2}\right)\sqrt{C_2 - 2B\int\frac{e^{-x}}{\left(2C_3 sin\frac{ax}{2} - C_1 cos\frac{ax}{2}\right)^2}dx}.
\end{aligned}
$$

Второй случай

$$
\begin{aligned}
&y'' = y' - \frac{1}{4}y + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3}, \\
&y\left(x\right) = \pm e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 x + C_3\right)\sqrt{C_2 - 2B\int\frac{e^{-x}}{\left(C_1 x + C_3\right)^2}dx}.
\end{aligned}
$$

Третий случай

$$
\begin{aligned}
&y'' = y' - \frac{1-a^2}{4}y + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3}, \\
&y\left(x\right) = \pm e^{\frac{x(1-a)}{2}}\left(C_3 + a\left(a-1\right)C_1\left(e^{ax}\left(a-1\right) - a - 1\right)\right) \times \\
&\times\sqrt{C_2 - 2B\int\frac{e^{x(a-1)}}{\left(C_3 + a\left(a-1\right)C_1\left(e^{ax}\left(a-1\right) - a - 1\right)\right)^2}dx}.
\end{aligned}
$$

Четвёртый случай

$$y'' = y' + \frac{B}{y} - \frac{B^2}{y^3},$$
$$y(x) = \pm(1 + C_1 e^x)\sqrt{C_2 + 2B\left(ln(1 + C_1 e^x) - \frac{1}{1 + C_1 e^x} - x\right)}.$$

Пример 3. В качестве третьего примера рассмотрим дифференциальное уравнение (17) с инвариантами

$$u = \alpha(y) + \beta(y)y', \qquad v = x + \tau(y).$$

Определяющая система уравнений примет в этом случае вид

$$-\frac{d\beta}{dy}\frac{d\tau}{dy}\beta - \frac{d^2\beta}{dy^2}\beta + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\tau}{dy}\frac{d\alpha}{dy} + 2\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 - \frac{d^2\alpha}{dy^2}\frac{d\tau}{dy}\beta + \frac{d^2\tau}{dy^2}\frac{d\alpha}{dy}\beta + \frac{d^2\tau}{dy^2}\beta^2 = 0,$$
$$\frac{d^2\tau}{dy^2}\beta^2 f(y) - \frac{df}{dy}\beta^2\frac{d\tau}{dy} - \frac{d^2\alpha}{dy^2}\beta + 3\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\beta}{dy}\frac{d\tau}{dy}\beta f(y) = 0,$$
$$-\frac{d\beta}{dy}\beta f(y) - \frac{d\tau}{dy}\beta\frac{d\alpha}{dy}f(y) + \beta\frac{d\alpha}{dy} + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 - \frac{df}{dy}\beta^2 = 0,$$
$$-\frac{d^2\beta}{dy^2}\frac{d\tau}{dy}\beta + \frac{d^2\tau}{dy^2}\frac{d\beta}{dy}\beta + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2\frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Анализ определяющей системы приводит к параметрическому заданию функции $f(y)$

$$f = \frac{p\alpha_1\beta_2(b-2) - p^{3-b} - p^{b-1}f_1\chi_1 b^2}{b\chi_1(p^b\alpha_1\beta_2(b-2) - p^2 b},$$
$$y = \frac{\alpha_1\beta_2(b-2)}{b\chi_1 p} + \frac{p^{1-b}}{\chi_1(1-b)} - \frac{\chi_2}{\chi_1},$$

где p — параметр, $\alpha_1, \beta_2, b, f_1, \chi_1, \chi_2$ — некоторые константы.

Перейдя в уравнении (17) с параметрически заданной функцией $f(y)$ к новым переменным $p,\ t = x + blnp,\ \ (\beta_0 = \alpha_1\beta_2)$, придём к уравнению

$$\left(p^{b+4}\left(4\beta_0^2 + \beta_0^2 b^2 - 4\beta_0^2 b\right) + 2p^6\beta_0 b(2-b) + b^2 p^{8-b}\right)\frac{d^2p}{dt^2} +$$
$$+ bp^{2+b}\left(5\beta_0^2 b^2 - \beta_0^2 b^3 + f_1\chi_1 b^4 + 4\beta_0^2 - 8\beta_0^2 b\right)\left(\frac{dp}{dt}\right)^3 +$$
$$+ \left(p^{7-b}b^2(b-3) + 2p^5\beta_0 b(b-2) + p^{3+b}\left(16\beta_0^2 b - 3f_1\chi_1 b^4 - 10\beta_0^2 b^2 - 8\beta_0^2 + 2\beta_0^2 b^3\right)\right)\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 +$$
$$+ \left(bp^{8-b}(3-b) + p^{4+b}\left(3f_1\chi_1 b^3 - \beta_0^2(b-2)^2\right) + p^6\beta_0 b(2-b)\right)\frac{dp}{dt} +$$
$$+ p^7\beta_0(b-2) - p^{9-b} - p^{5+b}f_1\chi_1 b^2 = 0.$$

Приведённое уравнение обладает инвариантами

$$u = \frac{(b-2)\,\beta_0 c_1 p^{5+b}\frac{dp}{dt}}{\beta_0 p^{6+b}(b-2) - p^8 b} + \frac{p^{18+b}\beta_0 k_1 (b-2) - p^{20}(c_1 + k_1 b)}{p^{18+b}\beta_0 (b-2) - p^{20} b}, \quad v = t,$$

использование которых позволяет прийти к уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами R_0, R_1, R_2, R_3, R_4,

$$R_0 \frac{du}{dt} + R_1 + R_2 u + R_3 u^2 + R_4 u^3 = 0, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
R_0 =& \beta_0^2 c_1^2 (b-2)^2, \\
R_1 =& -(c_1 + k_1 b) \left(\begin{array}{l} \beta_0^2 k_1 (5k_1 b^2 - 4c_1 + 4c_1 b - c_1 b^2 - k_1 b^3 + 4k_1 - 8k_1 b + \\ f_1 \chi_1 b^2 (k_1 b + c_1)^2 \end{array} \right), \\
R_2 =& \beta_0^2 \left(\begin{array}{l} 18b^2 k_1 c_1 - 24 b k_1 c_1 - 3b^4 k_1^2 + 8k_1 c_1 - 4c_1^2 + 15 b^3 k_1^2 + \\ +12 b k_1^2 + 4 b c_1^2 - 24 b^2 k_1^2 - b^2 c_1^2 - 4 b^3 k_1 c_1 \end{array} \right) + \\
& + f_1 \chi_1 \left(6b^4 k_1 c_1 + 3b^5 k_1^2 + 3b^3 c_1^2 \right), \\
R_3 =& \beta_0^2 \left(3b^4 k_1 + 12 b c_1 + 2b^3 c_1 - 4c_1 - 12 b k_1 - 15 b^3 k_1 - 9b^2 c_1 + 24 b^2 k_1 \right) - \\
& - 3b^4 f_1 \chi_1 (c_1 + b k_1), \\
R_4 =& b \left(b^4 f_1 \chi_1 + \beta_0^2 b \left(5b^2 - b^3 - 8b + 4 \right) \right).
\end{aligned}$$

Полученное уравнение (18) является автономным уравнением первого порядка и, следовательно, легко интегрируется. Отметим также, что за счёт подбора постоянных c_1, k_1 можно изменить вид уравнения (18).

Таким образом, находится первый интеграл уравнения (17) с функцией $f(y)$, заданной параметрически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hans Stephani *Differential equations: their solution using symmetries* Cambridge university press. 1989.
2. M.I. Timoshin *Dynamical symmetries of autonomous differential second order equations* // Proceedings of Institute of Mathematics. Kyiv. 2004. Part 1. P. 1152–1160.
3. N.Kh. Ibragimov *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations* Wiley. 1999.
4. Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа* М.: Знание. 7/1991.
5. Беркович Л.М. *Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова и связанных с ним уравнений Семёнова и Зельдовича* // ДАН. Т. 322, № 5. 1992.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения* М.: Физматлит. 1995. 560 с.

Михаил Иванович Тимошин,
Ульяновский государственный технический университет,
ул. Северный Венец, 32,
432027, г. Ульяновск, Россия
E-mail: midvolga@mail.ru