ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 3 (2009). С. 97-110.

УДК 517.912

НЕПОДОБНЫЕ ШЕСТИМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ НА ПЛОСКОСТИ И ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В.О. ЛУКАЩУК

Аннотация. В работе решаются задачи построения всех неподобных шестимерных приближенных алгебр Ли в пространстве дифференциальных операторов первого порядка от двух переменных на основе известной классификации приближенных алгебр Ли и нахождения соответствующих инвариантных дифференциальных уравнений второго порядка вида $y'' = F_{(0)}\,(x, y, y') + \varepsilon F_{(1)}\,(x, y, y') + o(\varepsilon)$.

Ключевые слова: приближенная алгебра Ли, приближенные симметрии дифференциального уравнения с малым параметром.

1. Введение

Знание группы преобразований, допускаемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, позволяет понижать порядок уравнения или интегрировать его. В частности, если дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = F(x, y, y') \tag{1}$$

имеет трехмерную алгебру симметрий, то С. Ли показал, что его решение может быть выписано без интегрирования. Им была проведена классификация всех неподобных трехмерных алгебр Ли на плоскости, получены соответствующие инвариантные дифференциальные уравнения второго порядка (результат см., например, в [1]). В недавней работе [2] был приведен алгоритм и показано, что если в частных случаях приближенное уравнение второго порядка имеет три симметрии, то его решение, также как и в случае уравнения (1), может быть получено без интегрирования (алгебраическими преобразованиями).

В данной работе ищется общий вид дифференциального уравнения

$$y'' = F_{(0)}\,(x, y, y') + \varepsilon F_{(1)}\,(x, y, y') + o(\varepsilon) \tag{2}$$

второго порядка с тремя устойчивыми симметриями.

Теория приближенных симметрий была развита в работах [3], [4]. В частности, было показано, что если уравнение (2) приближенно допускает оператор вида

$$X = X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)}, \tag{3}$$

где $X_{(0)} \neq 0$, то $X_{(0)}$ является симметрией невозмущенного уравнения

$$y'' = F_{(0)}(x, y, y'). \tag{4}$$

В этом случае говорят, что $X_{(0)}$ является устойчивой симметрией уравнения (4) относительно рассматриваемого возмущения $\varepsilon F_{(1)}\,(x, y, y') + o(\varepsilon)$.

V.O. Lukashchuk, Non-similar six-dimensional approximate Lie algebras on planes and invariant second order differential equations with small parametre.

Поступила 25 августа 2009 г.

В данной работе рассматривается приближенная алгебра Ли, базис которой определяется тремя операторами вида (3). Согласно [5] такая алгебра Ли является шестимерной и существует 36 типов таких вещественно неизоморфных приближенных алгебр. В данной статье, на основе имеющейся в [5] классификации, строится реализация всех неподобных шестимерных приближенных алгебр Ли в пространстве дифференциальных операторов (3) первого порядка от двух переменных (раздел 3), ищется общий вид инвариантного уравнения относительно каждой из алгебр (раздел 4).

В работе используются следующие обозначения. Равенство $f(x,\varepsilon) = o(\varepsilon)$ означает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(x,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Под приближенным равенством $f \approx g$ понимается $f(x,\varepsilon) = g(x,\varepsilon) + o(\varepsilon)$.

2. Приближенная алгебра Ли

Введем необходимые понятия теории приближенных алгебр Ли, следуя работе [5].

Пусть U — N-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, которое является алгеброй Ли с определенной на ней обычной операцией коммутирования. Рассмотрим множество $U \oplus \varepsilon U = \left\{u_{(0)} + \varepsilon u_{(1)} : u_{(0)}, u_{(1)} \in U, \varepsilon \text{ — малый параметр}\right\}$, на котором определена операция приближенного коммутирования

$$\left[u_{(0)} + \varepsilon u_{(1)}, v_{(0)} + \varepsilon v_{(1)}\right] \approx \left[u_{(0)}, v_{(0)}\right] + \varepsilon\left(\left[u_{(0)}, v_{(1)}\right] + \left[u_{(1)}, v_{(0)}\right]\right).$$

Такое множество $U \oplus \varepsilon U$ является алгеброй Ли относительно операции приближенного коммутирования.

Замечание. Введенная операция коммутирования предполагает, что полученные в результате слагаемые порядка ε^2 отбрасываются.

Очевидно, что если некоторое линейное подпространство $L \subset U \oplus \varepsilon U$ замкнуто относительно операции приближенного коммутирования, то оно также является алгеброй Ли. В дальнейшем такие алгебры Ли будем называть *приближенными алгебрами Ли.*

Элементы множества L могут быть двух типов: либо

$$u = u_{(0)} + \varepsilon u_{(1)}, \text{ где } u_{(0)} \neq 0, \tag{5}$$

которые будем называть векторами *нулевого порядка* по ε, либо

$$u = \varepsilon u_{(0)}, \text{ где } u_{(0)} \neq 0, \tag{6}$$

которые будем называть векторами *первого порядка* по ε. Тогда $L = \underset{0}{L} \oplus \underset{1}{L}$, где множество $\underset{0}{L}$ состоит из векторов типа (5), а $\underset{1}{L}$ — из векторов типа (6).

В пространстве L вводится базис $e_1, \ldots, e_r$, и любой вектор пространства может быть представлен как линейная комбинация базисных (линейно независимых) векторов с константами, независящими от малого параметра ε. Если среди базисных векторов имеется k вида (5) и $(r-k)$ вида (6), то $\underset{0}{L} =< e_{1(0)} + \varepsilon e_{1(1)}, \ldots, e_{k(0)} + \varepsilon e_{k(1)} >$, а $\underset{1}{L} =< \varepsilon e_{k+1(0)}, \ldots, \varepsilon e_{r(0)} >$. При этом $(L_0)|_{\varepsilon=0} =< e_{1(0)}, \ldots, e_{k(0)} >$ — алгебра Ли, а множество $L_{r(0)} =< e_{1(0)}, \ldots, e_{r(0)} >$ не обязательно будет алгеброй Ли.

Будем рассматривать преобразования базиса, при которых операторы нулевого порядка переходят в операторы нулевого порядка, а операторы первого порядка – в операторы первого порядка. Это означает, что замена базиса осуществляется по формулам

$$\overline{e}_i = \sum_{j=1}^{r} \sigma_i^j e_j, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad \overline{e}_l = \sum_{m=k+1}^{r} \sigma_l^m e_m, \quad l = k+1, \ldots, r,$$

где $(\sigma_i^j), i, j = 1, \ldots, k,$ $(\sigma_l^m), l, m = k+1, \ldots, r,$ — невырожденные матрицы с вещественными элементами, не зависящими от малого параметра ε.

Среди приближенных алгебр Ли будем выделять такие алгебры, базис которых образуют существенные векторы.

Определение 1. *Векторы $e_1, \ldots, e_k$ называются существенными для алгебры Ли L_r, если линейная оболочка векторов e_i и $\varepsilon e_i, i = 1, \ldots, k$, с постоянными коэффициентами, независящими от малого параметра, совпадает с L_r с точностью до слагаемых первого порядка.*

Согласно этому определению, если в алгебре Ли имеются существенные векторы e_i вида (5), (6), то множество $\{e_i, \varepsilon e_i\}$ образует базис в L_r ([4]) и при переходе к новому базису достаточно рассматривать лишь преобразование существенных векторов.

На основе известных результатов классификации неизоморфных точных алгебр Ли (см., например, [6]), получаемых из приближенных при $\varepsilon = 0$, в [5] строились неизоморфные приближенные алгебры с тремя существенными векторами. Такие алгебры Ли могут быть а) шести-, б) пяти- и в) четырехмерными с существенными векторами вида а) $e_i = e_{i(0)} + \varepsilon e_{i(1)}, i = 1, 2, 3$; б) $e_1 = \varepsilon e_{1(0)}$, $e_2 = e_{2(0)} + \varepsilon e_{2(1)}, e_3 = e_{3(0)} + \varepsilon e_{3(1)}$; в) $e_1 = \varepsilon e_{1(0)}, e_2 = \varepsilon e_{2(0)}, e_3 = e_{3(0)} + \varepsilon e_{3(1)}$, соответственно, $e_{i(0)} \neq 0, i = 1, 2, 3$. Было найдено 36 типов неизоморфных шестимерных приближенных алгебр Ли (см. таблицу 1). В таблице 1 приведены коммутационные соотношения существенных векторов e_1, e_2, e_3. Остальные коммутационные соотношения могут быть получены из указанных путем умножения на малый параметр (например, $[e_i, \varepsilon e_j], i, j = 1, 2, 3)$, причем $[\varepsilon e_i, \varepsilon e_j] \approx 0$. Классификация проводилась в зависимости от размера производной алгебры L'.

3. Реализация приближенных алгебр Ли в $\mathbb{R}^2$

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения (2), приближенно допускающие три существенных оператора вида

$$X_1 = X_{1(0)} + \varepsilon X_{1(1)}, \quad X_2 = X_{2(0)} + \varepsilon X_{2(1)}, \quad X_3 = X_{3(0)} + \varepsilon X_{3(1)}, \tag{7}$$

где $X_{i(0)} \neq 0,\ i = 1, 2, 3$. Операторы $X_{i(0)}$ определяют три симметрии невозмущенного уравнения (4), являются линейно независимыми и образуют базис точной трехмерной алгебры Ли. Тогда операторы (7) являются существенными операторами в некоторой приближенной алгебре Ли симметрий уравнения (2). Базис такой алгебры образован ненулевыми операторами $X_1, X_2, X_3, \varepsilon X_1, \varepsilon X_2, \varepsilon X_3$, то есть приближенная алгебра Ли является шестимерной.

Найдем реализацию алгебр Ли, приведенных в таблице 1, в пространстве дифференциальных операторов первого порядка от двух переменных

$$X_i = \xi^i(x, y, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^i(x, y, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial y} \tag{8}$$

таких, что $\xi^i(x, y, \varepsilon) \approx \xi^i_{(0)}(x, y) + \varepsilon\xi^i_{(1)}(x, y)$, $\eta^i(x, y, \varepsilon) \approx \eta^i_{(0)}(x, y) + \varepsilon\eta^i_{(1)}(x, y), i = 1, 2, 3$, и выделим среди них представителей классов неподобных приближенных алгебр Ли.

Процесс нахождения неподобных алгебр Ли рассмотрим на примере алгебры, относящейся к типу $L^3_{6,1}$ (см. таблицу 1). Существенные операторы такой алгебры удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X_2, X_3] \approx X_1, \qquad [X_3, X_1] \approx \varepsilon X_1 + \varepsilon X_2, \qquad [X_1, X_2] \approx 0.$$

Заменой переменных

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \varphi\left(x, y, \varepsilon\right) \approx \varphi_0\left(x, y\right) + \varepsilon\varphi_1\left(x, y\right), \\ \overline{y} &= \psi\left(x, y, \varepsilon\right) \approx \psi_0\left(x, y\right) + \varepsilon\psi_1\left(x, y\right), \end{aligned} \quad \frac{\partial\left(\varphi_0, \psi_0\right)}{\partial\left(x, y\right)} \neq 0 \tag{9}$$

	Коммутационные соотношения $[e_2, e_3]$	$[e_3, e_1]$	$[e_1, e_2]$
$L^0_{6,1}$	0	0	0
$dim\ L' = 1$			
$L^1_{6,1}$	εe_1	0	0
$L^1_{6,2}$	0	0	εe_1
$dim\ L' = 2$			
$L^2_{6,1}$	e_1	0	0
$L^2_{6,2}$	e_1	0	εe_1
$L^2_{6,3}$	0	0	e_1
$L^2_{6,4}$	εe_1	$\pm\varepsilon e_2$	0
$L^2_{6,5}$	$\varepsilon e_1 + \alpha\varepsilon e_2$	$\pm\varepsilon e_2$	0
$L^2_{6,6}$	εe_2	$\alpha\varepsilon e_1$	0
$L^2_{6,7}$	0	εe_2	εe_1
$L^2_{6,8}$	εe_2	0	εe_1
$dim\ L' = 3$			
$L^3_{6,1}$	e_1	$\varepsilon e_1 + \varepsilon e_2$	0
$L^3_{6,2}$	e_1	εe_2	0
$L^3_{6,3}$	e_1	εe_2	εe_1
$L^3_{6,4}$	$\varepsilon e_2 + \varepsilon e_3$	$-\varepsilon e_1$	εe_3
$L^3_{6,5}$	$\alpha\varepsilon e_1 + \varepsilon e_3$	$\varepsilon e_1 + \beta\varepsilon e_2$	εe_3
$L^3_{6,6}$	$\alpha\varepsilon e_1 + \varepsilon e_2$	εe_2	εe_3
$L^3_{6,7}$	$\alpha\varepsilon e_1 + \varepsilon e_3$	$\beta\varepsilon e_2$	εe_3
$L^3_{6,8}$	$\alpha\varepsilon e_2 + \varepsilon e_3$	εe_1	εe_2
$L^3_{6,9}$	εe_1	εe_3	$\alpha\varepsilon e_2$
$dim\ L' = 4$			
$L^4_{6,1}$	$\alpha e_2 + \beta\varepsilon e_2$	$-e_1$	0
$L^4_{6,2}$	αe_2	$-e_1$	0
$L^4_{6,3}$	e_2	$-e_1 + \varepsilon e_2$	0
$L^4_{6,4}$	$e_2 + \alpha\varepsilon e_1$	$-e_1 + \varepsilon e_2$	0
$L^4_{6,5}$	$e_2 + \alpha\varepsilon e_1$	$-e_1$	0
$L^4_{6,6}$	e_2	$-e_1 - \beta e_2$	0
$L^4_{6,7}$	$e_2 + \varepsilon e_1$	$-e_1 - \beta e_2$	0
$L^4_{6,8}$	e_1	$\alpha\varepsilon e_2$	$\alpha(\alpha-1)\varepsilon e_3,\ \alpha \neq 1$
$L^4_{6,9}$	e_1	εe_2	εe_3
$L^4_{6,10}$	e_1	εe_3	εe_2
$L^4_{6,11}$	e_1	εe_3	$\varepsilon e_2 + \alpha\varepsilon e_3$
$L^4_{6,12}$	e_1	εe_3	$\varepsilon e_1 + \varepsilon e_2$
$dim\ L' = 5$			
$L^5_{6,1}$	$-e_2 + \beta\varepsilon e_2$	$-e_1$	εe_3
$L^5_{6,2}$	$-e_2$	$-e_1$	εe_3
$dim\ L' = 6$			
$L^6_{6,1}$	e_1	e_2	e_3
$L^6_{6,2}$	$-e_1$	e_2	e_3

Таблица 1. Шестимерные неизоморфные приближенные алгебры Ли

один из операторов вида (8) приводится к оператору переноса

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

а два других удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[X_1, X_2] = \frac{\partial \xi^2_{(0)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \eta^2_{(0)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial \xi^2_{(1)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial \eta^2_{(1)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \approx 0,$$

$$[X_3, X_1] = -\frac{\partial \xi^3_{(0)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \eta^3_{(0)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon\frac{\partial \xi^3_{(1)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial \eta^3_{(1)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \approx \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\xi^2_{(0)}\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\eta^2_{(0)}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Собирая коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ и расщепляя их по малому параметру ε, как решение дифференциальных уравнений получаем условия на коэффициенты операторов X_2 и X_3:

$$\xi^2_{(0)} = \alpha_2(y), \quad \eta^2_{(0)} = \beta_2(y), \quad \xi^2_{(1)} = \gamma_2(y), \quad \eta^2_{(1)} = \chi_2(y),$$

$$\xi^3_{(0)} = \alpha_3(y), \quad \eta^3_{(0)} = \beta_3(y), \quad \xi^3_{(1)} = \gamma_3(y) - (1+\alpha_2(y))x, \quad \eta^3_{(1)} = \chi_3(y) - \beta_2(y)x,$$

где $\alpha_i(y), \beta_i(y), \gamma_i(y), \chi_i(y),\ i = 2, 3,$ — произвольные функции от y.

Используя последнее коммутационное соотношение $[X_2, X_3] \approx X_1$, получим систему на неизвестные произвольные функции $\alpha_i(y), \beta_i(y), \gamma_i(y), \chi_i(y), i = 2, 3,$

$$\begin{cases} \beta_2\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \beta_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 1, \\ \beta_2\frac{\partial \beta_3}{\partial y} - \beta_3\frac{\partial \beta_2}{\partial y} = 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_2^2 + \beta_2\frac{\partial \gamma_3}{\partial y} + \chi_2\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \beta_3\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \chi_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 0, \\ -\alpha_2\beta_2 + \beta_2\frac{\partial \chi_3}{\partial y} + \chi_2\frac{\partial \beta_3}{\partial y} - \beta_3\frac{\partial \chi_2}{\partial y} - \chi_3\frac{\partial \beta_2}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Чтобы найти общий вид операторов алгебры Ли $L^3_{6,1}$, необходимо решить систему (10). Рассмотрим следующие частные случаи.

а) Пусть $\beta_2 = 0, \beta_3 \neq 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 0$. Тогда система (10) примет вид

$$\begin{cases} -\beta_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 1, \\ -\alpha_2 - \alpha_2^2 - \beta_3\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

После решения полученной системы относительно неизвестных функций β_3, γ_2 операторы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 &= \left(\alpha_2 + \varepsilon\left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \frac{\alpha_2^3}{3}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= \alpha_3\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\partial_y\alpha_2}\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon(\gamma_3 - (1+\alpha_2)x)\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Среди найденного класса приближенных алгебр выделим одного представителя. Для этого сделаем в (11) замену переменных (9)

$$\bar{x} = x + \varphi_0(y) + \varepsilon\varphi_1(y), \quad \bar{y} = \psi_0(y) + \varepsilon\psi_1(y),$$

которая сохраняет оператор переноса X_1. Выбирая функции $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \psi_0(y)$, $\psi_1(y)$, получаем

$$\bar{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{X}_2 = \bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{X}_3 = -\varepsilon\bar{x}(1+\bar{y})\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - (1+\varepsilon(\bar{y}+\bar{y}^2))\frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

Остальные алгебры этого класса при помощи замены переменных (9) могут быть приведены к найденному представителю.

б) Пусть $\beta_2 \neq 0, \beta_3 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 0$. Тогда, действуя аналогично пункту а), получим операторы

$$\bar{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \qquad \bar{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \qquad \bar{X}_3 = (\bar{y} - \varepsilon\bar{x})\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \varepsilon\bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

Аналогичным образом можно найти все неподобные шестимерные алгебры Ли в пространстве двух переменных. Справедлива

Теорема 1. *Базис неподобных приближенных алгебр Ли в $\mathbb{R}^2$ подходящей заменой переменных (9) может быть приведен к одному из видов таблицы 2 (столбец 2).*

4. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром с тремя существенными приближенными симметриями

Для каждой из приведенных алгебр таблицы 2 (столбец 2) можно построить вид дифференциального уравнения второго порядка (2), допускающего эту приближенную алгебру.

Рассмотрим, например, случай приближенной алгебры $L^3_{6,1}$ типа (1), то есть дифференциальное уравнение

$$y'' \approx F_{(0)}\,(x,y,y') + \varepsilon F_{(1)}\,(x,y,y')$$

допускает операторы

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = -(1+\varepsilon x+\varepsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} - (\varepsilon xy + \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Действуя продолженными операторами на уравнение (2) и расщепляя по степеням ε, получим системы

$$\Omega_{(0)}: \begin{cases} x\dfrac{\partial F_{(0)}}{\partial y} + \dfrac{\partial F_{(0)}}{\partial y'} = 0, \\ \dfrac{\partial F_{(0)}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F_{(0)}}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad \Omega_{(1)}: \begin{cases} x\dfrac{\partial F_{(1)}}{\partial y} + \dfrac{\partial F_{(1)}}{\partial y'} = 0, \\ \dfrac{\partial F_{(1)}}{\partial y} = 0, \\ (x+x^2)\dfrac{\partial F_{(0)}}{\partial x} + \dfrac{\partial F_{(1)}}{\partial x} + F_{(0)} + 3xF_{(0)} = 0. \end{cases}$$

Решая систему $\Omega_{(0)}$, имеем

$$F_{(0)} = C_0,$$

где C_0 — константа.

Подставляя F_0 в систему $\Omega_{(1)}$ и ее, получим

$$F_{(1)} = C_1 - C_0 x(1 + \frac{3x}{2}),$$

где C_1 — константа.

Следовательно, дифференциальное уравнение, допускающее приближенную алгебру Ли $L^3_{6,1}$ с операторами указанного типа (1), имеет вид

$$y'' = C_0 + \varepsilon\left(C_1 - C_0 x(1 + \frac{3x}{2})\right).$$

Отметим, что найденное дифференциальное уравнение, как минимум, допускает приближенную алгебру $L^3_{6,1}(1)$.

Замечание. Известно, что в точных алгебрах существует два типа неподобных трехмерных алгебр Ли, которые не допускаются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Это абелева алгебра

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = \alpha(y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha''(y) \neq 0$$

и алгебра с операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \sin(x)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = \cos(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Поэтому в случае приближенных алгебр не удается построить инвариантные уравнения второго порядка для алгебр, операторы которых являются возмущениями указанных типов точных алгебр, однако есть инвариантные уравнения третьего порядка.

Все найденные инвариантные дифференциальные уравнения второго порядка приведены в таблице 2 (столбец 3). Прочерк в столбце 3 означает, что инвариантного уравнения второго порядка нет, но может быть найдено уравнение третьего порядка.

Таблица 2

Тип		Существенные операторы	Инвариантные уравнения
$L^0_{6,1}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \varepsilon\delta(x)\alpha'\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x)\frac{\partial}{\partial y},\ \alpha'' \neq 0, \delta(x) \neq 0$	–
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = (\alpha(x) + \varepsilon\delta(x))\frac{\partial}{\partial y},\ \alpha'' \neq 0$	–
$dim\ L' = 1$			
$L^1_{6,1}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \varepsilon(\delta(x)\alpha' - 1)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x)\frac{\partial}{\partial y}, \alpha'' \neq 0$	–
$L^1_{6,2}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + (x + \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \varepsilon(\delta(x)\alpha' - \alpha(x))\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x)\frac{\partial}{\partial y}, \alpha'' \neq 0$	–
$dim\ L' = 2$			
$L^2_{6,1}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 + \varepsilon C_1$
$L^2_{6,2}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (-x + \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x}$	$y'' = C_0 + \varepsilon\left(C_1 - C_0 y'\right)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (1 + \varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 + \varepsilon(C_1 - C_0 x)$
$L^2_{6,3}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x}$	$y'' = C_0 y' + \varepsilon C_1 y'$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 x^{-1} + \varepsilon C_1 x^{-1}$

Продолжение Таблицы 2

Тип		Существенные операторы	Инвариантные уравнения
$L^2_{6,4}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \alpha'' \neq 0$ $X_3 = -\varepsilon(1 \pm x^2 - \delta(x)\alpha')\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha(x) \mp \varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial y}$	–
$L^2_{6,5}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -\varepsilon(\pm x^2 + \alpha x + 1 - \delta(x)\beta')\frac{\partial}{\partial x} +$ $+(\beta(x) \mp \varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial y}, \beta'' \neq 0$	–
$L^2_{6,6}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \beta'' \neq 0$ $X_3 = \varepsilon(\delta(x)\beta' - x - \alpha x)\frac{\partial}{\partial x} + (\beta(x) - \varepsilon\alpha y)\frac{\partial}{\partial y},$	–
$L^2_{6,7}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + (x + \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -\varepsilon(x^2 - \delta(x)\alpha' + \alpha(x))\frac{\partial}{\partial x} +$ $+(\alpha(x) - \varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial y}, \alpha'' \neq 0$	–
$L^2_{6,8}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon\delta(x)\frac{\partial}{\partial x} + (x + \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -\varepsilon(x - \delta(x)\alpha' + \alpha(x))\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x)\frac{\partial}{\partial y},$ $\alpha'' \neq 0$	–
		$dim\ L' = 3$	
$L^3_{6,1}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -(1 + \varepsilon x + \varepsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon(xy + y)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 - C_0 x - \frac{3}{2}C_0 x^2\right)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$ $X_3 = -\varepsilon y\frac{\partial}{\partial x} + (x - \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 - C_0 y' + \frac{3}{2}C_0 y'^2\right)$
$L^3_{6,2}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -(1 + \varepsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xy\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 + \varepsilon\left(C_1 - \frac{3}{2}C_0 x^2\right)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = -\varepsilon y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 + \varepsilon\left(C_1 + \frac{3}{2}y'^2 C_0\right)$
$L^3_{6,3}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (-x + \varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = (1 + \varepsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon xy\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 - C_0 y' - C_0\frac{3x^2}{2}\right)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (1 + \varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon y\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -\varepsilon y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 - C_0 x + C_0\frac{3y'^2}{2}\right)$

Продолжение Таблицы 2

Тип		Существенные операторы	Инвариантные уравнения
$L^3_{6,4}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=\varepsilon\delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+(x+\varepsilon\alpha(x)y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon(\delta(x)\alpha'-\alpha^2(x)-\alpha(x))\dfrac{\partial}{\partial x}+$ $+(\alpha(x)+\varepsilon y)\dfrac{\partial}{\partial y},\alpha''\neq 0$	–
$L^3_{6,5}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=\varepsilon\delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+(x+\varepsilon\gamma(x)y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon(\gamma'\delta(x)-\alpha-x(1+\beta x)-\gamma(x)-$ $-\gamma^2(x))\dfrac{\partial}{\partial x}+(\gamma(x)-\varepsilon y(1+\beta x))\dfrac{\partial}{\partial y},\gamma''\neq 0,$	–
$L^3_{6,6}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=\varepsilon\delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+(x+\varepsilon\beta(x)y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon(\delta(x)\beta'-\alpha-x(1+x)-\beta^2(x))\dfrac{\partial}{\partial x}+$ $+(\beta(x)-\varepsilon xy)\dfrac{\partial}{\partial y},\beta''\neq 0$	–
$L^3_{6,7}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=\varepsilon\delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+(x+\varepsilon\gamma(x)y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon(\delta(x)\gamma'-\alpha-\gamma(x)(1+\gamma(x))-$ $-\beta x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}+(\gamma(x)-\varepsilon\beta xy)\dfrac{\partial}{\partial y},\gamma''\neq 0$	–
$L^3_{6,8}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=\varepsilon\delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+x(1+\varepsilon y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon(\delta(x)\gamma'-x(1+\alpha+\gamma(x))-$ $-\gamma(x))\dfrac{\partial}{\partial x}+(\gamma(x)-\varepsilon y)\dfrac{\partial}{\partial y},\gamma''\neq 0$	–
$L^3_{6,9}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=\varepsilon\delta(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+(x+\varepsilon\alpha xy)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon(\delta(x)\beta'-x\beta(x)-1-\alpha x\beta(x))\dfrac{\partial}{\partial x}+$ $+\beta(x)(1-\varepsilon y)\dfrac{\partial}{\partial y},\beta''\neq 0$	–
		$dim\ L'=4$	
$L^4_{6,1}$	1	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x(1-\alpha-\varepsilon\beta)\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\alpha=1,\quad y''=0,$ $\alpha\neq 1,\quad y''=C_0x^{\frac{1-2\alpha}{\alpha-1}}+$ $+\varepsilon x^{\frac{1-2\alpha}{\alpha-1}}\left(C_1+\dfrac{C_0\beta\ln(x)}{(\alpha-1)^2}\right)$
	2	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial x},\ X_2=\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y(\alpha+\varepsilon\beta)\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\alpha=1,\quad y''=0,$ $\alpha\neq 1,\quad y''=y'^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}(C_0+$ $+\varepsilon C_1+\varepsilon\dfrac{C_0\beta\ln(y')}{(1-\alpha)^2}\Big)$

Продолжение Таблицы 2

Тип	Существенные операторы		Инвариантные уравнения
	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \varepsilon x^{(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x} + x^{(1-\alpha)}(1-\varepsilon\beta\ln(x))\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \alpha \neq 1$	$y'' = \frac{C_0}{x} - \frac{\alpha y'}{x} + \frac{\varepsilon}{x(\alpha-1)}\left(\alpha C_0 - C_1 + y'(C_0 - 2\alpha C_0 + \beta(1-\alpha)) + \alpha(2\alpha-1)\frac{y'}{2}\right)$
$L^4_{6,2}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = (1-\alpha)x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$	$\alpha = 1, \quad y'' = 0$, $\alpha \neq 1, \quad y'' = x^{\frac{1-2\alpha}{\alpha-1}}(C_0 + \varepsilon C_1)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y}$	$\alpha = 1, \quad y'' = 0$, $\alpha \neq 1, \quad y'' = y'^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}(C_0 + \varepsilon C_1)$
	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon x^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + x^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \alpha \neq 1$	$y'' = \frac{C_0}{x} - \frac{\alpha y'}{x} + \varepsilon\left(\frac{C_1}{x} + \frac{2\alpha-1}{x(1-\alpha)}\left(C_0 y' - \alpha\frac{y'^2}{2}\right)\right)$
$L^4_{6,3}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = -\varepsilon x^2\frac{\partial}{\partial x} + y(1-\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (y - \varepsilon x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$
$L^4_{6,4}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = -\varepsilon(x^2+\alpha)\frac{\partial}{\partial x} + y(1-\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = (x + \varepsilon\alpha y)\frac{\partial}{\partial x} + (y - \varepsilon x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$
$L^4_{6,5}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = -\varepsilon\alpha\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (y + \varepsilon\alpha x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$
$L^4_{6,6}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = \beta x^2\frac{\partial}{\partial x} + y(1+\beta x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = x^{-3}e^{-\frac{1}{\beta x}}(C_0 + \varepsilon C_1)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (\beta x + y)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = e^{-\frac{1}{\beta}y'}(C_0 + \varepsilon C_1)$

Продолжение Таблицы 2

Тип		Существенные операторы	Инвариантные уравнения
	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon x^3 e^{\frac{1}{\beta x}}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \left(\beta x^2 + \varepsilon\beta x^3 y e^{\frac{1}{\beta x}}\right)\frac{\partial}{\partial x} +$ $+(1+\beta x)y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{C_0 e^{-\frac{1}{\beta x}}}{x^3} +$ $+\varepsilon y'^2 e^{\frac{1}{\beta x}}\left(\frac{2}{\beta} - 3x - \frac{1}{2x\beta^2}\right) +$ $+\varepsilon\left(C_0 y'\left(-\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2\beta}\right) + \frac{C_1 e^{-\frac{1}{\beta x}}}{x^3}\right)$
$L^4_{6,7}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = (\beta x^2 - \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + y(1+\beta x)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{e^{-\frac{1}{\beta x}}}{x^3}\Big(C_0 + \varepsilon C_1 +$ $+\varepsilon C_0\big(\frac{3}{2\beta x^2} - \frac{1}{3\beta^2 x^3}\big)\Big)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = (x+\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial x} + (\beta x + y)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 e^{-\frac{y'}{\beta}} +$ $+\varepsilon e^{-\frac{y'}{\beta}}\left(C_1 - \frac{C_0}{3\beta^2}y'^3 - \frac{3C_0}{2\beta}y'^2\right)$
	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \varepsilon x^3 e^{\frac{1}{\beta x}}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \left(\beta x^2 + \varepsilon(\beta x^3 y e^{\frac{1}{\beta x}} - 1)\right)\frac{\partial}{\partial x} +$ $+(1+\beta x)y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{C_0 e^{-\frac{1}{\beta x}}}{x^3} + \varepsilon e^{-\frac{1}{\beta x}}\Big(-\frac{C_0}{3\beta^2 x^6} +$ $+\frac{3C_0}{2\beta x^5} + \frac{C_1}{x^3}\Big) - \varepsilon C_0\frac{3y'}{x} -$ $-\varepsilon\frac{y' C_0}{x^2\beta} - \varepsilon y'^2 e^{\frac{1}{\beta x}}\left(3x - \frac{2}{\beta} + \frac{1}{2x\beta}\right)$
$L^4_{6,8}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_2 = \alpha(1-\alpha)\varepsilon y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \alpha \neq 1$ $X_3 = -(1+\varepsilon\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\alpha x y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 + \varepsilon C_1 -$ $-\varepsilon\frac{3}{2}\alpha C_0(x^2 + (1-\alpha)y'^2)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = (1+\varepsilon\alpha(\alpha-1)x^2)\frac{\partial}{\partial x} +$ $+\varepsilon\alpha(\alpha-1)xy\frac{\partial}{\partial y}, \alpha \neq 1$ $X_3 = -\varepsilon\alpha y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 + \varepsilon C_1 +$ $+\varepsilon\left(\frac{3}{2}\alpha C_0(y'^2 - (\alpha-1)x^2)\right)$
$L^4_{6,9}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (1+\varepsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon x y\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -\varepsilon y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 + \frac{3}{2}C_0(y'^2 - x^2)\right)$
$L^4_{6,10}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = -\varepsilon\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x} +$ $+x(1+\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y}, X_3 = -(1-\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial x}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 + 3C_0 x y' + \frac{3}{2}y'^2\right)$
	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (1+\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial x},$ $X_3 = \varepsilon\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x} + x(1-\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0 +$ $+\varepsilon\left(C_1 - 3C_0 x y' - \frac{3}{2}y'^2\right)$

Продолжение Таблицы 2

Тип		Существенные операторы	Инвариантные уравнения
$L^4_{6,11}$	1	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=\varepsilon\left(\alpha y+\frac{x^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}-x(1+\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=(1-\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial x}$	$y''=C_0+\varepsilon C_1+$ $+\varepsilon\left(3C_0xy'+\frac{3}{2}y'^2(1+\alpha C_0)\right)$
	2	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=(1+\varepsilon y+\varepsilon\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\varepsilon xy\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}+(x-\varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial y}$	$y''=C_0+\varepsilon C_1+$ $+\varepsilon\left(-3C_0xy'-\frac{3}{2}y'^2-\frac{3}{2}C_0\alpha x^2\right)$
$L^4_{6,12}$	1	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=(1+\varepsilon(x+y))\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon y\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=\varepsilon\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}+(x-\varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial y}$	$y''=C_0+\varepsilon C_1+$ $+\varepsilon\left(-C_0x-3C_0xy'-\frac{3}{2}y'^2\right)$
	2	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=\varepsilon\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}-(x-\varepsilon y+\varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=(1-\varepsilon y)\frac{\partial}{\partial x}$	$y''=C_0+\varepsilon C_1+$ $+\varepsilon\left(-C_0y'+3C_0xy'+\frac{3}{2}y'^2\right)$
		$dim\ L'=5$	
$L^5_{6,1}$	1	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=\varepsilon xy\frac{\partial}{\partial x}+\left(x^2+\varepsilon\frac{y^2}{2}-\right.$ $\left.-\varepsilon\beta x^2\ln(y)\right)\frac{\partial}{\partial y}, X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$y''=\frac{(y'+C_0)}{x}+$ $+\frac{\varepsilon}{x}\left(C_1-\frac{1}{2}y'^3-\frac{3}{4}y'^2C_0-\beta y'\right)$
	2	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=(1-\varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=(\varepsilon\beta x-x)\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$y''=C_0y'^{\frac{3}{2}}+$ $+\varepsilon\left(C_1y'^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}C_0x^2y'^{\frac{5}{2}}\right)$ $+\varepsilon\left(3xy'^2-\frac{1}{4}C_0\beta y'^{\frac{3}{2}}\ln(y')\right)$
$L^5_{6,2}$	1	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=\varepsilon xy\frac{\partial}{\partial x}+\left(x^2+\varepsilon\frac{y^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$y''=\frac{(C_0+y')}{x}+$ $+\frac{\varepsilon}{x}\left(C_1-\frac{1}{2}y'^3-\frac{3}{4}y'^2C_0\right)$
	2	$X_1=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=(1-\varepsilon xy)\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=-x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$y''=C_0y'^{\frac{3}{2}}+$ $+\varepsilon\left(C_1y'^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}C_0x^2y'^{\frac{1}{2}}+3xy'^2\right)$

Продолжение Таблицы 2

Тип		Существенные операторы	Инвариантные уравнения
$dim\ L' = 6$			
$L^6_{6,1}$	1	$X_1 = (1+x^2)\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = -xy\dfrac{\partial}{\partial x} - \left(1+y^2\right)\dfrac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0\left(\dfrac{1+y^2+y'^2(1+x^2)}{1+x^2+y^2} - \dfrac{2xyy'}{1+x^2+y^2}\right)^{3/2} + \varepsilon C_1\left(\dfrac{-2xyy'}{1+x^2+y^2} + \dfrac{1+y^2+y'^2(1+x^2)}{1+x^2+y^2}\right)^{3/2}$
$L^6_{6,2}$	1	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \sin(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\dfrac{\alpha(y)\cos(x+y)}{\cos^2(y)}\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = \cos(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\dfrac{\alpha(y)\sin(x+y)}{\cos^2(y)}\dfrac{\partial}{\partial y}$	–
	2	$X_1 = (1+x^2)\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = -xy\dfrac{\partial}{\partial x} + \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial}{\partial y}$	$y'' = C_0\left(\dfrac{y^2-1+y'^2(1+x^2)}{1+x^2-y^2} - \dfrac{2xyy'}{1+x^2-y^2}\right)^{3/2} + \varepsilon C_1\left(\dfrac{-2xyy'}{1+x^2-y^2} + \dfrac{y^2-1+y'^2(1+x^2)}{1+x^2-y^2}\right)^{3/2}$
	3	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = (\cos(y) - \varepsilon e^{-2x}\cos(y))\dfrac{\partial}{\partial y} + \sin(y)\dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = (-\sin(y) + \varepsilon e^{-2x}\sin(y))\dfrac{\partial}{\partial y} + \cos(y)\dfrac{\partial}{\partial x}$	$y'' = \dfrac{y'}{2} + y'^3\left(C_0 e^{2x} - \dfrac{1}{2}\right) + \varepsilon e^{-2x}\left(-\dfrac{3}{4y'} + 2y' - \dfrac{y'^3}{4}\right) + \varepsilon y'\left(C_1 e^{2x} y'^2 + y'^2 C_0 + 3C_0\right)$
	4	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = (\cos(y) + \varepsilon e^{-2x}\cos(y))\dfrac{\partial}{\partial y} + \sin(y)\dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = -(\sin(y) + \varepsilon e^{-2y}\sin(y))\dfrac{\partial}{\partial y} + \cos(y)\dfrac{\partial}{\partial x}$	$y'' = -\dfrac{y'}{2} + y'^3\left(-\dfrac{1}{2} + C_0 e^{2x}\right) + \varepsilon e^{-2x}\left(\dfrac{3}{4y'} - 2y' + \dfrac{y'^3}{4}\right) + \varepsilon y'\left(-y'^2 C_0 + y'^2 C_1 e^{2x} + 3C_0\right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов Н.Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике* // Успехи математических наук. Т. 47, вып. 4(286). 1992. С. 84–144.
2. Yu.Yu. Bagderina *Sollution of ordinary differential equation with a large Lie symmetry group* // Nonlinear Dynamics. V. 30. 2002. P. 287–294.

3. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные группы преобразований* // Дифференциальные уравнения. Т. 29. № 10. 1993. С. 1712–1732.
4. V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov *Approximate transformation groups and deformations of symmetry Lie algebras*n// CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3. CRC Press, Boca Raton, Florida. 1996. 536 p.
5. Р.К. Газизов, В.О. Лукащук *Классификация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром с тремя существенными симметриями* // Труды международной конференции MOGRAN-13 "Симметрии и точные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений"(18-22 июня 2009): Уфа. 2009. С. 13.
6. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* М.: Мир. 1964. 355 с.

Вероника Олеговна Лукащук,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: voluks@gmail.com