

# ОБ УБЫВАНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

В.Ф. ВИЛЬДАНОВА

**Аннотация.** Для линейного параболического уравнения второго порядка с двойным вырождением  $\mu(x)u_t = (\rho(x)a_{ij}(t, x)u_{x_i})_{x_j}$  в неограниченной области получена оценка сверху скорости убывания решения первой начально-краевой задачи. В широком классе областей вращения доказана оценка снизу. Приведены примеры, показывающие, что оценки сверху и снизу, в определенном смысле, точны.

Доказывается существование и единственность решения задачи в неограниченной области методом галеркинских приближений.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение с двойным вырождением, скорость убывания решения, оценки сверху, существование решения.

**Mathematics Subject Classification:** 35B30, 35B45, 35K10, 35K20, 35K65

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega$  — неограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Рассмотрим в цилиндрической области  $D = \{t > 0\} \times \Omega$  линейное уравнение второго порядка:

$$\mu(x)u_t = \sum_{i,j=1}^n (\rho(x)a_{ij}(t, x)u_{x_i})_{x_j}, \quad (1)$$

где веса  $\mu(x) > 0$  и  $\rho(x) > 0$  — измеримые функции, суммируемые на любом ограниченном подмножестве  $\Omega$ :  $\mu, \rho \in L^1_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$ . На симметричные коэффициенты  $a_{ij} = a_{ji}$  накладывается условие равномерной эллиптичности: существуют положительные постоянные  $\gamma, \gamma_1$  такие, что для любого вектора  $y \in \mathbb{R}^n$  и почти всех  $(t, x) \in D$  справедливы неравенства:

$$\gamma|y|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)y_i y_j \leq \gamma_1|y|^2. \quad (2)$$

На боковой границе цилиндра  $D$  задано краевое условие Дирихле:

$$u(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = (0, \infty) \times \partial\Omega. \quad (3)$$

Мы будем иметь дело с обобщенным решением задачи (1), (3) с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x) \in L_2(\Omega, \mu dx). \quad (4)$$

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости скорости убывания при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи (1), (3), (4) от геометрии неограниченной области  $\Omega$  и поведения весов  $\mu, \rho$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Первые исследования зависимости скорости убывания решения смешанной задачи для равномерно параболического уравнения ( $\mu = \rho \equiv 1$ ) второго порядка от геометрии неограниченной

---

V.F. VIL'DANOVA, ON DECAY OF SOLUTION TO LINEAR PARABOLIC EQUATION WITH DOUBLE DEGENERACY.  
© Вильданова В.Ф. 2016.

Работа выполнена при поддержке гранта ученого совета БГПУ им. М.Акумулы для молодых учёных.  
Поступила 25 октября 2015 г.

области были выполнены А.К. Гуциным в работах [1, 2]. Для широкого класса областей в них для решения второй смешанной задачи установлена оценка

$$|u(t, x)| \leq \frac{\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}}{v(\sqrt{t})}, \quad x \in \Omega,$$

где  $v(r) = \text{mes}\{x \in \Omega : |x| < r\}$ . Доказана также точность этой оценки. В частности, для решения задачи Коши эта оценка принимает вид

$$|u(t, x)| \leq C \frac{\|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{(\sqrt{t})^n}.$$

Более полные исследования зависимости поведения при большом значении времени решения второй смешанной задачи от геометрии области и от начальной функции выполнены А.В. Лежневым в [3]. В.И. Ушаков [4] получил результаты, близкие к результатам А.К. Гуцина, для третьей смешанной задачи в нецилиндрической области. Ранее в работе [5] Ф.Х. Мукминовым была доказана оценка скорости убывания решения первой смешанной задачи в случае равномерно параболического уравнения второго порядка и доказана ее точность в классе неограниченных монотонно расширяющихся областей вращения. В работе [6] получены точные оценки решения параболического уравнения четвертого и шестого порядка с краевыми условиями Риккье на боковой границе неограниченной цилиндрической области.

Упомянем ещё работу [7], в которой для квазилинейных параболических уравнений в неограниченной области изучалась зависимость поведения решения от структуры нелинейности уравнений.

Более полный обзор результатов, примыкающих к теме нашей работы, можно найти в [6]–[14].

Приступим к формулировке нашего результата.

Определим функции

$$\lambda(r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\Omega)} F_r(g), \quad F_r(g) = \frac{\int_{\Omega[r]} \rho(x) |\nabla g|^2 dx}{\int_{\Omega[r]} \mu g^2 dx}, \quad (5)$$

где  $\Omega[r] = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$ ;

$$\tilde{\lambda}(r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{S_r} \rho(x) |\nabla g|^2 dS}{\int_{S_r} \rho g^2 dS}, \quad (6)$$

где  $S_r = \{x \in \Omega \mid |x| = r\}$ . Очевидно, что функция  $\lambda(r)$  ограничена на интервале  $r > r_0$ , если множество  $\Omega[r_0]$  не пусто.

В следующем утверждении речь идет об обобщенном решении задачи (см. §2).

**Теорема 1.** Пусть  $u(t, x)$  – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией  $\varphi$ , равной нулю при  $|x| > R_0$ . Тогда найдется число  $\nu_1 > 0$ , зависящее только от  $n, \gamma_1, R_0$ , и  $T$ , зависящее еще и от функций  $\lambda, \tilde{\lambda}$ , такие, что для всех  $t > T$  справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \mu(x) u^2(t, x) dx \leq C \exp \left( -\nu_1 \int_{R_0+1}^{r(t)} \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds \right) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx, \quad (7)$$

где  $r = r(t)$  – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству  $t\lambda(r) \geq \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds$ . Постоянная  $C$  зависит от  $\gamma, \gamma_1$  и от функции  $\tilde{\lambda}$ .

Известно, что в случае плоского угла  $\Omega = \{(r, \psi) \mid r > 0, 0 < \psi < \alpha\}$  при  $\mu = \rho \equiv 1$  убывание решения задачи (1), (3), (4) будет степенным:  $u(t, x) = O(t^{-(\pi/\alpha+1)})$  (см. [5]). Для таких ситуаций (то есть когда решение убывает степенным образом) оценка (7) дает неадекватный результат,

поскольку точное значение постоянной  $\nu_1$  не определено (т.е. не определяется точно показатель степени  $t$ ).

Если выполнено неравенство  $\rho(x) \leq \mu(x)$  для почти всех  $x \in \Omega$ , то можно получить оценку, несколько слабее, чем (7), не используя функцию  $\tilde{\lambda}$  (см. теорему 2, §3).

Отметим, что утверждение теоремы останется верным, если области  $\Omega[r], S_r$  заменить на  $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$  и  $S_r = \{(x_1, x') \in \Omega \mid x_1 = r\}$ . При этом предполагается, что области  $\Omega(r)$  ограничены при всех  $r > 0$ .

Формально функция  $r(t) = R_0 + 1$  удовлетворяет неравенству из теоремы. Но ясно, что неравенство (7) будет более сильным, если выбрать функцию  $r(t) \geq R_0 + 1$  наибольшей среди допустимых. В случае, когда функция  $\lambda(r)$  непрерывна и положительна хотя бы в одной точке  $r \geq$

$R_0 + 1$ , выбираем функцию  $r(t)$ , как наибольший среди корней уравнения  $t\lambda(r) = \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds$ .

(При достаточно больших  $t$  существует хотя бы один корень.) В конце §3 приведено условие, при котором функция  $\lambda(r)$  будет непрерывной. Такой же подход применим при наличии оценки  $\lambda(r) \geq h(r)$  с заменой  $\lambda(r)$  на непрерывную функцию  $h(r)$ . В простейшем случае  $\rho = \mu = 1$  выбор функции  $h(r)$  можно сделать, используя неравенство (5.4) ([21], гл. II, §5), которое в случае  $\text{mes } \Omega[r] \leq (1 - \varepsilon) \text{mes } B(r)$ , где  $\text{mes } B(r)$  — шар радиуса  $r$  запишется в виде

$$\int_{\Omega[r]} u^2(t, x) dx \leq \beta \varepsilon^{-2} r^2 \int_{\Omega[r]} |\nabla u|^2(t, x) dx, \quad \beta > 0. \quad (8)$$

Отсюда следует неравенство  $\lambda(r) \geq \frac{\varepsilon^2}{\beta r^2}$ . Отметим еще, что неравенство (8), примененное вместо  $\Omega[r]$  к конусу с вершиной в точке  $O$  и сферическим основанием  $S_r$ , дает оценку  $\tilde{\lambda}(r) \geq \delta^2(r)/(\beta r^2)$ , где  $1 - \delta(r) = \text{mes}_{n-1} S_r r^{1-n} / \omega_n$ ,  $\omega_n$  — мера единичной сферы. В частности, когда функция  $\delta(r)$  достаточно быстро убывает, возможно неравенство  $\int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds < \infty$ , и тогда оценка (7) становится несодержательной.

В §4 также приведены примеры выбора функций  $r(t)$  для функций  $\mu, \rho$ , отличных от 1. В §5 приведена теорема 2 об оценке неотрицательного решения снизу в случае, когда область  $\Omega$  является областью вращения. На примерах показано, что неравенство (7) теоремы 1 является, в определенном смысле, точным.

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Введем следующие обозначения:  $D_a^b = (a, b) \times \Omega$ ,  $D^T = D_0^T$ ,  $D = D_0^\infty$ ,

$$\|u\|_{D^T, \mu}^2 = \int_{D^T} \mu u^2 dx dt, \quad \|\nabla u\|_{D^T, \rho}^2 = \int_{D^T} \rho |\nabla u|^2 dx dt.$$

На множестве сужений на  $D^T$  функций из  $C_0^\infty(D_{-1}^T)$  определим нормы

$$\|u\|_{\dot{H}^{0,1}(D^T)}^2 = \|u\|_{D^T, \mu}^2 + \|\nabla u\|_{D^T, \rho}^2; \quad \|u\|_{\dot{H}^{1,1}(D^T)}^2 = \|u\|_{\dot{H}^{0,1}(D^T)}^2 + \|u_t\|_{D^T, \mu}^2.$$

Соответствующие пополнения этих линейных нормированных пространств обозначим  $\dot{H}^{0,1}(D^T)$  и  $\dot{H}^{1,1}(D^T)$ . Для единственности градиента функций из введенных весовых пространств потребуем выполнения условия из работы [20]:

$$\rho^{-1} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega).$$

Пространство  $\dot{H}^1(\Omega)$  определим как пополнение пространства  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)}^2 = \int (\mu u^2 + \rho |\nabla u|^2) dx$ .

Обобщенным решением задачи (1), (3), (4) в  $D^T$  будем называть функцию  $u(t, x) \in \dot{H}^{0,1}(D^T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int_{D^T} \left( -\mu w v_t + \sum_{i,j=1}^n \rho a_{ij}(t,x) u_{x_i} v_{x_j} \right) dx dt = \int_{\Omega} \mu \varphi(x) v(0,x) dx, \quad (9)$$

для любой функции  $v(t,x) \in \dot{H}^{1,1}(D^T)$ .

Функция  $u(t,x)$  – решение задачи (1), (3), (4) в  $D$ , если при всех  $T > 0$  она является решением задачи (1), (3), (4) в  $D^T$ .

Обобщенное решение задачи (1), (3), (4) в  $D^T$  существует и единственно. Существование доказывается методом Галеркина (см., например, [21, с.181–186]).

Выберем набор линейно независимых функций  $w_i(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  так, чтобы их линейная оболочка была плотна в  $\dot{H}^1(\Omega)$ . Не ограничивая общность, можно считать, что эти функции ортонормированы в  $L_2(\Omega, \mu dx)$ .

Галеркинские приближения будем искать в виде

$$u^l(t,x) = \sum_{i=1}^n C_i^l(t) w_i(x). \quad (10)$$

Уравнения на искомые коэффициенты получим из требования

$$\int_{\Omega} (\mu(x) u_t^l w_s + \sum_{i,j=1}^n \rho(x) a_{ij}(t,x) u_{x_i}^l (w_s)_{x_j}) dx = 0, \quad s = \overline{1, l}. \quad (11)$$

Условия (11), благодаря ортонормированности функций  $w_i$ , приводят к системе обыкновенных уравнений

$$(C_i^l)' + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) C_j^l = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (12) выберем следующими

$$C_i^l(0) = (\varphi, w_i). \quad (13)$$

Условия (12), (13) определяют единственный набор функций  $C_i^l(t)$ .

Докажем ограниченность множества  $u^l$  галеркинских приближений в пространстве  $\dot{H}^{0,1}(D^T)$ . Умножим равенство (11) на  $C_s^l$  и сложим. Получим

$$\int_{\Omega} (\mu u_t^l u^l + \sum_{i,j=1}^n \rho a_{ij}(t,x) u_{x_i}^l u_{x_j}^l) dx dt = 0. \quad (14)$$

Проинтегрировав (14) по  $t \in (0, T)$  и воспользовавшись условием (2), будем иметь

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu(x) \left[ (u^l(t,x))^2 - (u^l(0,x))^2 \right] dx + \gamma \int_{D^T} \rho(x) |\nabla u^l|^2 dx dt \leq 0. \quad (15)$$

Очевидно, что

$$\|u^l(0,x)\|_{L_2(\Omega, \mu dx)}^2 = \sum_{i=1}^l (\varphi, w_i)^2.$$

Тогда (15) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \mu(x) u^l(t,x)^2 dx + 2\gamma \int_{D^T} \rho(x) |\nabla u^l|^2 dx dt \leq \|\varphi\|_{D^T, \mu}^2. \quad (16)$$

Отсюда следует ограниченность множества  $u^l$  в пространстве  $\dot{H}^{0,1}(D^T)$ . Поэтому можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в этом пространстве к некоторой функции  $u \in \dot{H}^{0,1}(D^T)$ . Чтобы не нагромождать индексы, будем считать, что сама последовательность слабо сходится.

Умножим (11) на функцию  $d_s(t) \in C_0^\infty(-1, T)$  и проинтегрируем по  $t \in (0, T)$ . После обозначения  $v = d_s w_s$ , интегрирования по частям и предельного перехода при  $l \rightarrow \infty$  получим

$$\int_{D^T} \left( -\mu u(v)_t + \sum_{i,j=1}^n \rho a_{ij}(t, x) u_{x_i}(v)_{x_j} dx dt \right) = \int_{\Omega} \mu \varphi(x) v(0, x) dx. \quad (17)$$

Отметим, что (17) справедливо не только для функций  $v = d_s w_s$ , но и для сумм таких функций. Остается еще добавить, что функциями вида  $v^m = \sum_{s=1}^m d_s w_s$  можно приблизить любую функцию  $w$  из  $C_0^\infty(D_{-1}^T)$  по норме пространства  $\dot{H}^{1,1}(D^T)$ .

Теперь покажем единственность решения задачи (1), (3), (4).

Через  $v_h(t, x)$  будем обозначать осреднение Стеклова функции  $v(t, x)$ :

$$v_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau, x) d\tau,$$

которое обладает следующими свойствами:

- 1)  $(v, u_{-h}) = (v_h, u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mu dx dt)}$ , где  $(v, u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mu dx dt)} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mu v u dx dt$ ,
- 2) если  $v \in \dot{H}^{0,1}(D_0^T)$ , то  $(v_h)_{x_i} = (v_{x_i})_h$ ,
- 3) если  $v, v_t \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mu dx dt)$ , то  $(v_t)_h = (v_h)_t$ ,
- 4) если  $v \in L_2(D^T, \mu dx dt)$ , то для любого  $\delta > 0$  имеет место сходимость  $v_h \rightarrow v$  в  $L_2(D^{T-\delta}, \mu dx dt)$  при  $h \rightarrow 0$  ( $h < \delta$ ).

Подставим в интегральное тождество (9) пробную функцию  $v_{-h}$ , где  $v$  – из пространства  $C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$ . Это допустимо, так как  $v_{-h} \in C_0^\infty(D_0^T)$  при  $0 < h < \delta$ . Воспользовавшись свойствами осреднения Стеклова, будем иметь

$$\int_{D^T} \left[ \mu (u_h)_t v + \rho \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} \right] dx dt = 0. \quad (18)$$

Предельным переходом доказывается, что последнее соотношение справедливо не только для функций  $v \in C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$ , но и для функций  $v \in \dot{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$ .

Заметим, что равенства (18) имеют вид

$$\int_{D^T} \mu (u_h)_t v dx dt = l_h(v), \quad (19)$$

где  $l_h(v)$  линейный функционал в пространстве  $\dot{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$ .

Докажем равномерную ограниченность линейного функционала  $l_h(v)$  при  $|h| < \delta_0$  в единичном шаре пространства  $\dot{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$ .

Рассмотрим  $l_h(v)$ , с учетом равномерной эллиптичности будем иметь:

$$\begin{aligned} |l_h(v)| &= \left| \int_{D^{T-\delta}} \rho \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} dx dt \right| \leq \\ &\leq \int_{D^{T-\delta}} \left( \frac{\gamma_1}{h} \int_t^{t+h} \rho |\nabla u(\tau, x)| d\tau \right) |\nabla v(t, x)| dx dt \leq \\ &\leq \int_{D^{T-\delta}} \gamma_1 \rho \left( \frac{1}{h^2} \left( \int_t^{t+h} |\nabla u(\tau, x)| d\tau \right)^2 + |\nabla v(t, x)|^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что  $|l_h(v)| \leq C$ .

Итак, ограниченность линейного функционала  $l_h(v)$  доказана.

Подставим в равенство (19)<sub>h<sub>1</sub></sub>–(19)<sub>h<sub>2</sub></sub> функцию  $v = (u_{h_1} - u_{h_2})\chi(t_1, t_2) \in \mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$ , где  $\chi(t_1, t_2)$  характеристическая функция интервала  $(t_1, t_2)$ . Получим

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mu((u_{h_1})_t - (u_{h_2})_t)(u_{h_1} - u_{h_2}) dx dt \right| = \\ = |(l_{h_1} - l_{h_2})(\chi(u_{h_1} - u_{h_2}))| \leq C \|(u_{h_1} - u_{h_2})\|_{H^{0,1}} \leq \varepsilon.$$

Последнее неравенство вытекает при достаточно малых  $h_1, h_2$  из сходимости  $u_h \rightarrow u$  в пространстве  $\mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$ . После интегрирования по  $t$  будем иметь

$$\int_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1, x) dx \leq \int_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_2, x) dx + 2\varepsilon.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по  $t_2 \in [t_1, T - \delta]$ :

$$(T - \delta - t_1) \int_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1, x) dx \leq \mu \|(u_{h_1} - u_{h_2})\|_{L_2(D^{T-\delta}, \mu dx)}^2 + 2\varepsilon(T - \delta - t_1).$$

Поскольку  $u_h \rightarrow u$  в  $L_2(D^{T-\delta}, \mu dx)$ , то при  $t_1 < T - 2\delta$  будем иметь неравенство

$$\int_{\Omega} \mu(u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1, x) dx \leq \frac{\varepsilon_1}{\delta} + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная фундаментальность в  $L_2(\Omega, \mu dx)$  по  $t_1$  семейства функций  $u_h(t_1, x)$ . Поэтому  $u_h(t, x) \rightrightarrows u(t, x)$  в  $L_2(\Omega, \mu dx)$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [0, T - 2\delta]$ , и предельная функция непрерывна по  $t$  в норме  $L_2(\Omega, \mu dx)$ . Подставим теперь в (18) функцию  $v = u_h \chi(0, t)$ :

$$\int_{D_0^t} (\mu(u_h)_t u_h + \rho \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h (u_h)_{x_j}) dx dt = 0.$$

После интегрирования первого слагаемого по  $t$  и предельного перехода  $h \rightarrow 0$  будем иметь

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu u^2(t, x) dx + \int_{D_0^t} \rho \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu u^2(0, x) dx. \quad (20)$$

Если доказать, что  $u(0, x) = \varphi(x)$ , то последнее соотношение совпадет с (9). С этой целью подставим в тождество (9) непрерывную пробную функцию  $v(t, x) = \eta(\frac{t}{\varepsilon})\psi(x)$ , где  $\eta(t) = 1 - t$  при  $t \in [0, 1]$  и  $\eta(t)$  постоянна в оставшихся интервалах  $(-\infty, 0]$ ,  $[1, \infty)$ . Поскольку  $v_t = -\frac{1}{\varepsilon}\psi(x)$ , то тождество (9) принимает вид

$$\int_0^{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \mu(x) \psi(x) u(t, x) dt dx + l^{\varepsilon}(\psi) = \int_{\Omega} \mu(x) \varphi(x) \psi(x) dx,$$

где линейный функционал  $l^{\varepsilon}(\psi)$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . После предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будем иметь

$$\int_{\Omega} \mu(x) \psi(x) u(0, x) dx = \int_{\Omega} \mu(x) \varphi(x) \psi(x) dx$$

при любом  $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ . Это доказывает выполнение начального условия  $u(0, x) = \varphi(x)$ .

## 3. ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ СВЕРХУ

Сначала установим две оценки, характеризующие убывание решения задачи (1), (3), (4) при  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Предложение 1.** Пусть  $u(t, x)$  – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией  $\varphi$ , равной нулю вне шара радиуса  $R_0$ . Пусть выполнено неравенство

$$\rho(x) \leq C\mu(x), \quad C > 0, \quad x \in \Omega. \quad (21)$$

Тогда для всех  $t > 0$ ,  $r \geq R_0$  справедливо неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \Omega[r]} \mu u^2(t, x) dx \leq e \exp\left(-\tilde{C}t^{-1}(r - R_0)^2\right) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx, \quad (22)$$

где  $\tilde{C}$  – постоянная зависящая от  $\gamma$  и  $\gamma_1$ .

**Доказательство.**

Пусть  $\xi(\tau, r, \varrho)$  – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при  $\tau \leq r$  и единице при  $\tau \geq r + \varrho$ . В оставшемся интервале она линейна  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{\varrho}$ . Подставив в тождество (18) пробную функцию  $v = \eta(x; r, \varrho) u_h$ ,  $\eta(x) = \xi^2(|x|, r, \varrho)$ , получим

$$\int_{D^T} \left[ \frac{1}{2} \mu (u_h^2 \eta)_t + \sum_{i,j=1}^n \rho (a_{ij} u_{x_i})_h (\eta u_h)_{x_j} \right] dx dt = 0. \quad (23)$$

После предельного перехода в равенстве (23) при  $h \rightarrow 0$  имеем:

$$\int_{\Omega} \mu (u^2(T, x) - \varphi^2(x)) \eta dx + 2 \int_{D^T} \sum_{i,j=1}^n \rho a_{ij} u_{x_i} (\eta u)_{x_j} dx dt = 0.$$

Отсюда, в силу условия  $\text{supp } \varphi \subset \Omega[R_0]$ , для любых  $r \geq R_0$  и  $\varrho > 0$  нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu \eta u^2(T, x) dx + 2 \int_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^n \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx dt \leq \\ & \leq -2 \int_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx dt \leq 2 \int_{D^T} \rho \gamma_1 |u \nabla u \nabla \eta| dx dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int_{\Omega} \mu \eta u^2(T, x) dx + \int_{D^T} \gamma \rho \eta |\nabla u|^2 dx dt \leq 2 \int_{D^T} \rho \gamma_1 |u \nabla u \nabla \eta| dx dt.$$

Используя вид функции  $\eta$ , нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \Omega[r+\varrho]} \mu u^2(t, x) dx + \int_0^t \int_{\Omega \setminus \Omega[r+\varrho]} \rho \gamma |\nabla u|^2 dx dt \leq \frac{C}{\varrho^2} \int_0^t \int_{\Omega[r+\varrho] \setminus \Omega[r]} \rho u^2 dx dt.$$

Вводя обозначение

$$H_r(t) = \int_{\Omega \setminus \Omega[r]} \mu u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega \setminus \Omega[r]} \rho \gamma |\nabla u|^2 dx dt,$$

пользуясь условием (21), устанавливаем, что

$$H_{r+\varrho}(t) \leq \frac{C}{\varrho^2} \int_0^t H_r(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Неравенство (25) будем применять индуктивно для последовательности  $r_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ,  $r_{i+1} = r_i + \varrho$ ,  $r_0 = R_0$ . Учитывая, что из (20) следует неравенство  $H_r(t) \leq A = \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx$ ,  $r > 0$ ,  $t > 0$  будем иметь

$$H_{R_0+\varrho}(t) = \frac{ACt}{\varrho^2}. \quad (26)$$

Далее индукцией по  $k$  установим неравенство

$$H_{r_k}(t) \leq \frac{AC^k t^k}{\varrho^{2k} k!}. \quad (27)$$

Действительно,

$$H_{r_k+\varrho}(t) \leq \frac{C}{\varrho^2} \int_0^t H_{r_k}(\tau) d\tau \leq \frac{C}{\varrho^2} \int_0^t \frac{AC^k \tau^k}{\varrho^{2k} k!} d\tau = \frac{AC^{k+1} t^{k+1}}{\varrho^{2(k+1)} (k+1)!},$$

что завершает индукцию. Пользуясь неравенством Стирлинга, из (27) нетрудно получить

$$H_{r_k}(t) \leq \frac{AC^k e^{k t^k}}{\sqrt{2\pi k} \varrho^{2k} k^k} \leq A \exp\left(-k \ln \frac{\varrho^2 k}{Cet}\right). \quad (28)$$

Выберем  $k$  равным целой части числа  $\frac{(r-R_0)^2}{Ce^2 t}$ . Если  $k = 0$ , то  $\frac{(r-R_0)^2}{Ce^2 t} < 1$  и  $H_r(t) \leq A = eAe^{-1}$ , откуда следует неравенство (22). Если  $k \geq 1$ , то  $k \geq \frac{(r-R_0)^2}{2Ce^2 t}$ . Теперь выбираем  $\varrho = (r-R_0)/k$ . Тогда  $r_k = r$  и  $\varrho^2 k = \frac{(r-R_0)^2}{k} \geq Ce^2 t$ . Следовательно,  $\frac{\varrho^2 k}{Cet} \geq 1$ . Поэтому из (28) следует, что  $H_r(t) = H_{r_k}(t) \leq Ae^{-k}$ . Тем самым, неравенство (22) установлено.

**Предложение 2.** Пусть  $u(t, x)$  – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией  $\varphi$ , равной нулю вне шара радиуса  $R_0$ . Тогда для всех  $t > 0$ ,  $r \geq R_0 + 1$  справедливо неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \Omega[r]} \mu u^2(t, x) dx \leq C \exp\left(-2\nu \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds\right) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx, \quad (29)$$

где  $C$ ,  $\nu$  – постоянные зависящие от  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , а  $C$  – еще и от функции  $\tilde{\lambda}$ .

**Доказательство.**

Пусть  $\xi(\tau, r)$  – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при  $\tau \leq R_0$ , линейная при  $R_0 < \tau < R_0 + 1$  и равная единице при  $\tau \geq r$ . В оставшемся интервале она удовлетворяет условию  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \nu \sqrt{\tilde{\lambda}} \xi$ , число  $\nu$  выберем ниже.

Легко видеть, что  $\xi_\tau = \xi(R_0 + 1, r)$  при  $\tau \in (R_0, R_0 + 1)$ , где

$$\xi(R_0 + 1, r) = \exp\left(-\nu \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds\right).$$

Подставив в тождество (18) пробную функцию  $v = \eta(x; r) u_h$ ,  $\eta(x; r) = \xi^2(|x|, r)$ , получим

$$\int_{D^T} \left[ \frac{1}{2} \mu (u_h^2 \eta)_t + \sum_{i,j=1}^n \rho(a_{ij} u_{x_i})_h (\eta u_h)_{x_j} \right] dx dt = 0. \quad (30)$$

После предельного перехода в равенстве (30) при  $h \rightarrow 0$  имеем:

$$\int_{\Omega} \mu(u^2(T, x) - \varphi^2(x)) \eta dx + 2 \int_{D^T} \sum_{i,j=1}^n \rho a_{ij} u_{x_i} (\eta u)_{x_j} dx dt = 0.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \eta u^2(T, x) dx + 2 \int_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^n \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx dt &\leq \\ &\leq 2 \int_{D^T} \rho \gamma_1 |u \nabla u \nabla \eta| dx dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int_{\Omega} \xi^2 \mu u^2 dx + \int_{D^T} \gamma \rho \xi^2 |\nabla u|^2 dx dt \leq \int_{D^T} \rho \gamma_1 \left( \varepsilon \xi^2 |\nabla u|^2 + \frac{u^2 \xi^2}{\varepsilon} \right) dt.$$

Взяв  $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$ , получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi^2 \mu u^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{D^T} \rho \xi^2 |\nabla u|^2 dx dt &\leq \\ &\leq \frac{2\gamma_1^2}{\gamma} \left( \int_0^T \int_{\Omega[r] \setminus \Omega[R_0+1]} \nu^2 \rho u^2 \xi^2 \tilde{\lambda} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega[R_0+1] \setminus \Omega[R_0]} \rho u^2 \xi^2 (R_0 + 1) dx dt \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Используя вид функции  $\xi$ , преобразуем последние слагаемые

$$\begin{aligned} \int_{\Omega[r] \setminus \Omega[R_0+1]} \nu^2 \rho u^2 \xi^2 \tilde{\lambda} dx &= \int_{R_0+1}^r \nu^2 \xi^2(\tau) \tilde{\lambda}(\tau) d\tau \int_{S_\tau} \rho u^2 dS \leq \\ &\leq \int_{R_0+1}^r \nu^2 \xi^2(\tau) d\tau \int_{S_\tau} \rho |\nabla u|^2 dS = \nu^2 \int_{\Omega[r] \setminus \Omega[R_0+1]} \rho \xi^2 |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично,

$$\int_{\Omega[R_0+1] \setminus \Omega[R_0]} \rho u^2 dx \leq \frac{1}{\inf_{[R_0, R_0+1]} \tilde{\lambda}(\tau)} \int_{\Omega[R_0+1] \setminus \Omega[R_0]} \rho |\nabla u|^2 dx. \quad (34)$$

Возьмем  $\nu = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$ . Подставляя (33) и (34) в (32) и оценивая правую часть (34) с помощью (20), устанавливаем неравенство (29),  $C = 2\gamma_1^2 / (\gamma \inf_{[R_0, R_0+1]} \tilde{\lambda}(\tau))$ .

**Теорема 2.** Пусть  $u(t, x)$  – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией  $\varphi$ , равной нулю при  $|x| > R_0$ , и выполнено неравенство (21). Тогда найдется число  $\nu_2 > 0$ , зависящее только от  $n, \gamma_1, R_0$  такое, что для всех  $t > 0$  справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \mu(x) u^2(t, x) dx \leq C \exp(-\nu_2 t \lambda(r(t))) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx, \quad (35)$$

где  $r = r(t)$  произвольная функция, удовлетворяющая неравенству  $t\lambda(r) \leq t^{-1}(r - R_0)^2$ . Постоянная  $C$  зависит от  $\gamma, \gamma_1$  и  $n$ .

**Доказательство теорем 1,2.**

Пусть  $T > 0$  – произвольное число. Введем обозначение

$$\varepsilon = \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega \setminus \Omega[r]} \mu u^2(t, x) dx.$$

Справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \mu u^2(t, x) dx \leq \varepsilon + \int_{\Omega[r]} \mu u^2(t, x) dx. \quad (36)$$

Так как функция  $u(t, x)$  для почти всех  $t \in (0, T)$  является элементом пространства  $\dot{H}^1(\Omega)$ , то из (5) получаем

$$\int_{\Omega} \mu u^2(t, x) dx \leq \varepsilon + \lambda^{-1}(r) \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx. \quad (37)$$

Для функции  $E(t) = \int_{\Omega} \mu u^2(t, x) dx$  с помощью соотношения, вытекающего из (20)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu u^2(t, x) dx \leq -\gamma \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx,$$

выводим неравенство

$$\gamma(E(t) - \varepsilon)\lambda(r) \leq -\frac{d}{dt} E(t).$$

Решая его, находим

$$E(T) - \varepsilon \leq e^{-T\lambda(r)\gamma} E(0). \quad (38)$$

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся оценкой (22):

$$\varepsilon \leq e \exp\left(-\tilde{C}T^{-1}(r - R_0)^2\right) \int_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x) dx.$$

Тогда

$$E(T) \leq E(0) \left( e \exp\left(-\tilde{C}T^{-1}(r - R_0)^2\right) + e^{-T\lambda(r)\gamma} \right). \quad (39)$$

Последнее неравенство справедливо при всех  $r \geq R_0$ . Естественно взять инфимум правой части по  $r$ . Но, поскольку точка инфимума не находится конструктивным способом, можно взять такое значение  $r(T) > R_0$  (по возможности меньшее), чтобы выполнялось неравенство

$$T^{-1}(r - R_0)^2 \geq T\lambda(r).$$

Возможность выбора такого  $r(T)$  следует из ограниченности функции  $\lambda(r)$ . Подставляя  $r = r(T)$  в (39), получаем оценку теоремы 2.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся оценкой (29):

$$\varepsilon \leq C \exp\left(-2\nu \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds\right) \int_{\Omega} \mu \varphi^2(x) dx.$$

Выберем число  $r = r(T)$  (по возможности большее) так, чтобы

$$T\lambda(r) \geq \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds.$$

Тогда из (38) вытекает неравенство (7) теоремы 1.

Покажем теперь, что функция  $\lambda(r)$  непрерывна в достаточно широкой ситуации. Назовем область  $\Omega$  регулярной, если существует семейство диффеоморфизмов  $\varphi_{r_1, r_2} : \Omega[r_1] \rightarrow \Omega[r_2]$ ,  $0 < r_1 < r_2$  таких, что  $\varphi_{r_1, r_2}(x) \rightarrow id$  в  $C^1(\Omega[r_1])$  как при  $r_1 \rightarrow r_2$ , так и при  $r_2 \rightarrow r_1$ .

Покажем, что для регулярной области функция  $\lambda(r)$  будет непрерывной. Для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  существует функция  $g_r \in C_0^1(\Omega)$  (зависящая от  $\varepsilon$ ) такая, что  $F_r(g_r) < \lambda(r) + \varepsilon$ . Очевидно, что  $\lambda(r_1) \leq F_{r_1}(g_{r_2})$ . Поэтому

$$\limsup_{r_1 \rightarrow r_2} \lambda(r_1) \leq \lambda(r_2) + \varepsilon.$$

Далее,  $F_{r_2}(g_{r_1}(\varphi_{r_1, r_2}(x))) \geq \lambda(r_2)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda(r_2) &\leq \liminf_{r_1 \rightarrow r_2} F_{r_2}(g_{r_1}(\varphi_{r_1, r_2}(x))) = \\ &= \liminf_{r_1 \rightarrow r_2} F_{r_1}(g_{r_1}(\varphi_{r_1, r_2}(x))) = \liminf_{r_1 \rightarrow r_2} F_{r_1}(g_{r_1}(x)) \leq \varepsilon + \liminf_{r_1 \rightarrow r_2} \lambda(r_1). \end{aligned}$$

Из полученных соотношений, ввиду произвольности  $\varepsilon > 0$ , следует непрерывность функции  $\lambda(r)$  слева. Непрерывность справа доказывается аналогично.

#### 4. ПРИМЕРЫ

Ограничимся построением примеров в случае  $n = 2$ , хотя аналогичные примеры несложно адаптировать к многомерной ситуации для области вращения

$$\Omega_f = \{(x_1, x') \mid x_1 > 0; |x'| < f(x_1)\},$$

определяемой непрерывной положительной функцией  $f(x_1)$ ,  $f(x_1) \geq 1$ ,  $x_1 > 0$ . Получим некоторые оценки функций  $\lambda, \tilde{\lambda}$  в случае плоской области  $\Omega_f$ . Для простоты будем ссылаться на вариант теоремы 1, когда области  $\Omega[r], S_r$  заменены на  $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$  и  $S_r = \{(x_1, x') \in \Omega \mid x_1 = r\}$ .

Выведем аналог неравенства Стеклова-Фридрихса с весами. Пусть  $g(s) \in C^1[0, r]$  и  $g(0) = 0$ . Возведя в квадрат равенство

$$g(s) = g(s) - g(0) = \int_0^s g'(t) dt,$$

нетрудно получить

$$g^2(s) \leq \int_0^r \rho^{-1}(t) dt \int_0^r \rho(t) (g'(t))^2 dt.$$

Домножим это на  $\mu(s)$  и проинтегрируем по  $s$ :

$$\int_0^r \mu(s) g^2(s) ds \leq \int_0^r \mu(s) ds \int_0^r \rho^{-1}(t) dt \int_0^r \rho(t) (g'(t))^2 dt.$$

Пусть теперь  $g(x_1, x_2) \in C_0^\infty(\Omega)$ . Тогда имеем

$$\int_0^{f(x_1)} \mu(x) g^2(x) dx_2 \leq \int_0^{f(x_1)} \mu(x) dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho^{-1}(x) dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho(x) (g'_{x_2}(x))^2 dx_2. \quad (40)$$

Введем обозначение  $\Lambda(r) = \sup_{0 \leq x_1 \leq r} M(x_1)$ , где

$$M(x_1) = \int_0^{f(x_1)} \mu(x) dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho^{-1}(x) dx_2.$$

Тогда

$$\int_0^{f(x_1)} \mu(x) g^2(x) dx_2 \leq \Lambda(r) \int_0^{f(x_1)} \rho(x) (g'_{x_2}(x))^2 dx_2. \quad (41)$$

Или, интегрируя по  $x_1$ , получим

$$\int_{\Omega[r]} \mu(x)g^2(x)dx \leq \Lambda(r) \int_{\Omega[r]} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2 dx. \quad (42)$$

В качестве  $\mu(x)$  и  $\rho(x)$  рассмотрим функции

$$\rho(x_1, x_2) = \begin{cases} \tilde{\rho}(x_1)(f(x_1) - |x_2|)^\alpha, & |x_2| \in [f(x_1) - 1, f(x_1)], \\ \tilde{\rho}(x_1), & |x_2| < f(x_1) - 1, \end{cases}$$

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} \tilde{\mu}(x_1)(f(x_1) - |x_2|)^\beta, & |x_2| \in [f(x_1) - 1, f(x_1)], \\ \tilde{\mu}(x_1), & |x_2| < f(x_1) - 1, \end{cases}$$

где  $|\alpha| < 1$ ,  $\beta > -1$ . Функции  $\tilde{\mu}(x_1), \tilde{\rho}(x_1)$  определим ниже. Потребуем для простоты, чтобы  $f(r) \geq \frac{|\alpha|}{1 - |\alpha|}$  и  $f(r) \geq \frac{-\beta}{1 + \beta}$  при  $r \geq R_0$ .

Вычисляя  $M(x_1)$  при  $\mu = \rho$ , из (41) находим, что

$$\tilde{\lambda}(r) \geq \left[ \left( f(r) - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) \left( f(r) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \right]^{-1} \geq \frac{1}{2f^2(r)}, \quad (43)$$

при  $r \geq R_0$ . Подставляя эту оценку в (29), получаем

$$\int_{\Omega \setminus \Omega(r)} \mu u^2(t, x) dx \leq C \exp \left( -2\nu \int_{R_0+1}^r \frac{ds}{f(s)} \right) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx.$$

Легко видеть также, что

$$\Lambda(r) = \sup_{0 \leq x_1 \leq r} \frac{\tilde{\mu}(x_1)}{\tilde{\rho}(x_1)} \left( f(x_1) - \frac{\beta}{1 + \beta} \right) \left( f(x_1) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \leq$$

$$\max \left( \sup_{0 \leq x_1 \leq r} 4 \frac{\tilde{\mu}(x_1)}{\tilde{\rho}(x_1)} f^2(x_1), \sup_{0 \leq x_1 \leq R_0} 4 \frac{\tilde{\mu}(x_1)}{\tilde{\rho}(x_1)} \frac{|\beta|}{1 + \beta} \frac{|\alpha|}{1 - \alpha} \right).$$

Для простоты будем предполагать, что функция  $\frac{\tilde{\mu}(x_1)}{\tilde{\rho}(x_1)} f^2(x_1)$  возрастает и  $\frac{\tilde{\mu}(R_0)}{\tilde{\rho}(R_0)} f^2(R_0) \geq \sup_{0 \leq x_1 \leq R_0} \frac{\tilde{\mu}(x_1)}{\tilde{\rho}(x_1)} \frac{|\beta|}{1 + \beta} \frac{|\alpha|}{1 - \alpha}$ . Ввиду (42) имеем  $\lambda(r) \geq \Lambda^{-1}(r)$ , поэтому

$$\lambda(r) \geq \frac{\tilde{\rho}(r)}{4\tilde{\mu}(r)f^2(r)}. \quad (44)$$

Несколько загрубляя оценку Теоремы 1 (см. ее доказательство), можно функцию  $r(t)$  выбрать

удовлетворяющей неравенству  $\frac{t\tilde{\rho}(r)}{\tilde{\mu}(r)f^2(r)} \geq \int_{R_0+1}^r \frac{ds}{f(s)}$ . Тогда оценка (7) примет вид

$$\int_{\Omega} \mu(x) u^2(t, x) dx \leq C \exp \left( -\nu_2 \int_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \right) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx. \quad (45)$$

В частности, если  $f(s) = s^p$ ,  $p \in (0, 1)$ :  $\int_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \leq \frac{r^{1-p}}{1-p}$ . Пусть для простоты  $\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} = \frac{r^q}{1-p}$ ,  $q < 1-p$ ,

тогда неравенство для выбора  $r(t)$  обретает вид  $t \geq r^{1-p-q}$ , допустим выбор  $r(t) = t^{(1-p-q)^{-1}}$ . В таком случае оценка (45) обретает вид

$$\int_{\Omega} \mu(x) u^2(t, x) dx \leq C_1 \exp \left( -C_2 t^{\frac{1-p}{1-p-q}} \right) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx.$$

Отметим, что в многомерном случае функция  $f(s) = s^p$  порождает параболоид вращения и все предыдущие выкладки сохраняются с соответствующими изменениями констант.

В случае  $f(s) = s$  имеем внутренность угла на плоскости (или конуса в многомерном случае).

Тогда  $\int_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \leq \ln r$ . В качестве примера подберем функции  $\tilde{\rho}, \tilde{\mu}$  так, чтобы  $\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} = \frac{\ln r}{r^q}, q > 0$ .

Тогда неравенство для выбора  $r(t)$  обретает вид  $t \geq r^q$ . Выберем  $r(t) = t^{1/q}$ . Теперь оценка (45) примет вид

$$\int_{\Omega} \mu(x) u^2(t, x) dx \leq C_3 \exp(-C_4 \ln t) \int_{\Omega} \mu(x) \varphi^2(x) dx.$$

## 5. ОЦЕНКА СНИЗУ

Напомним неравенство Гарнака, установленное Ю. Мозером в [23] для равномерно параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t, x) u_{x_i})_{x_j}. \quad (46)$$

Сформулируем его в удобном для нас виде: для неотрицательного в цилиндре  $Q = (0, 9C_1\rho^2] \times B(2\rho, \mathbf{w}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $C_1 > 1$ , решения уравнения (46) справедливо неравенство

$$\max_{Q^-} u(\tau, x) \leq H \min_{Q^+} u(\tau, x),$$

где  $Q^- = [\rho^2, 2\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w})$ ,  $Q^+ = [8C_1\rho^2, 9C_1\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w})$ ,  $B(\rho, \mathbf{w})$  – шар радиуса  $\rho$  с центром в точке  $\mathbf{w} \in \Omega$ , а постоянная  $H \geq 1$  зависит только от  $n, C_1$  и констант параболичности уравнения.

Напомним понятие  $A_2$ -веса, введенное Макенхауптом. Это измеримая функция  $\vartheta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая неравенству

$$\int_K \vartheta(x) dx \times \int_K \frac{1}{\vartheta(x)} dx < C_0 |K|^2$$

для любого куба  $K \subset \mathbb{R}^n$ . В работе [24] доказано, что если в  $Q$  выполнено равенство  $\rho = \mu = \vartheta$ , где  $\vartheta$  – некоторый  $A_2$ -вес, то для любого неотрицательного решения в  $Q$  уравнения (1) выполнено неравенство Гарнака. При этом постоянная  $H$  зависит только от  $C_0, C_1, n, \gamma$  и  $\gamma_1$ . Покажем, что можно отказаться от требования  $\rho = \mu$ , если  $\mu = \vartheta$  и выполнены неравенства

$$C_1^{-1} \leq \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} \leq C_1, \quad x \in B(2\rho, \mathbf{w}). \quad (47)$$

После замены  $\tau = \frac{\rho(\mathbf{w})}{\mu(\mathbf{w})} t$  получаем уравнение

$$\operatorname{div}(\rho(x)a(t, x)\nabla u) = \mu(x)u_t = \frac{\mu(x)\rho(\mathbf{w})}{\mu(\mathbf{w})} u_\tau$$

или при  $x \in B(2\rho, \mathbf{w})$  :

$$\operatorname{div}(\vartheta(x) \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} a(\tau, x)\nabla u) = \vartheta(x)u_\tau.$$

Последнее уравнение в  $Q$  имеет вид (1) с  $\rho = \mu = \vartheta$  и  $\tilde{a} = \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} a$ . Если переменные  $(\tau, x) \in Q$ ,

то  $(t, x) \in \tilde{Q} = (0, 9C_1\rho^2 \frac{\mu(\mathbf{w})}{\rho(\mathbf{w})}] \times B(2\rho, \mathbf{w})$ . Очевидным образом изменяются  $Q^- \rightarrow \tilde{Q}^-$  и  $Q^+ \rightarrow \tilde{Q}^+$ .

Для этих новых цилиндров остается справедливым неравенство Гарнака.

Таким образом, если в окрестности каждой точки  $\mathbf{w} \in \Omega$  выполнено неравенство (47) и функция  $\mu(x)$  в этой окрестности совпадает с некоторым весом  $\vartheta$  (зависящим от выбора точки  $\mathbf{w}$ ), то неотрицательное решение уравнения (1) либо всюду положительно в  $\Omega$ , либо тождественно равно нулю. Это доказывается стандартной техникой, если радиус окрестности непрерывно зависит от точки. Далее будет рассматриваться положительное решение уравнения (1).

**Теорема 3.** Пусть  $s > pf(s)$ ,  $p \in (0, 1)$  при  $s \geq z_0$ ,  $\Omega_f$  – область вращения и вес  $\mu(x)$  совпадает в  $\Omega_{pf} \cap \{x_1 > z_0\}$  с некоторым  $A_2$  – весом  $\vartheta$ . Пусть выполнены неравенства

$$\frac{f(x'_1)}{f(x''_1)} \leq 2, \quad \frac{\rho(x')\mu(x'')}{\mu(x')\rho(x'')} \leq C_1 \quad (48)$$

при всех  $x', x'' \in \Omega_{pf}$  таких, что  $x'_1, x''_1 \in [s - pf(s), s + pf(s)]$  и всех  $s \geq z_0$ . Тогда для положительного решения уравнения (1) выполнено неравенство

$$\min_{x \in B(r', \mathbf{w})} u(t, x) \geq u(t_1, (z_0, 0)) \exp \left( -C_2 \int_{z_0}^{\tilde{r}(t)} \frac{ds}{f(s)} \right),$$

где  $B(2r', \mathbf{w})$  – некоторый шар, вписанный в  $\Omega_{pf} \cap \{z_0 < x_1 < \tilde{r}(t)\}$ ;  $t_1 > 0$  – некоторое фиксированное число,  $\tilde{r}(t)$ ,  $t \geq t_1$ , определяется как наименьшее  $r$ , удовлетворяющее неравенству

$$\int_{z_0}^r \frac{ds}{f(s)} \geq tL(r), \quad L(r) = \inf_{[z_0, r]} \frac{4\rho(z, 0)}{\mu(z, 0)pf^2(z)},$$

а постоянная  $C_2$  зависит только от  $p, C_0, C_1, n, \gamma, \gamma_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $y_0 = z_0$  и  $r \geq z_0$  – произвольное число. Строим последовательность касающихся шаров с радиусами  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и точками касания  $\mathbf{v}_i = (y_{i-1} + 2r_i, 0)$ , такими, что удвоенный шар  $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ , где  $\mathbf{w}_i = (z_i, 0)$ ,  $z_i = y_{i-1} + r_i$ , касается множества  $\partial\Omega_{pf}$  изнутри. Отметим, что  $r_{i+1} \leq 3r_i$ , так как в противном случае  $B(2r_i, \mathbf{w}_i) \subset B(2r_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1})$ , то есть шар  $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$  не касается границы  $\Omega_{pf}$ .

Обозначим  $\mu_i = \mu(\mathbf{w}_i)$ ,  $\rho_i = \rho(\mathbf{w}_i)$ ,  $t_1 = r_1^2 \frac{\mu_1}{\rho_1}$ ;  $t_{i+1} = t_i + (9C_1 - 1) \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2$ .

Если при некотором  $i$  выполнено неравенство  $r_i \leq r_{i+1}$ , то при  $s = z_{i+1}$ , имеем  $s - z_i \leq 2r_{i+1} \leq pf(s)$ , поэтому из (48) получаем неравенство

$$\frac{\mu_{i+1}\rho_i}{\rho_{i+1}\mu_i} \leq C_1. \quad (49)$$

Если же  $r_i > r_{i+1}$ , то полагаем  $s = z_i$ ,  $z_{i+1} - s < 2r_i < pf(s)$ , и из (48) снова получаем (49). Кроме того, при  $s = z_i$  из (48) вытекают также аналог неравенства (47)

$$C_1^{-1} \leq \frac{\rho(x)\mu(w_i)}{\mu(x)\rho(w_i)} \leq C_1, \quad x \in B(2\rho_i, w_i)$$

и неравенство

$$\frac{f(x'_1)}{f(x''_1)} \leq 2, \quad \forall x', x'' \in [s - 2r_i, s + 2r_i]. \quad (50)$$

Рассмотрим цилиндры

$$\tilde{Q}_i = \left[ t_i - \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2, t_i + (9C_1 - 1) \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \right] \times B(2r_i, \mathbf{w}_i),$$

$$\tilde{Q}_i^- = \left[ t_i, t_i + \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \right] \times B(r_i, \mathbf{w}_i),$$

$$\tilde{Q}_i^+ = \left[ t_i + (8C_1 - 1) \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2, t_i + (9C_1 - 1) \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \right] \times B(r_i, \mathbf{w}_i).$$

Покажем, что если  $t_{i+1} \leq T$ , то  $\tilde{Q}_i \subset (0, T] \times \Omega_{pf}$ . Для этого достаточно установить, что  $t_i \geq \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2$ . Первый шаг индукции выполнен. Далее, ввиду (49),

$$t_{i+1} = t_i + (9C_1 - 1) \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \geq 9C_1 \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \geq \frac{\mu_{i+1}}{\rho_{i+1}} r_{i+1}^2,$$

что завершает индукцию.

Пусть  $k$  – первый номер, такой что  $y_{k+1} \geq r$  или  $t_{k+1} \geq T$ . Тогда по неравенству Гарнака

$$u(t_1, (y_0, 0)) \leq Hu(t_2, \mathbf{v}_1) \leq \dots \leq H^k u(t_{k+1}, \mathbf{v}_k).$$

Отсюда  $u(t_{k+1}, \mathbf{v}_k) \geq H^{-k} C_3$ . Оценим сверху число  $k$ . Пусть  $s_i$  – абсцисса одной из точек касания шара  $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$  границы области  $\Omega_{pf}$ . Ясно, что  $|z_i - s_i| \leq 2r_i$ ,  $pf(s_i) \leq 2r_i$ , поэтому, ввиду (50),  $f(s)/2 \leq f(s_i)$  при  $s \in [y_{i-1}, y_i]$ , и  $r_i \geq pf(z_i)/4$ . Тогда

$$k = \sum_{i=1}^k \frac{y_i - y_{i-1}}{2r_i} \leq \sum_{i=1}^k \frac{y_i - y_{i-1}}{pf(s_i)} \leq \sum_{i=1}^k \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{2ds}{pf(s)} \leq \int_{y_0}^r \frac{2ds}{pf(s)}.$$

Пусть  $\frac{\mu_m}{\rho_m} r_m^2 = \max_{j \leq k} \frac{\mu_j}{\rho_j} r_j^2 \geq \max_{z \in [z_0, r]} \frac{\mu(z, 0)}{64C_1 \rho(z, 0)} (pf(z))^2$ . Последнее неравенство следует из (48).

Для номеров  $i = m+1, m+2, \dots$  заменим шары  $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$  на шары  $B(2r_m, \mathbf{w}_m)$ . Цилиндры  $\tilde{Q}_i, i = m+1, m+2, \dots$  изменятся соответствующим образом. Поскольку каждый цилиндр увеличивает  $t_i$  на величину  $(9C_1 - 1) \frac{\mu_m}{\rho_m} r_m^2$ , то до значения  $t$  может понадобиться не более

$N = \left\lceil \frac{t\rho_m}{(9C_1 - 1)\mu_m r_m^2} \right\rceil \leq 2tL(r)/p$  цилиндров. Таким образом, получаем оценку

$$\min_{x \in B(r_m, \mathbf{w}_m)} u(t, x) \geq H^{-(k+N)} C_3 \geq \exp \left( - \left( \int_{z_0}^r \frac{2ds}{pf(s)} + 2tL(r)/p \right) \ln H \right), \quad (51)$$

из которой следует утверждение теоремы.

Применим неравенство (51) к примеру из §4, имеем

$$L(r) = \inf_{[z_0, r]} \frac{4\tilde{\rho}(z)}{\tilde{\mu}(z)pf^2(z)} = \frac{4\tilde{\rho}(r)}{\tilde{\mu}(r)pf^2(r)} \leq 16\lambda(r)/p.$$

Воспользовавшись еще неравенством (43), получим

$$\int_{\Omega(r)} \mu(x) u^2(t, x) dx \geq \pi r_m^2 \min_{x \in B(r_m, v_m)} \mu(x) C_3 \exp \left( - \frac{8}{p^2} \ln H \left( \int_{z_0}^r p\sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds \right) + 8t\lambda(r) \right).$$

Теперь выбор  $r = r(t)$  как во введении (в предположении непрерывности функции  $\lambda(r)$ ) :

$$t\lambda(r) = \int_{R_0+1}^r \sqrt{\tilde{\lambda}(s)} ds,$$

в определенном смысле, подтверждает точность оценки сверху (7), если множитель перед экспонентой в последнем неравенстве не слишком мал.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуцин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. Т. 126. 1973. С. 5–45.
2. Гуцин А.К. *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 101(143). № 4(12). 1976. С. 459–499.
3. Лежнев А.В. *О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 129. № 2. 1986. С. 186–200.
4. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Матем. сб. Т. 111(153). 1980. № 1. С. 95–115.
5. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 111(153). № 4. 1980. С. 503–521.
6. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. Т. 195. № 3. 2004. С. 115–142.

7. Акулов В.Ф., Шишков А.Е. *Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях* // Матем. сб. Т. 182. № 8. 1991. С. 1200–1210.
8. Гуштин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 119(161). № 4(12). 1982. С. 451–508.
9. Гуштин А.К. *Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 97(139). №2(6). 1975. С. 242–261.
10. Денисов В.Н. *О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности* // Дифференц. уравнения. Т. 24. 1988. С. 288–299.
11. Жиков В.В. *О стабилизации решений параболических уравнений* // Матем. сб. Т. 104(146). 1977. С. 597–616.
12. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при  $t \rightarrow \infty$  решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191. № 2. 2000. С. 91–131.
13. Кожевникова Л.М. *О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области* // Известия РАН. Т. 65. № 3. 2001. С. 51–66.
14. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196. № 7. 2005. С. 67–100.
15. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье-Стокса*: Дис. докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН. 1994. 225 с.
16. Мукминов Ф.Х. *Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 23. № 10. 1987. С. 1172–1180.
17. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 25. № 3. 1989. С. 491–498.
18. Тедеев А.Ф. *Оценки скорости стабилизации при  $t \rightarrow \infty$  решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 27. № 10. 1991. С. 1795–1806.
19. Ушаков В.И. *О поведении решений третьей смешанной задачи для параболических уравнений второго порядка при  $t \rightarrow \infty$*  // Дифференц. уравнения. Т. 15. 1979. С. 310–320.
20. Жиков В.В. *О весовых соболевских пространствах* // Матем. сб. Т. 189(8). 1998. С. 27–58
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967. 736 с.
22. Крылов Н.В., Сафонов М.В. *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 44. № 1. 1980. С. 161–175.
23. J.A. Moser *Harnack inequality for parabolic differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. V. 17. № 1. 1964. P. 101–134.
24. F. Chiarenza, R. Serapioni *A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. № 73. 1985. P. 179–190.

Венера Фидарисовна Вильданова  
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акумуллы,  
ул. Октябрьской революции, 3а  
450000, г. Уфа, Россия  
E-mail: gilvenera@mail.ru