ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 102-112.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Д.А. ТУРСУНОВ, У.З. ЭРКЕБАЕВ

Аннотация. В работе предлагается аналог метода погранфункций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева для построения равномерного асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенных задач. С помощью данного метода построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, в круге. Применяя принцип максимума, обосновано формальное асимптотическое разложение решения, т.е. получена оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, задача Дирихле, функции Эйри, модифицированные функции Бесселя, погранфункция.

Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

1. Введение

Различные задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовались многими авторами, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна [1]. Однако задачи с двойной сингулярностью, т.е. бисингулярно возмущенные задачи, сравнительно сингулярно возмущенным задачам, мало изучены. В бисингулярно возмущенных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая — с не гладкостью членов асимптотики. В основном для построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач применяют метод сращивания (согласования) или метод регуляризации Ломова, так как на прямую классический метод погранфункций применять невозможно. В работе предлагается аналог классического метода пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева для построения равномерного асимптотического разложения решения бисингулярно возмущенных задач. С помощью данного метода мы построим равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, в круге. При обосновании формального асимптотического разложения решения (ФАРР) применяем принцип максимума. Аналогичные задачи с помощью данного метода были исследованы в работах [3]-[5].

D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev, Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities.

Работа поддержана МОиН КР.

Поступила 25 мая 2015 г.

2. Постановка задачи

Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u(1,\varphi,\varepsilon)=\psi(\varphi,\varepsilon), \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\partial}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа,

$$D=\{(\rho,\varphi)|0<\rho<1,\ 0<\varphi\leqslant 2\pi\},\ f(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k,\ f_k\in C^\infty(\overline{D}),$$

$$\psi(\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_k(\varphi)\varepsilon^k,\ \psi_k\in C[0,2\pi],\ \alpha\in(0,1),\ f(\alpha,\varphi,0)\neq 0,\ f(1,\varphi,0)\neq 0,$$

$\psi(\varphi,\varepsilon),\ f(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — заданные функции, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — искомая функция, $\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k,\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\psi_k(\varphi)\varepsilon^k$ — асимптотические ряды в смысле Пуанкаре.

Решение задачи (1)-(2) существует и единственно [6]. Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Первая сингулярность очевидна, что решение предельного уравнения, $\varepsilon=0:$

$$-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2u(\rho,\varphi,0)=f_0(\rho,\varphi)$$

не удовлетворяет краевому условию (2). Чтобы показать вторую сингулярность, рассмотрим структуру внешнего асимптотического разложения решения задачи (1), которое ищем в виде:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi),\quad \varepsilon\to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим простую рекуррентную систему уравнений:

$$-(1-\rho)(\alpha-\rho)^2u_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi),$$

$$(1-\rho)(\alpha-\rho)^2u_k(\rho,\varphi)=\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi)-f_k(\rho,\varphi),\quad k\in N.$$

Поэтому, внешнее разложение решения задачи (1)-(2), имеет вид:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=\frac{1}{(1-\rho)(\alpha-\rho)^2}\left(F_0+\ldots+\frac{\varepsilon^k}{(1-\rho)^{3k}(\alpha-\rho)^{4k}}F_k+\ldots\right),\quad \varepsilon\to 0,$$

где $F_k(\rho,\varphi)=F_k\in C^\infty(\overline{D}),\quad k=0,1,\ldots.$

Заметим, что функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности вида:

$$u_k(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{1+3k}}\right),\quad \rho\to 1,\quad k=0,1,\ldots;$$

$$u_k(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-\alpha)^{2+4k}}\right),\quad \rho\to\alpha,\quad k=0,1,\ldots.$$

Следовательно, исследуемая задача является бисингулярно возмущенной по терминологии А.М. Ильина [1, 2].

3. Основной результат

Теорема 1. *Для решения задачи* (1)-(2), *при* $\varepsilon \to 0$, *справедливо асимптотическое разложение*

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \chi_1(\rho) \sum_{k=-1}^{+\infty} \varepsilon^{k/3} w_k\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon^{1/3}},\varphi\right) + \\ + \chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{+\infty} \varepsilon^{k/4} q_k\left(\frac{\rho-\alpha}{\varepsilon^{1/4}},\varphi\right), \quad (4)$$

где функции $v_k(\rho,\varphi), w_k\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon^{1/3}},\varphi\right), q_k\left(\frac{\rho-\alpha}{\varepsilon^{1/4}},\varphi\right)$ *определяются ниже*

$$\chi_1(\rho),\ \chi_2(\rho) - \text{функции срезки}, \quad \chi_1(\rho),\ \chi_2(\rho) \in [0,1], \quad \chi_1,\ \chi_2 \in C^\infty[0,1],$$
$$\chi_1(\rho) = 1, \quad \text{при } 1-\delta \leqslant \rho \leqslant 1, \quad \text{и} \quad \chi_1(\rho) = 0, \text{ при } 0 \leqslant \rho \leqslant 1-2\delta,$$
$$\chi_2(\rho) = 1, \quad \text{при } |\rho-\alpha| \leqslant \delta, \quad \text{и} \quad \chi_2(\rho) = 0, \text{ при } 2\delta \leqslant |\rho-\alpha|,$$

$(0, \min\{\alpha/2, (1-\alpha)/2\}) \ni \delta$ — *достаточно малое число, независящее от* ε.

Доказательство. Доказательство состоит из двух частей: построение ФАРР (4) и обоснование этого разложения.

3.1. Построение ФАРР.

ФАРР ищем в виде:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \chi_1(\rho)\sum_{k=-1}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau,\varphi) + \chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{+\infty} \lambda^k q_k(\eta,\varphi),\ \varepsilon \to 0, \quad (5)$$

где $\tau = (1-\rho)/\mu,\ \mu = \varepsilon^{1/3},\ \eta = (\rho-\alpha)/\lambda,\ \lambda = \varepsilon^{1/4}$.

Подставляя (5) в (1), получим:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k(\varepsilon\Delta v_k(\rho,\varphi) + \varepsilon\widetilde{v}_k(\rho,\varphi) - (1-\rho)(\alpha-\rho)^2 v_k(\rho,\varphi)) = \sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(f_k(\rho,\varphi) - h_k(\rho,\varphi)), \quad (6)$$

$$\sum_{k=-1}^{+\infty} \mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial\tau^2} - \frac{\mu}{(1-\mu\tau)}\frac{\partial w_k}{\partial\tau} + \frac{\mu^2}{(1-\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_k}{\partial\varphi^2} - \tau(1-\alpha-\mu\tau)^2 w_k\right) = \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} h_{1,k}(\tau\mu,\varphi)\mu^{3k}, \quad (7)$$

$$\sum_{k=-2}^{+\infty} \lambda^{k+2}\left(\frac{\partial^2 q_k}{\partial\eta^2} + \frac{\lambda}{(\alpha+\lambda\eta)}\frac{\partial q_k}{\partial\eta} + \frac{\lambda^2}{(\alpha+\lambda\eta)^2}\frac{\partial^2 q_k}{\partial\varphi^2} - \eta^2(1-\alpha-\lambda\eta)q_k\right) = \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} h_{2,k}(\eta\lambda,\varphi)\lambda^{4k}. \quad (8)$$

где по идее метода в равенствах (6), (7), (8) введен новый, пока неизвестный, асимптотический ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi) = \chi_1(\rho)\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k h_{1,k}(\rho,\varphi) + \chi_2(\rho)\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k h_{2,k}(\rho,\varphi),$$

который конкретизируется ниже, а функции $\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)$ в равенстве (6) имеют вид:

$$\widetilde{v}_k(\rho,\varphi)=\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_1(\rho)+2\frac{\partial\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_1'(\rho)+\widetilde{q}_k(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_2(\rho)+2\frac{\partial\widetilde{q}_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_2'(\rho),$$

$$\widetilde{w}_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{3k}\frac{w_{-1+j,3k+1-j}(\varphi)}{(1-\rho)^{3k+1-j}},\ \widetilde{q}_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{4k}\frac{q_{-2+j,4k+2-j}(\varphi)}{(\rho-\alpha)^{4k+2-j}},\ \widetilde{\chi}_j(\rho)=\chi_j''(\rho)+\frac{\chi_j'(\rho)}{\rho},$$

функции $w_{j,k}(\varphi),\ q_{j,k}(\varphi)\in C^\infty[0,2\pi]$ определяются из асимптотических разложений:

$$w_{3k-m}(\tau,\varphi)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{w_{3k-m,3j+m}(\varphi)}{\tau^{3j+m}},\quad m=1,2,3;\ \tau\to+\infty,$$

$$q_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}},\quad m=1,2,3,4;\ k=0,1,\ldots\eta\to\pm\infty.$$

Справедливость этих асимптотических разложений доказывается ниже.

Для определения функции $v_k(\rho,\varphi)$, из равенства (6) получим следующие уравнения:

$$-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2v_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi)-h_0(\rho,\varphi),$$

$$\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)+\widetilde{v}_{k-1}(\rho,\varphi)-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2v_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi),\quad k=1,2,\ldots.$$

Отсюда получаем

$$v_k(\rho,\varphi)=\frac{f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)}{(\rho-1)(\rho-\alpha)^2}+\frac{\widetilde{v}_{k-1}(\rho,\varphi)}{(1-\rho)(\rho-\alpha)^2},\quad k=0,1,\ldots.$$

$v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0,\quad \widetilde{v}_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0.$

Определим теперь неизвестные функции, т.е. коэффициенты асимптотического ряда $h_k(\rho,\varphi)$ так, чтобы

$$v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}),\ w_k(\tau,\varphi)\to 0,\ \text{при } \tau\to+\infty,\quad q_k(\eta,\varphi)\to 0,\ \text{при } \eta\to\pm\infty.$$

Пусть $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$, тогда $v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D})$, когда

$$h_k(\rho,\varphi)=\chi_1(\rho)h_{1,k}(\rho,\varphi)+\chi_2(\rho)h_{2,k}(\rho,\varphi),$$

где

$$h_{2,k}(\rho,\varphi)=g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(\rho-\alpha)-\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}\right)^2(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(1-\alpha)),$$

$$h_{1,k}(\rho,\varphi)=\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\alpha}\right)^2g_k(1,\varphi),\ g_{k,0}(\varphi)=g_k(\alpha,\varphi),\ g_{k,1}(\varphi)=\frac{\partial g_k(\alpha,\varphi)}{\partial\rho}.$$

Таким образом, мы определили коэффициенты асимптотических рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kv_k(\rho,\varphi),\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kh_k(\rho,\varphi).$$

Теперь перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k=-1}^{+\infty}\mu^kw_k(\tau,\varphi)$. Равенство (7) запишем в виде:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^k\left(\frac{\partial^2w_{-1+k}}{\partial\tau^2}-\mu\frac{\partial w_{-1+k}}{\partial\tau}+\mu^2\frac{\partial^2w_{-1+k}}{\partial\varphi^2}-\tau(1-\alpha-\mu\tau)^2w_{-1+k}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{3k}\left(1-\frac{2\mu\tau}{1-\alpha}+\frac{(\mu\tau)^2}{(1-\alpha)^2}\right)g_k(1,\varphi).$$

Отсюда имеем:

$$Lw_{-1} \equiv \frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial \tau^2} - \tau(1-\alpha)^2 w_{-1} = g_0(1,\varphi), \tag{9}$$

$$Lw_0 = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{-1} - \frac{2\tau}{1-\alpha} g_0(1,\varphi) + \frac{\partial w_{-1}}{\partial \tau}, \tag{10}$$

$$Lw_1 = -2(1-\alpha)\tau^2 w_0 + \tau^3 w_{-1} + \frac{\tau^2}{(1-\alpha)^2} g_0(1,\varphi) + W_1, \tag{11}$$

$$Lw_{3k-1} = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{3k-2} + \tau^3 w_{3k-3} + g_k(1,\varphi) + W_{3k-1} + B_{k,0}(\varphi), \tag{12}$$

$$Lw_{3k} = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{3k-1} + \tau^3 w_{3k-2} - \frac{2\tau}{1-\alpha} g_k(1,\varphi) + W_{3k} + B_{k,1}(\varphi)\tau, \tag{13}$$

$$Lw_{3k+1} = -2(1-\alpha)\tau^2 w_{3k} + \tau^3 w_{3k-1} + \frac{\tau^2}{(1-\alpha)^2} g_k(1,\varphi) + W_{3k+1} + B_{k,2}(\varphi)\tau^2, \tag{14}$$

где $(\tau,\varphi) \in D_1 = \{(\tau,\varphi)|0 < \tau < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, $W_s = \frac{\partial w_{s-1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{s-2}}{\partial \varphi^2}$, $B_{k,0}(\varphi),\ B_{k,1}(\varphi),\ B_{k,2}(\varphi)$ — пока неизвестные функции, $k = 1, 2, \ldots$.

А граничные условия примут вид:

$$w_{3k}(0,\varphi) = \psi_k(\varphi) - v_k(1,\varphi), \quad k = 0, 1, \ldots; \quad w_s(0,\varphi) = 0, s \neq 3k. \tag{15}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\widetilde{f}(\tau)\delta(\varphi) \in C^\infty(D_1),\ a_0 > 0$. *Тогда задача*

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial \tau^2} - \tau a_0 z(\tau,\varphi) = \widetilde{f}(\tau)\delta(\varphi), \quad (\tau,\varphi) \in D_1, \quad z(0,\varphi) = z^0(\varphi) \tag{16}$$

имеет единственное решение $z(\tau,\varphi) \in C^\infty(D_1)$.

Доказательство. Пусть $t = \sqrt[3]{a_0}\tau$, тогда задача (16) примет вид:

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - t z(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt[3]{a_0^2}} \widetilde{f}(t)\delta(\varphi), \quad z(0,\varphi) = z^0(\varphi), \tag{17}$$

Решение этой задачи (17) ищем в виде

$$z(t,\varphi) = z_1(t) \frac{1}{\sqrt[3]{a_0^2}} \delta(\varphi),$$

тогда, относительно $z_1(t)$, получим задачу

$$z_1''(t) - t z_1(t) = \widetilde{f}(t), \quad z_1(0) = z^0(\varphi)\sqrt[3]{a_0^2}/\delta(\varphi) \equiv z_1^0. \tag{18}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z_1''(t) - t z_1(t) = 0$$

имеет два независимых решений $Ai(t),\ Bi(t)$— функции Эйри [7]. С помощью функции Эйри запишем решение задачи (18):

$$z_1(t) = \frac{z_1^0}{Ai(0)} Ai(t) + \pi Bi(t) \int_t^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)ds +$$

$$+\pi Ai(t) \left(\int_0^t Bi(s)\widetilde{f}(s)ds - \sqrt{3}\int_0^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)ds \right).$$

Отсюда

$$z(t,\varphi) = \frac{z^0(\varphi)}{Ai(0)} Ai(t) + \frac{\pi}{\sqrt[3]{a_0^2}} \delta(\varphi) Bi(t) \int_t^{+\infty} Ai(s)\widetilde{f}(s)ds +$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt[3]{a_0^2}}\delta(\varphi)Ai(t)\left(\int_0^t Bi(s)\widetilde{f}(s)ds-\sqrt{3}\int_0^{+\infty}Ai(s)\widetilde{f}(s)ds\right).$$

□

Следствие 1. *Если $\widetilde{f}(\tau)=O(\tau^{N_1})$ при $\tau\to+\infty$, то, учитывая асимптотическое поведение функции Эйри при $\tau\to+\infty$, получаем $z(\tau,\varphi)=O(\tau^{N_1-1})$, $\quad N_1-const$.*

С помощью этой леммы доказывается существование единственных решений уравнений (9)–(14), удовлетворяющих соответствующим условиям (15). Ниже докажем существование функций $B_{k,0}(\varphi),\ B_{k,1}(\varphi),\ B_{k,2}(\varphi)$, при которых решения этих задач принадлежат классу функций убывающих степенным ростом по τ, и решение каждого уравнения (9)–(14) удовлетворяет равенству:

$$\lim_{\tau\to+\infty}w_k(\tau,\varphi)=0,\quad k=-1,0,1,\dots.$$

Переходим к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k=-2}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$. Равенство (8) запишем в виде:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k\left(\frac{\partial^2 q_{-2+k}}{\partial\eta^2}+\lambda\frac{\partial q_{-2+k}}{\partial\eta}+\lambda^2\frac{\partial^2 q_{-2+k}}{\partial\varphi^2}-\eta^2(1-\alpha-\lambda\eta)q_{-2+k}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{4k}\left(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)\lambda\eta-\left(\frac{\lambda\eta}{1-\alpha}\right)^2(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(1-\alpha))\right).$$

Отсюда, имеем:

$$lq_{-2}\equiv\frac{\partial^2 q_{-2}}{\partial\eta^2}-\eta^2(1-\alpha)q_{-2}=g_{0,0}(\varphi),\tag{19}$$

$$lq_{-1}=-\frac{\partial q_{-2}}{\partial\eta}-\eta^3 q_{-2}+\eta g_{0,1}(\varphi),\tag{20}$$

$$lq_0=Q_0-\eta^3 q_{-1}-\left(\frac{\eta}{1-\alpha}\right)^2(g_{0,0}(\varphi)+g_{0,1}(\varphi)(1-\alpha)),\tag{21}$$

$$lq_1=Q_1-\eta^3 q_0,\tag{22}$$

$$lq_{4k-2}=Q_{4k-2}-\eta^3 q_{4k-3}+g_{k,0}(\varphi)+A_{k,0}(\varphi),\tag{23}$$

$$lq_{4k-1}=Q_{4k-1}-\eta^3 q_{4k-2}+\eta g_{k,1}(\varphi)+A_{k,1}(\varphi)\eta,\tag{24}$$

$$lq_{4k}=Q_{4k}-\eta^3 q_{4k-1}-\left(\frac{\eta}{1-\alpha}\right)^2(g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(1-\alpha))+A_{k,2}(\varphi)\eta^2,\tag{25}$$

$$lq_{4k+1}=Q_{4k+1}-\eta^3 q_{4k},\tag{26}$$

где $(\eta,\varphi)\in D_2=\{(\eta,\varphi)|-\infty<\eta<+\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, $Q_s=-\frac{\partial q_{s-1}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 q_{s-2}}{\partial\varphi^2}$, $A_{k,0}(\varphi),\ A_{k,1}(\varphi),\ A_{k,2}(\varphi)$ — пока неизвестные функции, $k=1,2,\dots$.

Докажем следующую вспомогательную лемму, из которой следует существование решений уравнений (19)–(26).

Лемма 2. *Пусть $\widetilde{f}(\eta)\delta(\varphi)\in C^\infty(D_2), b_0>0$. Тогда задача*

$$\frac{\partial^2 z(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-\eta^2 b_0 z(\eta,\varphi)=\widetilde{f}(\eta)\delta(\varphi),\quad(\eta,\varphi)\in D_2,\tag{27}$$

имеет единственное решение $z(\eta,\varphi)\in C^\infty(D_2)$.

Доказательство. С помощью замены $\eta = \sqrt[4]{4/b_0}t$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2} - t^2 z(t,\varphi) = \frac{2}{\sqrt{b_0}}\widetilde{f}(t)\delta(\varphi).$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$z(t,\varphi) = z_2(t)\sqrt{\frac{4}{b_0}}\delta(\varphi).$$

Тогда для $z_2(t)$ получим уравнение:

$$z_2''(t) - t^2 z_2(t) = \widetilde{f}(t),$$

соответствующее однородное уравнение

$$z_2''(t) - t^2 z_2(t) = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $\{U_4(t), U_4(-t)\}$, где $U_4(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}K_{1/4}(t^2)$, $t > 0$, $K_{1/4}(t^2)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя)[7]. Приведем основные свойства этих функции $U_4(t),\ U_4(-t)$:

a) Вронскиан этих функции равен

$$W(U_4(t), U_4(-t)) = 4cosec(\pi/4) = 4\sqrt{2}.$$

b) При $t = 0 : U_4(0) = \pi^{-1/2}2^{-1/4}\Gamma(1/4)$.

c) При $t \to +\infty$ функция $U_4(t)$ экспоненциально убывает: $U_4(t) \sim t^{-1/2}e^{-t^2}$.

При $t \to -\infty$ функция $U_4(t) = \sqrt{\frac{2|t|}{\pi}}(\sqrt{2}\pi I_{1/4}(t^2) + K_{1/4}(t^2)),\ t < 0$, экспоненциально растет:

$$U_4(t) = (2/t)^{1/2}e^{t^2}(1 + O(t^{-2})),$$

где $I_{1/4}(t^2),\ K_{1/4}(t^2)$– модифицированные функции Бесселя. Следовательно, решение задачи (27) можно записать в виде:

$$z(t,\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2b_0}}\delta(\varphi)\left(U_4(t)\int_{-\infty}^{t} U_4(-s)\widetilde{f}(s)ds + U_4(-t)\int_{t}^{+\infty} U_4(s)\widetilde{f}(s)ds\right),$$

где $t = \sqrt[4]{b_0/4}\eta$. □

Следствие 2. *Если* $\widetilde{f}(\eta) = O(\eta^{N_2})$, *при* $\eta \to \pm\infty$, *то* $z(\eta,\varphi) = O(\eta^{N_2-2})$, $N_2 - const$.

Используя эту лемму, мы можем записать явные решения задач (19)–(26).

Докажем существование таких функций $A_{k,0}(\varphi),\ A_{k,1}(\varphi),\ A_{k,2}(\varphi)$, при которых выполняются равенства:

$$\lim_{\eta\to\pm\infty} q_k(\eta,\varphi) = 0,\ k = -2, -1, 0, 1, \dots.$$

Лемма 3. *Существуют такие функции* $A_{k,j}(\varphi), B_{k,j}(\varphi) \in C^\infty[0,2\pi]$, $k \in N,\ j = 0, 1, 2;$ *удовлетворяющие равенствам* $(A_{k,j} = A_{k,j}(\varphi), B_{k,j} = B_{k,j}(\varphi))$:

$$A_{k,0} - \alpha A_{k,1} + \alpha^2 A_{k,2} + B_{k,0} + B_{k,1} + B_{k,2} = 0, \tag{28}$$

$$A_{k,1} - 2\alpha A_{k,2} - B_{k,1} - 2B_{k,2} = 0, \tag{29}$$

$$A_{k,2} + B_{k,2} = 0, \tag{30}$$

и при которых справедливы соотношения:

$$w_{3k-m}(\tau,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k-m,3j+m}(\varphi)}{\tau^{3j+m}},\ m = 1, 2, 3;\ w_{k,j} \in C^\infty[0,2\pi], \tau \to +\infty, \tag{31}$$

$$q_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}}, m=1,2,3,4;\ q_{k,j}\in C^{\infty}[0,2\pi], \eta\to\pm\infty. \tag{32}$$

Доказательство. Смысл этих равенств (28)–(30) состоит в том, что при таком выборе неизвестных функций сохраняется гладкость решений $v_k(\rho,\varphi)$, т.е.

$$A_{k,0}+A_{k,1}(\rho-\alpha)+A_{k,2}(\rho-\alpha)^2+B_{k,0}+B_{k,1}(1-\rho)+B_{k,2}(1-\rho)^2\equiv 0.$$

Заметим, что при $\tau\to+\infty$ и $\eta\to\pm\infty$ справедливы соотношения:

$$w_{-1}(\tau,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{-1,3j+1}(\varphi)}{\tau^{3j+1}},\quad w_m(\tau,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{m,3j-m}(\varphi)}{\tau^{3j-m}},\ m=0,1;$$

$$q_{-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}},\ m=2,1;\quad q_m(\eta,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_{m,4j-m}(\varphi)}{\eta^{4j-m}},\ m=0,1;$$

где $w_{k,j}(\varphi),q_{k,j}(\varphi)\in C^{\infty}[0,2\pi]$.

Допустим, что для любого $k=0,1,\ldots$, при $\tau\to+\infty$ и $\eta\to\pm\infty$ справедливы соотношения:

$$w_{3k-1}(\tau,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k-1,3j+1}(\varphi)}{\tau^{3j+1}},\quad w_{3k+m}(\tau,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{3k+m,3j-m}(\varphi)}{\tau^{3j-m}}, m=0,1;$$

$$q_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}}, m=2,1;\ q_{4k+m}(\eta,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_{4k+m,4j-m}(\varphi)}{\eta^{4j-m}}, m=0,1;$$

где $w_{k,j},q_{k,j}\in C^{\infty}[0,2\pi]$.
Тогда при $k+1$:

$$\begin{aligned}
&Lw_{3k+2}=-2(1-\alpha)\tau^2w_{3k+1}+\tau^3w_{3k}+g_{k+1}(1,\varphi)+\tfrac{\partial w_{3k+1}}{\partial\tau}-\tfrac{\partial^2w_{3k}}{\partial\varphi^2}+B_{k+1,0},\\
&Lw_{3k+3}=-2(1-\alpha)\tau^2w_{3k+2}+\tau^3w_{3k+1}-\tfrac{2\tau}{1-\alpha}g_{k+1}(1,\varphi)+\tfrac{\partial w_{3k+2}}{\partial\tau}-\tfrac{\partial^2w_{3k+1}}{\partial\varphi^2}+B_{k+1,1}\tau,\\
&Lw_{3k+4}=-2(1-\alpha)\tau^2w_{3k+3}+\tau^3w_{3k+2}+\tfrac{\tau^2}{(1-\alpha)^2}g_{k+1}(1,\varphi)+\tfrac{\partial w_{3k+3}}{\partial\tau}-\tfrac{\partial^2w_{3k+2}}{\partial\varphi^2}+B_{k+1,2}\tau^2,\\
&lq_{4k+2}=-\tfrac{\partial q_{4k+1}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+1}+g_{k+1,0}(\varphi)+A_{k+1,0},\\
&lq_{4k+3}=-\tfrac{\partial q_{4k+2}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k+1}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+2}+\eta g_{k+1,1}(\varphi)+A_{k+1,1}\eta,\\
&lq_{4k+4}=-\tfrac{\partial q_{4k+3}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k+2}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+3}-(\tfrac{\eta}{1-\alpha})^2(g_{k+1,0}(\varphi)+g_{k+1,1}(\varphi)(1-\alpha))+A_{k+1,2}\eta^2,\\
&lq_{4k+5}=-\tfrac{\partial q_{4k+4}}{\partial\eta}-\tfrac{\partial^2q_{4k+3}}{\partial\varphi^2}-\eta^3q_{4k+4}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$w_{3k+2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k+2,3j+1}}{\tau^{3j+1}},$$

$$w_{3k+3}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k+3,3j+3}}{\tau^{3j+3}},\ \text{при}\ B_{k+1,1}=-\frac{2B_{k+1,0}}{1-\alpha}+3w_{3k+1,2}-\frac{2w_{3k,3}}{1-\alpha},$$

$$w_{3k+4}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3k+4,3j+2}}{\tau^{3j+2}},\ \text{при}\ B_{k+1,2}=\frac{B_{k+1,0}}{(1-\alpha)^2}-\frac{2w_{3k+1,2}}{1-\alpha}+\frac{w_{3k,3}}{(1-\alpha)^2},$$

$$q_{4k+2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+2,4j+2}}{\eta^{4j+2}},\ q_{4k+3}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+3,4j+1}}{\eta^{4j+1}},\ q_{4k+5}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+5,4j+3}}{\eta^{4j+3}},$$

$$q_{4k+4}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{4k+4,4j+4}}{\eta^{4j+4}},\ \text{при}\ A_{k+1,2}=-\frac{A_{k+1,0}}{(1-\alpha)^2}-\frac{A_{k+1,1}}{1-\alpha}+\frac{q_{4k+1,3}}{(1-\alpha)^2},$$

где $w_{k,j} = w_{k,j}(\varphi),\ q_{k,j} = q_{k,j}(\varphi)$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными $A_{k+1,0},\ A_{k+1,1},\ B_{k+1,0}$:

$$\begin{array}{l} \frac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2} A_{k+1,0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} A_{k+1,1} + \alpha^2 c + c_1 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} B_{k+1,0} = 0, \\ \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} A_{k+1,0} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} A_{k+1,1} - 2\alpha^2 c - c_1 - 2c_2 - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} B_{k+1,0} = 0, \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2} A_{k+1,0} + \frac{1}{1-\alpha} A_{k+1,1} - c - c_2 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} B_{k+1,0} = 0, \end{array}$$

где $c = \dfrac{q_{4k+1,3}}{(1-\alpha)^2},\ c_1 = 3w_{3k+1,2} - \dfrac{2w_{3k,3}}{1-\alpha},\ c_2 = \dfrac{w_{3k,3}}{(1-\alpha)^2} - \dfrac{2w_{3k+1,2}}{1-\alpha}$.

Система имеет единственное решение:

$$B_{k+1,0} = -q_{4k+1,3} + \frac{w_{3k,3}}{(1-\alpha)^2} - \frac{2w_{3k+1,2}}{1-\alpha},$$

$$A_{k+1,1} = w_{3k+1,2}, \quad A_{k+1,0} = w_{3k,3}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) - w_{3k+1,2}\left(3(1-\alpha) + \frac{2}{1-\alpha}\right).$$

Следовательно, для любого $k = 0, 1, \ldots$ верны равенства (31) и (32), т.е.

$$\lim_{\eta \to \pm\infty} q_{k-2}(\eta, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} w_{k-1}(\tau, \varphi) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Заметим, что

$$w_{3k-m}\left(\frac{1-\rho}{\mu}, \varphi\right) = \mu^m \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{w_{3k-m,3j+m}(\varphi)}{(1-\rho)^{3j+m}},\ m = 1, 2, 3, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$q_{4k-m}\left(\frac{\rho-\alpha}{\lambda}, \varphi\right) = \lambda^m \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{q_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{(\rho-\alpha)^{4j+m}},\ m = 1, 2, 3, 4;\ k = 0, 1, \ldots, \quad \varepsilon \to 0.$$

□

3.2. Обоснование ФАРР. Приступим теперь к обоснованию формального асимптотического разложения (5). Пусть

$$u_n(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \chi_1(\rho) \sum_{k=-1}^{3n+1} \mu^k w_k(\tau, \varphi) + \chi_2(\rho) \sum_{k=-2}^{4n} \lambda^k q_k(\eta, \varphi),$$

$$R(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) - u_n(\rho, \varphi, \varepsilon).$$

Заметим, что $u_n(\rho, \varphi, \varepsilon) \in C^\infty(D), \quad \varepsilon \to 0$.

Для остаточного члена $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ получим уравнение:

$$\varepsilon \Delta R(\rho, \varphi, \varepsilon) - (1-\rho)(\alpha-\rho)^2 R(\rho, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon^{n+3/4} \Phi, \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

где

$$\begin{gathered} \Phi = (\widetilde{f}(\rho, \varphi, \varepsilon) - \Delta v_n(\rho, \varphi) - \widetilde{v}_n(\rho, \varphi, \varepsilon) + (\tau^3 w_{3n}(\tau, \varphi) - 2(1-\alpha)\tau^2 w_{3n+1}(\tau, \varphi) + \\ + \frac{\partial w_{3n+1}(\tau, \varphi)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 (w_{3n}(\tau, \varphi) + \mu w_{3n+1}(\tau, \varphi))}{\partial \varphi^2} + \mu \tau^3 w_{3n+1}(\tau, \varphi))\chi_1(\rho))\varepsilon^{1/4} - \\ - \left(\eta^3 q_{4n}(\eta, \varphi) + \frac{\partial q_{4n}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 (q_{4n-1}(\eta, \varphi) + \lambda q_{4n}(\eta, \varphi))}{\partial \varphi^2}\right)\chi_2(\rho), \end{gathered}$$

$$\widetilde{f}(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_{n+1+k}(\rho, \varphi), \quad \widetilde{v}_n(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_{n+k}(\rho, \varphi).$$

Отметим, что Φ — гладкая функция. Поэтому при $\varepsilon \to 0$, $\exists M,\ 0 < M$ — const, $\|\Phi\|_C \leqslant M$, т.е. $\Phi = O(1)$. А граничное условие примет вид:

$$R(1,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(\varphi) \text{ или } R(1,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, получаем следующую задачу:

$$\varepsilon \Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon) - (1-\rho)(\alpha-\rho)^2 R(\rho,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+3/4}),\ \varepsilon \to 0, \quad (\rho,\varphi) \in D,$$
$$R(1,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Для этой задачи, применяя принцип максимума, получим

$$R(\rho,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n-1/4}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует справедливость разложения (4). Теорема доказана. □

Пример. Пусть $a(\rho,\varphi) \equiv 1$, $f(\rho,\varphi) = 1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3$, $\psi(\varphi,\varepsilon) \equiv 0$, т.е. исследуем задачу

$$\varepsilon \Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon) - (1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2 u(\rho,\varphi,\varepsilon) = 1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3, \quad (\rho,\varphi) \in D, \tag{33}$$
$$u(1,\varphi,\varepsilon) = 0, \tag{34}$$

тогда

$$u_0(\rho,\varphi) = -\frac{1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2}.$$

А если

$$h_{1,0}(\rho,\varphi) = (2\rho-1)^2(2+\cos(\varphi)+\sin(\varphi)),$$
$$h_{2,0}(\rho,\varphi) = \frac{9}{8}+\frac{1}{2}\cos(\varphi)+\frac{1}{4}\sin(\varphi)+(\rho-\frac{1}{2})(\frac{3}{4}+\cos(\varphi)+\sin(\varphi))-(\rho-\frac{1}{2})^2(6+4\cos(\varphi)+3\sin(\varphi)),$$

то

$$v_0(\rho,\varphi) = -\frac{1 + \rho\cos(\varphi) + \rho^2\sin(\varphi) + \rho^3 - h_{1,0}(\rho,\varphi)\chi_1(\rho) - h_{2,0}(\rho,\varphi)\chi_2(\rho)}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2},$$
$$\text{и} \quad v_1(\rho,\varphi) = \frac{\Delta v_0(\rho,\varphi) - h_{1,1}(\rho,\varphi)\chi_1(\rho) - h_{2,1}(\rho,\varphi)\chi_2(\rho)}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2} + \frac{\widetilde{v}_0(\rho,\varphi)}{(1-\rho)(\frac{1}{2}-\rho)^2},$$

где

$$h_{2,1}(\rho,\varphi) = g_{1,0}(\varphi) + g_{1,1}(\varphi)(\rho-1/2) - (2\rho-1)^2(g_{1,0}(\varphi) + g_{1,1}(\varphi)/2),$$
$$h_{1,1}(\rho,\varphi) = (2\rho-1)^2\Delta v_0(1,\varphi),\ g_{1,0}(\varphi) = \Delta v_0(1/2,\varphi),\ g_{1,1}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\rho}\Delta v_0(\rho,\varphi)|_{\rho=1/2}.$$
$$\widetilde{v}_0(\rho,\varphi) = \widetilde{w}_0(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_1(\rho) + 2\frac{\partial\widetilde{w}_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_1'(\rho) + \widetilde{q}_0(\rho,\varphi)\widetilde{\chi}_2(\rho) + 2\frac{\partial\widetilde{q}_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\chi_2'(\rho),$$
$$\widetilde{w}_0(\rho,\varphi) = -\frac{4(2+\cos(\varphi)+\sin(\varphi))}{1-\rho}, \quad \widetilde{q}_0(\rho,\varphi) = -\frac{9+4\cos(\varphi)+2\sin(\varphi)}{(2\rho-1)^2}.$$

И для $w_k(\tau,\varphi)$ и $q_k(\eta,\varphi)$ получаем задачи аналогичные к задачам (9)–(14), (15), (19)–(26). Решения этих задач существуют, единственны, при $\tau \to +\infty$, $\eta \to \pm\infty$ справедливы оценки:

$$w_{-1}(\tau,\varphi) = w_2(\tau,\varphi) = O(\tau^{-1}), \quad w_0(\tau,\varphi) = w_3(\tau,\varphi) = O(\tau^{-3}),$$
$$w_1(\tau,\varphi) = w_4(\tau,\varphi) = O(\tau^{-2}), \quad q_{-2}(\eta,\varphi) = q_2(\eta,\varphi) = O(\eta^{-2}),$$
$$q_{-1}(\eta,\varphi) = q_3(\eta,\varphi) = O(\eta^{-1}),\ q_0(\eta,\varphi) = q_4(\eta,\varphi) = O(\eta^{-4}),\ q_1(\eta,\varphi) = O(\eta^{-3}).$$

Следовательно, для решения задачи (33)-(34) справедливо разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = v_0(\rho,\varphi) + \varepsilon v_1(\rho,\varphi) + \chi_1(\rho)\sum_{k=-1}^{4}\varepsilon^{k/3} w_k\left(\frac{1-\rho}{\varepsilon^{1/3}},\varphi\right) +$$

$$+\chi_2(\rho)\sum_{k=-2}^{4}\varepsilon^{k/4}q_k\left(\frac{2\rho-1}{2\varepsilon^{1/4}},\varphi\right)+O(\varepsilon^{3/4}),\quad \varepsilon\to 0.$$

Заключение. Особенность исследованной задачи состоит в том, что задача имеет двойную сингулярность. Для этого случая мы доказали применимость метода пограничных функций. Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в круге. Причем, построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо.

Данный метод отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью ряда с коэффициентами h_k полностью вносятся во внутренние.

Следует отметить, что здесь для простоты исследован случай $a(\rho,\varphi)\equiv 1$, асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для уравнения

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(1-\rho)(\rho-\alpha)^2a(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

где $a(\rho,\varphi)>0$ в области $\overline{D}$, строится точно такжеб и асимптотическое разложение решения имеет такую же структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука, 1989.
2. Ильин А.М., Данилин А.Р. *Асимптотические методы в анализе.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.
3. Турсунов Д.А.*Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика Т. 6. № 26. 2013. С. 37–44.
4. Турсунов Д.А. *Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе* // Известия Томского Политехнического Университета Т. 324. № 2. 2014. С. 31–35.
5. D.A. Tursunov, K.J. Belekov *Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries* // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Edited by Academician Altay Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, P. 143–147 (2014).
6. Гилбарг Д., Трудинге Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989.
7. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1977. 352 с.

Дилмурат Абдиллажанович Турсунов,
Уральский государственный педагогический университет,
ул. Карла Либкнехта, 9,
620151, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: d_osh@rambler.ru

Улукбек Заирбекович Эркебаев
Ошский государственный университет,
ул. Ленина, 331,
723500, г. Ош, Кыргызстан
E-mail: uluk3188@mail.ru