ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 113-126.

УДК 517.547.22

МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $\rho \in (0,1)$, ВСЕ НУЛИ КОТОРОЙ ЛЕЖАТ В УГЛЕ И ИМЕЮТ ЗАДАННЫЕ ПЛОТНОСТИ

В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. В работе найдено наименьшее значение, которое может принимать тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями заданных верхней и нижней плотностей, расположенными в угле фиксированного раствора $\leqslant \pi$. Основная теорема обобщает предыдущие результаты автора (нули лежат на одном луче) и А. Ю. Попова (учитывается только верхняя плотность нулей). Выделен и подробно разобран случай, когда целая функция имеет измеримую последовательность нулей. Даны применения полученных результатов к теоремам единственности для целых функций и вопросам полноты систем экспонент в пространстве аналитических в круге функций со стандартной топологией равномерной сходимости на компактах.

Ключевые слова: тип целой функции, верхняя и нижняя плотности нулей, теорема единственности, полнота системы экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30D15

1. Введение

Пусть $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$. Пусть далее $f(z)$ — целая функция, все нули которой расположены в некотором угле раствора $\leqslant \pi$ и образуют последовательность $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ с *верхней* и *нижней* ρ - *плотностями*

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \geq \alpha \tag{1}$$

соответственно. Как обычно, нули считаются с учетом кратности и упорядочены по возрастанию модулей.

Требуется найти наименьшее возможное при указанных условиях значение для величины *типа* функции $f(z)$ при порядке ρ, определяемого формулой

$$\sigma_\rho(f) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|\,. \tag{2}$$

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\Lambda \subset \Gamma_\theta \equiv \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \theta\}\,, \tag{3}$$

где $\theta \in [0,\pi/2]$, сводя задачу к нахождению экстремальной величины

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha\right\}. \tag{4}$$

Укажем, что при $\theta = 0$ получаем задачу для целых функций с нулями на луче, решенную ранее А. Ю. Поповым [1] (для $\alpha = 0$) и автором [2] (для любого $\alpha \in [0,\beta]$).

V.B. Sherstyukov, Minimal value for the type of an entire function of order $\rho \in (0,1)$, whose zeros lie in an angle and have a prescribed density.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00281-а).

Поступила 6 июля 2015 г.

В настоящей статье величина $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ вычисляется при всех $\theta\in[0,\pi/2]$. Работа, помимо введения, состоит из трех частей. В первой части получена оценка снизу для типа функции, определенного в (2). Вторая часть посвящена доказательству точности этой оценки. Результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть заданы числа* $\rho\in(0,1)$, $\beta>0$, $\alpha\in[0,\beta]$, $\theta\in[0,\pi/2]$. *Тогда справедлива формула*

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho)=\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta\,+\,\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\left(\beta\,a^{-\rho}-\alpha\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx.$$

Точная нижняя грань (4) *достигается для некоторой функции с последовательностью нулей* Λ_0, *расположенной на двух лучах* $\arg z=\pm\,\theta$ *так, что* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0)=\beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_0)=\alpha$.

В третьей части работы теорема 1 используется для конкретизации одной теоремы единственности Б. Н. Хабибуллина. Даны также приложения к целым функциям экспоненциального типа и вопросам полноты систем экспонент.

Экстремальную задачу о вычислении $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ при $\alpha=0$ (т. е. без учета нижней ρ-плотности нулей) поставил и решил А. Ю. Попов [3], отыскав величину

$$s_\theta(0,\beta;\rho)=\frac{\beta}{2}\,\max_{a>0}\,a^{-\rho}\ln(1+2a\cos\theta+a^2).$$

Для функций, последовательности нулей $\Lambda=\Lambda_f=(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ которых *измеримы*, т. е. имеют ρ-*плотность*

$$\Delta_\rho(\Lambda)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho}=\beta,$$

из теоремы 1 получаем соотношение

$$s_\theta(\beta,\beta;\rho)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta.$$

Отметим, что экстремальная величина $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все нули функции расположены на лучах $\arg z=\pm\,\theta$, и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями ($=\beta/2$), и $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$, заведомо не достигается, если эти ρ-плотности различны.

Современное состояние теории экстремальных задач для типа целых функций с нулями на луче или в угле изложено в обзорах [3], [4].

Приступим к доказательству теоремы 1.

2. Оценка типа целой функции

Итак, пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho\in(0,1)$. Предполагаем, что последовательность всех ее нулей $\Lambda=\Lambda_f=(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ лежит в угле Γ_θ с фиксированным $\theta\in[0,\pi/2]$ и имеет ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)\ge\alpha$. Всюду далее $\alpha\in(0,\beta]$, поскольку случай $\alpha=0$ рассмотрен в [3]. Докажем оценку

$$\sigma_\rho(f)\ge\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta\,+\,\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\left(\beta\,a^{-\rho}-\alpha\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx.\tag{5}$$

Можно считать, что $f(0)=1$. Тогда по теореме Адамара (см. [5, гл. I, § 10]) функция $f(z)$ представляется в виде канонического произведения

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right).\tag{6}$$

Учитывая (3), запишем $\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $|\varphi_n| \leqslant \theta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (6) получим

$$M_f(r) \equiv \max_{|z|=r} |f(z)| \geq |f(-r)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{r}{\lambda_n}\right| = \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{r}{r_n} e^{-i\varphi_n}\right| =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n}\cos\varphi_n + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2} \geq \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2}.$$

Обозначим через $n_\Lambda(\tau) = \sum\limits_{|\lambda_n| \leqslant \tau} 1$ считающую функцию последовательности Λ, или, что все равно, последовательности $|\Lambda| \equiv (|\lambda_n|)_{n=1}^{\infty} = (r_n)_{n=1}^{\infty}$. Попутно отметим, что формулы (1) можно записать в виде

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \beta, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} \geq \alpha. \tag{7}$$

Стандартное привлечение интеграла Стильтьеса дает

$$\ln M_f(r) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2r}{\tau}\cos\theta + \left(\frac{r}{\tau}\right)^2\right) d\, n_\Lambda(\tau).$$

Интегрирование по частям с учетом условий

$$f(0) = 1, \qquad n_\Lambda(\tau) = O(\tau^\rho), \quad \tau \to +\infty,$$

избавляющих от подстановки, приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2r}{\tau}\cos\theta + \left(\frac{r}{\tau}\right)^2\right) d\, n_\Lambda(\tau) = \int\limits_0^{+\infty} n_\Lambda(\tau)\, \frac{r\,(\tau\cos\theta + r)}{\tau\,(\tau^2 + 2r\tau\cos\theta + r^2)}\, d\tau.$$

После замены переменной $\tau = rt$ и обозначений

$$\varphi_r(t) \equiv \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}, \qquad K(t) \equiv \frac{t^{\rho-1}(t\cos\theta + 1)}{t^2 + 2t\cos\theta + 1}, \qquad t > 0, \tag{8}$$

приходим к оценке

$$r^{-\rho} \ln M_f(r) \geq \int\limits_0^{+\infty} \varphi_r(t)\, K(t)\, dt, \qquad r > 0. \tag{9}$$

В интеграле из (9) функция $\varphi_r(t)$ при фиксированном r удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \varphi_r(t) = \beta, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} \varphi_r(t) \geq \alpha,$$

а ядро $K(t)$ положительно при $t > 0$, каково бы ни было значение параметра $\theta \in [0, \pi/2]$ (см. (7), (8)). Поэтому в дальнейших оценках можно воспользоваться методом, разработанным в [2] для случая расположения нулей Λ на одном луче ($\theta = 0$). Зафиксируем произвольно число $a > 0$ и положим $\eta = \eta(r) \equiv \varphi_r(1/a)$. Имеем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \eta(r) = \beta, \qquad \varliminf_{r\to+\infty} \eta(r) \geq \alpha.$$

Пусть $\alpha' \in (0,\alpha)$. Как показано в [2], найдется такое число $c > 0$, что при всех $r \geq ac$ и $t \geq c/r$ выполняется неравенство $\varphi_r(t) \geq \psi_r(t)$, где функция $\psi_r(t)$ определена для положительных t посредством формулы

$$\psi_r(t) \equiv \begin{cases} \alpha', & t \notin \left[\dfrac{1}{a},\, \left(\dfrac{\eta}{\alpha'}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a}\right], \\ \dfrac{\eta}{(at)^{\rho}}, & t \in \left[\dfrac{1}{a},\, \left(\dfrac{\eta}{\alpha'}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a}\right]. \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда на основании (9) заключаем, что

$$r^{-\rho} \ln M_f(r) \;\geq\; \int\limits_{c/r}^{+\infty} \psi_r(t)\, K(t)\, dt, \qquad r \geq ac. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражения $K(t)$ из (8) и $\psi_r(t)$ из (10) и выделяя известный интеграл (см., например, [6, задача 4. 174])

$$\int\limits_0^{+\infty} K(t)\, dt \;=\; \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\, \cos \rho\,\theta, \tag{12}$$

получаем оценку

$$r^{-\rho} \ln M_f(r) \;\geq$$

$$\geq\; \frac{\pi\alpha'}{\sin \pi\rho}\, \cos\rho\,\theta \;+ \int\limits_{1/a}^{(1/a)(\eta/\alpha')^{1/\rho}} \frac{(\eta a^{-\rho} - \alpha' t^{\rho})\,(t\cos\theta + 1)}{t\,(t^2 + 2t\cos\theta + 1)}\, dt \;-\; \alpha' \int\limits_0^{c/r} K(t)\, dt.$$

Перейдем здесь к верхнему пределу по последовательности значений r, на которой $\eta = \eta(r)$ стремится к β. С учетом (2) имеем

$$\sigma_\rho(f) \;\geq\; \frac{\pi\alpha'}{\sin \pi\rho}\, \cos\rho\,\theta \;+ \int\limits_{1/a}^{(1/a)(\beta/\alpha')^{1/\rho}} \frac{(\beta a^{-\rho} - \alpha' t^{\rho})\,(t\cos\theta + 1)}{t\,(t^2 + 2t\cos\theta + 1)}\, dt.$$

Для получения оценки (5) осталось сделать в интеграле замену переменной $t = 1/x$ и воспользоваться свободой выбора чисел $\alpha' \in (0,\alpha)$ и $a > 0$.

3. Доказательство точности оценки

Покажем, что оценка (5) достижима. Для этого расположим последовательность Λ_0 на лучах $\arg z = \pm\theta$ так, чтобы

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_0) = \alpha, \tag{13}$$

а каноническое произведение

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda_n \in \Lambda_0, \tag{14}$$

имело тип

$$\sigma_\rho(f_0) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho}\, \cos\rho\,\theta \;+\; \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}\right) \frac{x + \cos\theta}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx. \tag{15}$$

Относительно параметров задачи будем предполагать, что

$$\rho \in (0,1), \quad \beta > 0, \quad \alpha \in (0,\beta], \quad \theta \in (0,\pi/2],$$

находясь в ситуации, не изученной ранее. Случаи $\alpha \in (0, \beta)$ и $\alpha = \beta$ разберем отдельно.

Пусть вначале $\alpha \in (0, \beta)$. Воспользуемся конструкцией экстремальной последовательности, предложенной автором в [2] для $\theta = 0$. Выбираем вспомогательную положительную последовательность $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ со свойством

$$m_1 > 1, \quad m_{k+1} = m_k^4, \qquad k \in \mathbb{N},$$

и строим последовательность $(r_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, соблюдая следующее правило. На промежутках вида $[m_k,\, m_k^2 - 1]$ и $\Big[(\beta/\alpha)^{1/\rho}\, m_k^2,\, m_{k+1}\Big)$ точки r_j^{ρ} образуют арифметическую прогрессию с разностью $2/\alpha$; на промежутках $(m_k^2 - 1,\, m_k^2]$ точки r_j^{ρ} образуют арифметическую прогрессию с разностью $\dfrac{2\rho}{(\beta-\alpha)m_k^2}$; на промежутках вида $\Big(m_k^2,\, (\beta/\alpha)^{1/\rho}\, m_k^2\Big)$ точек r_j^{ρ} нет. Согласно [2] верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ равны $\beta/2$ и $\alpha/2$ соответственно. Полагая

$$\Lambda_0 \equiv \big(r_j\, e^{-i\theta}\big)_{j=1}^{\infty} \bigcup \big(r_j\, e^{i\theta}\big)_{j=1}^{\infty},$$

сразу получаем (13). Образуем по последовательности Λ_0 каноническое произведение (14). Заметим, что

$$f_0(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_j}\, e^{i\theta}\right) \left(1 - \frac{z}{r_j}\, e^{-i\theta}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{r_j} \cos\theta + \left(\frac{z}{r_j}\right)^2\right),$$

откуда

$$M_{f_0}(r) = \max_{|z|=r} |f_0(z)| = f_0(-r) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2r}{r_j} \cos\theta + \left(\frac{r}{r_j}\right)^2\right).$$

Поскольку считающая функция $n_{\Lambda_0}(\tau)$ последовательности Λ_0 есть удвоенная считающая функция последовательности $(r_j)_{j=1}^{\infty}$, то, повторяя соответствующие выкладки из пункта 2, приходим к представлению

$$r^{-\rho} \ln M_{f_0}(r) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt, \qquad r > 0, \tag{16}$$

где $\varphi_{0,r}(t) \equiv \dfrac{n_{\Lambda_0}(rt)}{(rt)^{\rho}}$ и $K(t)$ определены в (8). Таким образом, функция (14) доставляет равенство в (9).

С точностью до остаточных членов, не влияющих на величину типа (2), функция $\varphi_{0,r}(t)$ с параметром $r > 0$ совпадает с функцией $\Phi_r(t)$, которая определяется при $t > 0$ формулами

$$\Phi_r(t) \equiv \alpha, \qquad t \in \left(0,\, \frac{m_1}{r}\right],$$

$$\Phi_r(t)\,\big|_{\left[\frac{m_k}{r},\, \frac{m_{k+1}}{r}\right]} \equiv \begin{cases} \alpha, & t \notin \left[\dfrac{m_k^2}{r},\, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{m_k^2}{r}\right], \\[2ex] \beta \left(\dfrac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho}, & t \in \left[\dfrac{m_k^2}{r},\, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{m_k^2}{r}\right], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$ (подробности см. в [2]). Тем самым, из (16) следует, что

$$\sigma_{\rho}(f_0) \;=\; \varlimsup_{r \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\, K(t)\, dt. \tag{17}$$

Введем для сокращения записи несколько обозначений. Пусть

$$g(a) \equiv \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho})\ (x + \cos\theta)}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx =$$

$$= \int\limits_{1/a}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}(1/a)} \left(\frac{\beta}{(at)^{\rho}} - \alpha \right) K(t)\, dt. \tag{18}$$

Поскольку функция $g(a)$ непрерывна и положительна при $a > 0$, причем

$$\lim_{a\to+0} g(a) = \lim_{a\to+\infty} g(a) = 0, \tag{19}$$

то найдется такая точка $a_0 > 0$, что $g(a_0) = \max\limits_{a>0} g(a)$. Для $t > 0$ положим

$$\psi_0(t) \equiv \begin{cases} \alpha, & t \notin \left[\dfrac{1}{a_0}, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a_0} \right], \\ \dfrac{\beta}{(a_0 t)^{\rho}}, & t \in \left[\dfrac{1}{a_0}, \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a_0} \right]. \end{cases} \tag{20}$$

С учетом определений (18), (20) оценку (5) можно переписать в виде

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} \cos\rho\,\theta \,+\, g(a_0) = \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt.$$

В частности,

$$\sigma_\rho(f_0) \geq \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt. \tag{21}$$

Требующее обоснования соотношение (15) равносильно формуле

$$\sigma_\rho(f_0) = \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt. \tag{22}$$

Докажем, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \psi_0(t))\ K(t)\, dt \leqslant 0, \tag{23}$$

и тогда равенство (22) будет установлено. Действительно, из (21), (17), (23) имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt \leqslant \sigma_\rho(f_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \psi_0(t))\ K(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \psi_0(t)\, K(t)\, dt,$$

откуда и вытекает (22).

Итак, осталось проверить неравенство (23), выражающее «близость» весовой считающей функции $\varphi_{0,r}(t)$ последовательности Λ_0 к «экстремальной» функции $\psi_0(t)$ из (20). Вначале выведем представление

$$\int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \psi_0(t))\ K(t)\,dt\ =\ \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0), \tag{24}$$

опираясь на (18), (20). Для этого запишем

$$\psi_0(t) - \alpha \equiv 0, \qquad t \notin \left[\frac{1}{a_0},\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\frac{1}{a_0}\right],$$

$$\int\limits_{1/a_0}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}(1/a_0)} (\psi_0(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =\ g(a_0).$$

Кроме того,

$$\Phi_r(t) - \alpha \equiv 0, \qquad t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m_k^2}{r},\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\frac{m_k^2}{r}\right] \equiv T_r,$$

$$\int\limits_{T_r} (\Phi_r(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}\ \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right)\ K(t)\,dt\ =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \psi_0(t))\ K(t)\,dt\ =\ \int\limits_0^{+\infty} (\Phi_r(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ -\ \int\limits_0^{+\infty} (\psi_0(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =$$

$$=\int\limits_{T_r} (\Phi_r(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ -\ \int\limits_{1/a_0}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}(1/a_0)} (\psi_0(t) - \alpha)\ K(t)\,dt\ =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0),$$

и мы получили (24).

Теперь оценим сумму в (24) для $r \in \left[m_s^2,\ m_{s+1}^2\right]$ при фиксированном $s \in \mathbb{N}$, разбивая ее на три части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0) = \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) + \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) +$$

$$+\left(g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0)\right).$$

Используя в оценке первой суммы неравенство $K(t) \leqslant t^{\rho-1}$, $t > 0$, и отбрасывая под знаком интеграла отрицательное слагаемое, имеем

$$0 < \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = \sum_{k=1}^{s-1} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) t^{\rho-1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \beta \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{\beta}{\rho}\ln\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \leqslant \frac{\beta}{\rho}\ln\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho}.$$

В силу выбора последовательности $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ выполнено $\lim\limits_{s\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{s-1} \left(\dfrac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho} = 0$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho} < s\left(\frac{m_{s-1}}{m_s}\right)^{2\rho} = \frac{s}{m_s^{3\rho/2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]} \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = 0. \tag{25}$$

Используя в оценке второй суммы другое неравенство $K(t) \leqslant t^{\rho-2}$, $t > 0$, и снова отбрасывая под знаком интеграла отрицательное слагаемое, имеем

$$0 < \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = \sum_{k=s+2}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=s+2}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) t^{\rho-2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \beta \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \beta\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}\right) \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho-1} \leqslant \beta\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}\right) \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)}.$$

Выбор последовательности $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ обеспечивает выполнение условия

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} = 0,$$

поскольку

$$\sum_{k=s+2}^{\infty}\left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} \leqslant \sum_{k=s+2}^{\infty}\left(\frac{m_{k-1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} = \sum_{k=s+2}^{\infty}\frac{1}{m_k^{3(1-\rho)/2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{s\to\infty}\ \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]}\ \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = 0. \tag{26}$$

Оценим, наконец, выражение

$$g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0), \qquad r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right],$$

опирась на определение точки a_0 и свойство (19) функции $g(a)$. Рассмотрим два возможных случая: $r\in[m_s^2,\, m_s m_{s+1}]$ и $r\in\left[m_s m_{s+1},\, m_{s+1}^2\right]$. В первом случае имеем $\dfrac{r}{m_{s+1}^2}\leqslant\dfrac{m_s}{m_{s+1}}$ и

$$g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) - g(a_0) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) \leqslant g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) \to 0, \qquad s\to\infty.$$

Во втором случае имеем $\dfrac{r}{m_s^2}\geq\dfrac{m_{s+1}}{m_s}$ и

$$g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0) + g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) \leqslant g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) \to 0, \qquad s\to\infty.$$

Следовательно, можем утверждать, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\ \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]}\left(g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0)\right) \leqslant 0. \tag{27}$$

Сочетая (24)–(27), получаем (23).

Таким образом, в случае $\alpha\in(0,\beta)$ целая функция $f_0(z)$, построенная по правилу (14), удовлетворяет (15) и является экстремальной в задаче (4) при $\theta\in(0,\pi/2]$.

Случай $\alpha=\beta$ в техническом отношении гораздо проще предыдущего, но обладает своей спецификой. Согласно (5) тип целой функции порядка $\rho\in(0,1)$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta, \tag{28}$$

если последовательность всех ее нулей $\Lambda=\Lambda_f$ лежит в угле

$$\Gamma_\theta = \{z\in\mathbb{C} : |\arg z|\leqslant\theta\}$$

с $\theta\in(0,\pi/2]$ и имеет ρ-плотность

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta. \tag{29}$$

Исключенное здесь значение $\theta=0$ в свете экстремальной задачи (4) при $\alpha=\beta$ не представляет интереса, поскольку, как известно, тип целой функции порядка $\rho\in(0,1)$, нули которой лежат на одном луче и измеримы с ρ-плотностью β, всегда вычисляется по точной формуле

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Однако, картина усложняется, когда в ограничении (3) на расположение нулей раствор угла положительный.

Покажем, что оценка (28) точна. Для этого выберем измеримую последовательность $(r_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ с ρ-плотностью $\beta/2$ и снова положим

$$\Lambda_0 = \left(r_j\, e^{-i\theta}\right)_{j=1}^{\infty} \bigcup \left(r_j\, e^{i\theta}\right)_{j=1}^{\infty},$$

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda_n \in \Lambda_0.$$

Последовательность Λ_0 расположена симметрично на сторонах угла Γ_θ и имеет ρ-плотность $\Delta_\rho(\Lambda_0) = \beta$, подчиняясь (29), а для $f_0(z)$ справедливо представление (16). Рассуждая стандартным образом, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $rt \geq t_0$ выполнялось соотношение

$$\varphi_{0,r}(t) = \frac{n_{\Lambda_0}(rt)}{(rt)^\rho} \leqslant \beta + \varepsilon.$$

Тогда

$$r^{-\rho} \ln M_{f_0}(r) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0/r}^{+\infty} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt \;+\; \int\limits_0^{t_0/r} \varphi_{0,r}(t)\, K(t)\, dt \;\leqslant\; (\beta+\varepsilon) \int\limits_{t_0/r}^{+\infty} K(t)\, dt \;+\; o(1), \quad r \to +\infty.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то с учетом формул (2), (12) получаем

$$\sigma_\rho(f_0) \leqslant \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}\, \cos\rho\,\theta.$$

Таким образом, построенная функция $f_0(z)$ доставляет равенство в (28). Теорема 1 полностью доказана.

Обсудим теперь некоторые нюансы, полезные для понимания сути дела. Вначале отметим, что функция $f_0(z)$, предъявленная в заключительной части доказательства теоремы 1, имеет вполне регулярный рост. Укажем естественное обобщение этого примера.

Возьмем на луче $\arg z = -\theta$ произвольную измеримую последовательность Λ_1 с ρ-плотностью $\beta/2$, а на луче $\arg z = \theta$ — произвольную измеримую последовательность Λ_2 с ρ-плотностью $\beta/2$. Тогда последовательность $\Lambda_0 \equiv \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2$ будет обладать свойством (29). Проверим, что функция (14), построенная по такой последовательности Λ_0, имеет тип

$$\sigma_\rho(f_0) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}\, \cos\rho\,\theta. \tag{30}$$

По-прежнему, $f_0(z)$ является функцией вполне регулярного роста, но теперь в расположении ее нулей симметрия относительно вещественной оси, вообще говоря, отсутствует. Согласно [5, гл. II, §2] *индикатор* $f_0(z)$ вычисляется по формуле

$$h_\rho(f_0, \varphi) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln |f_0(re^{i\varphi})| =$$

$$= \frac{\pi\beta}{2\sin\pi\rho}\, \left(h_\rho(\varphi+\theta) + h_\rho(\varphi-\theta)\right), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

где через $h_\rho(\varphi)$ обозначено 2π-периодическое продолжение функии $\cos\rho(\varphi-\pi)$ с $[0, 2\pi]$ на $\mathbb{R}$. Прямой подсчет дает

$$h_\rho(f_0, \varphi) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho} \cdot \begin{cases} \cos\rho(\pi-\theta)\cdot\cos\rho\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \theta, \\ \cos\rho\theta\cdot\cos\rho(\varphi-\pi), & \theta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi-\theta, \\ \cos\rho(\pi-\theta)\cdot\cos\rho(2\pi-\varphi), & 2\pi-\theta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Но тогда с учетом неравенства $\cos\rho\,\theta \geq \cos\rho(\pi-\theta)$ получим

$$\sigma_\rho(f_0) \;=\; \max_{0\leqslant\varphi<2\pi} h_\rho(f_0,\varphi) \;=\; h_\rho(f_0,\pi) \;=\; \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta,$$

подтверждая (30).

С другой стороны, даже для функций вполне регулярного роста неравенство в (28) может оказаться строгим. Действительно, пусть Λ состоит из двух измеримых последовательностей, одна из которых имеет ρ-плотность $\beta_1 \geq 0$ и расположена на луче $\arg z = -\theta$, а другая имеет ρ-плотность $\beta_2 \geq 0$, $\beta_2 \neq \beta_1$, и расположена на луче $\arg z = \theta$, причем $\beta_1+\beta_2 = \beta$. Снова выполнено (29). Образуем по такой последовательности Λ каноническое произведение (6). Исключив требованием $\beta_2 \neq \beta_1$ случай «правильной» функции $f_0(z)$, мы все равно имеем дело с функцией $f(z)$ вполне регулярного роста. В обозначениях из формулы для $h_\rho(f_0,\varphi)$ индикатор $h_\rho(f,\varphi)$ имеет вид [5, гл. II, §2]

$$h_\rho(f,\varphi) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,\left(\beta_1\,h_\rho(\varphi+\theta) + \beta_2\,h_\rho(\varphi-\theta)\right), \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

После несложных преобразований приходим к развернутой записи

$$h_\rho(f,\varphi) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\cdot\begin{cases} A_{\pi-\theta}\,\cos\left(\rho\varphi-\varphi_{\pi-\theta}\right), & 0\leqslant\varphi\leqslant\theta,\\ A_\theta\,\cos\left(\rho(\varphi-\pi)-\varphi_\theta\right), & \theta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\theta,\\ A_{\pi-\theta}\,\cos\left(\rho(2\pi-\varphi)-\varphi_{\pi-\theta}\right), & 2\pi-\theta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

где для краткости обозначено

$$A_\theta \equiv \sqrt{\beta^2\cos^2\rho\,\theta \,+\, (\beta_2-\beta_1)^2\sin^2\rho\,\theta}, \qquad \varphi_\theta \equiv \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta}\operatorname{tg}\rho\,\theta\right).$$

Вследствие ограничений, наложенных на параметры, справедливы неравенства

$$A_\theta > \beta\cos\rho\,\theta, \qquad |\varphi_\theta| \leqslant \rho\,\theta.$$

Берем $\varphi^* \equiv \pi + \varphi_\theta/\rho$. Тогда $\theta \leqslant \pi-\theta \leqslant \varphi^* \leqslant \pi+\theta \leqslant 2\pi-\theta$. Подставляя значение φ^* в выражение для индикатора, получим

$$\sigma_\rho(f) \geq h_\rho(f,\varphi^*) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,A_\theta > \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta = \sigma_\rho(f_0).$$

Таким образом, функция $f(z)$, в отличие от $f_0(z)$, не является экстремальной.

4. Теоремы единственности и полнота систем экспонент

Основной результат статьи позволяет получать новые теоремы единственности для целых функций и теоремы о полноте систем экспонент. Подобные применения теоремы 1 в случае $\theta = 0$ даны в работе [2]; подробный разбор общей ситуации $\theta \in [0,\pi/2]$ требует отдельной публикации. Остановимся коротко на некоторых приложениях. Так, естественным развитием результата Б. Н. Хабибуллина [7, теорема 4] является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\rho \in (0,1)$, и пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел конечной верхней ρ-плотности $\beta > 0$ и нижней ρ-плотности $\geq \alpha \in [0,\beta]$, расположенная в некотором угле раствора $2\theta \leqslant \pi$. Если тип при порядке ρ целой функции f, обращающейся в нуль на Λ, меньше величины*

$$\frac{2^{\,\rho}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}\;s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho) \;=\; \frac{\sin\pi\rho}{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma^2(1-\rho/2)\;s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho),$$

где $s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ выписана в теореме 1, то $f \equiv 0$ на $\mathbb{C}$.

В формулировке теоремы 2 фигурирует Г-функция Эйлера. Доказательство получается прямым соединением теоремы 4 из [7] и нашей теоремы 1.

Приведем теперь следствие теоремы 1, относящееся к четным целым функциям экспоненциального типа, которые играют важную роль в различных разделах комплексного анализа, например, в теории рядов Дирихле (см. [8]).

Теорема 3. *Пусть* $\beta > 0,\ \alpha \in [0, \beta],\ \theta \in [0, \pi/4]$, *и пусть*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad |\arg \lambda_n| \leqslant \theta,$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \beta, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} \geq \alpha.$$

Тогда экспоненциальный тип

$$\sigma(F) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}}\, r^{-1} \ln \max_{|z|=r} |F(z)|$$

функции $F(z)$ *удовлетворяет точному неравенству*

$$\sigma(F) \geq s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2), \tag{31}$$

в правой части которого стоит величина

$$s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2) = \pi\alpha \cos\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^2}^{a} \left(\frac{\beta}{\sqrt{a}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) \frac{x + \cos 2\theta}{x^2 + 2x\cos 2\theta + 1}\, dx \tag{32}$$

из теоремы 1.

Для доказательства достаточно рассмотреть целую функцию

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right), \qquad \mu_n = \lambda_n^2,$$

порядка $\rho = 1/2$ с нулями

$$(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma_{2\theta} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant 2\theta\}, \qquad 2\theta \in [0, \pi/2],$$

учесть, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\mu_n|^{1/2}} = \beta, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\mu_n|^{1/2}} \geq \alpha, \qquad \sigma_{1/2}(f) = \sigma(F),$$

и применить к ней теорему 1.

Без учета нижней плотности нулей ($\alpha = 0$) оценка (31) принимает вид

$$\sigma(F) \geq \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(a^2 + 2a\cos 2\theta + 1\right).$$

Если же последовательность нулей $F(z)$ имеет плотность ($\alpha = \beta$), то (31) превращается в оценку

$$\sigma(F) \geq \pi\beta \cos\theta.$$

Все оценки точны. Интеграл в (32) вычисляется через элементарные функции и в случае $\alpha \in (0, \beta)$, но итоговое выражение столь громоздко, что вряд ли целесообразно приводить его здесь.

Из теорем 2, 3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность комплексных чисел конечной верхней плотности* $\beta > 0$ *и нижней плотности* $\geq \alpha \in [0, \beta]$ *такая, что* $|\arg \lambda_n| \leqslant \theta$, *где* $\theta \in [0, \pi/4]$. *Пусть целая функция* F *обращается в нуль на множестве* $\pm\Lambda$, *и ее экспоненциальный тип меньше величины*

$$\frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\, s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2),$$

где $s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2)$ *задается формулой* (32), *а числовой коэффициент* $\Gamma^2(3/4)/\sqrt{\pi}$ *равен* $0.8472\ldots$. *Тогда* $F \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$.

Для того чтобы раскрыть возможности для применения теоремы 4 к экспоненциальной аппроксимации в комплексной области, напомним некоторые определения. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек из $\mathbb{C}$, и $\Lambda(\lambda)$ обозначает число вхождений точки λ в последовательность Λ. Говорят, что система (кратных) экспонент

$$E_\Lambda \equiv \left\{ z^{n-1} e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda,\ n = 1, 2, \ldots, \Lambda(\lambda) \right\}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

полна в круге

$$K_R \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}, \qquad R > 0,$$

если она полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах из K_R. Символ $R(\Lambda)$ обозначает *радиус круга полноты* последовательности Λ, т. е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R, в которых полна система E_Λ. Обозначим через $\sigma_{inf}(\Lambda)$ точную нижнюю грань значений $\sigma > 0$, для которых найдется целая функция $F \not\equiv 0$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ такая, что F обращается в нуль на Λ (с учетом кратностей): $F(\Lambda) = 0$. Согласно известному критерию полноты системы E_Λ в пространстве $A(K_R)$ (см., например, [9, § 3.3.1]) справедливо равенство

$$\sigma_{inf}(\Lambda) = R(\Lambda).$$

При фиксированных $\beta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ введем класс $P_\theta(\alpha, \beta)$, состоящий из всевозможных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел конечной верхней плотности $\beta > 0$ и нижней плотности $\geq \alpha \in [0, \beta]$ таких, что $|\arg \lambda_n| \leqslant \theta$. Положим

$$R_\theta(\alpha, \beta) \equiv \inf_{\Lambda \in P_\theta(\alpha, \beta)} R(\pm\Lambda). \tag{33}$$

Наша цель — как можно точнее оценить характеристику $R_\theta(\alpha, \beta)$. Попросту говоря, требуется с хорошей точностью найти радиус наибольшего из кругов, в которых заведомо полна любая система экспонент, множество показателей которой $\pm\Lambda$ порождено какой-либо последовательностью Λ из класса $P_\theta(\alpha, \beta)$.

Наилучшие из известных к настоящему моменту оценок для $R_\theta(\alpha, \beta)$ удается получить, сочетая теорему 4 с классическим неравенством (см. [10, § 2.5])

$$\sigma(F) \geq \beta \exp\left\{ \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right\}.$$

Это неравенство справедливо для экспоненциального типа любой целой функции F, последовательность нулей которой имеет верхнюю плотность β и нижнюю плотность $\geq \alpha$.

Теорема 5. *Пусть зафиксированы числа* $\beta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, *и величина* $s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2)$ *вычислена по правилу* (32). *Тогда для экстремального радиуса полноты* $R_\theta(\alpha, \beta)$, *определенного формулой* (33), *справедлива двусторонняя оценка*

$$\max\left\{ \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\, s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2);\ \ 2\beta\, e^{\alpha/\beta - 1} \right\} \leqslant R_\theta(\alpha, \beta) \leqslant s_{2\theta}(\alpha, \beta; 1/2).$$

Например, для систем экспонент с измеримыми показателями имеем

$$\beta \max\left\{\Gamma^2(3/4)\sqrt{\pi}\cos\theta;\ 2\right\} \leqslant R_\theta(\beta,\,\beta) \leqslant \pi\beta\cos\theta,$$

где числовой коэффициент $\Gamma^2(3/4)\sqrt{\pi} = 2.6614\ldots$. *В частности,*

$$2.6614\ldots\,\beta \leqslant R_0(\beta,\,\beta) \leqslant \pi\beta.$$

В заключение отметим, что теорема 3 допускает распространение на функции, инвариантные относительно поворота на угол $2\pi/s$, где $s = 3, 4, \ldots$, в духе работы [7]. Аналогичное замечание действует и в отношении остальных результатов раздела 4 настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов А. Ю. *Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. № 1. 2005. С. 31–36.
2. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. № 1. 2011. С. 3–28.
3. Попов А. Ю. *Развитие теоремы Валирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней* // СМФН. Т. 49. 2013. С. 132–164.
4. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. *О типе целой функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями на луче* // Итоги науки. Юг России. Серия Математический форум. Т. 4. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Владикавказ. Изд-во ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2010. С. 9–21.
5. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
6. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* М.: Физматлит, 2004.
7. Хабибуллин Б. Н. *Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции* // Матем. сборник. Т. 200. № 2. 2009. С. 129–158.
8. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
9. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Уфа: РИЦ БашГУ, 2006.
10. Boas R. P. *Entire functions.* New-York: Acad. Press, 1954.

Владимир Борисович Шерстюков,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com