

# НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С НЕСТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С.А. ИСХОКОВ, М.Г. ГАДОЕВ, И.А. ЯКУШЕВ

**Аннотация.** Для эллиптических операторов высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области  $n$ -мерного евклидова пространства  $R_n$  с нестепенным вырождением доказывается весовой аналог неравенства Гординга, и с помощью этого неравенства изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле, решение которой ищется в замыкание класса бесконечнодифференцируемых финитных функций. Вырождение коэффициентов оператора по разной независимой переменной характеризуется с помощью разных функций. Предполагается, что младшие коэффициенты оператора принадлежат некоторым весовым  $L_p$ -пространствам. Для одного класса эллиптических операторов со степенным вырождением в полупространстве изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями.

**Ключевые слова:** эллиптический оператор, нестепенное вырождение, неравенство Гординга, вариационная задача Дирихле.

**Mathematics Subject Classification:** 35J35, 35D05, 35J70, 46E35, 35J40

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1, 2]) известно, что неравенство Гординга [3] играет важную роль в исследовании разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических уравнений методами функционального анализа. Однако исследование краевых задач для эллиптических уравнений с вырождением методами функционального анализа, в основном, проводилось без использования неравенства Гординга (см., например, [4]–[10]). В случае дифференциальных операторов с вырождением, неравенство Гординга было доказано в работах [11, 12]. Эллиптические операторы, рассмотренные в [11], имеют специальный вид, заданы в ограниченной области  $\Omega^+$ , расположенной в полупространстве  $E_{n+1}^+ = \{(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y) : y > 0\}$  и прилегающей к гиперплоскости  $y = 0$ . В их определении вместо обычных операторов дифференцирования использовались операторы вида

$$\tilde{D}^{m+r} = D_x^m \tilde{D}_y^r, \quad D_x^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad \tilde{D}_y^r = y^r \frac{\partial^r}{(y \partial y)^r},$$

и вследствие этого вырождение имело место только на части  $\Gamma^0$  границы области  $\Omega^+$ , лежащей на гиперплоскости  $y = 0$ . Эллиптические операторы, рассмотренные в [12], заданы в произвольной (ограниченной или неограниченной) области и имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным.

---

S.A. ISKHOV, M.G. GADOEV, I.A. YAKUSHEV, GARDING INEQUALITY FOR HIGHER ORDER ELLIPTIC OPERATORS WITH A NON-POWER DEGENERATION AND ITS APPLICATIONS.

© Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. 2016.

Поступила 12 мая 2015 г.

В отличие от работ [11, 12], здесь рассматриваются общие эллиптические операторы высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

Часть результатов статьи в кратком виде без доказательства анонсирована в [13].

## 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Пусть  $R_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство и пусть  $\Pi(0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1, n}\}$  — единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки  $\xi \in R_n$  и любого вектора  $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$  с положительными компонентами определим параллелепипед  $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$  равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \dots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть  $\Omega$  — произвольное открытое множество в  $R_n$  и пусть  $g_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — определенные в  $\Omega$  положительные функции. Положим  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon, \vec{g}(\xi)}(\xi)$ , где  $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \dots, g_n(\xi))$ .

Далее в работе предполагается, что множество  $\Omega$  и функции  $g_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) связаны условием: существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\xi \in \Omega$  параллелепипед  $\Pi_{\varepsilon_0, \vec{g}}(\xi)$  содержится в  $\Omega$ . Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И. Лизоркина [14]. В [14] также рассмотрены примеры областей  $\Omega$  и положительных функций  $g_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), удовлетворяющих условию погружения.

Пусть  $\sigma(x)$  — определенная в  $\Omega$  положительная функция. Предположим, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существуют положительные числа  $\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$  такие, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \leq \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \leq \nu(\varepsilon), \quad \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \leq \frac{g_i(x)}{g_i(\xi)} \leq \lambda(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

для всех  $x \in \Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$  и всех  $\xi \in \Omega$ .

Класс положительных функций  $\sigma(x)$ ,  $x \in \Omega$ , удовлетворяющих условию (2.1), обозначим через  $\Phi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ .

Пусть  $1 \leq p < +\infty$  и  $r$  — натуральное число. Символом  $L_{p,r}^s(\Omega; \sigma, \vec{g})$ , где целое число  $s$  такое, что  $0 \leq s \leq r$ , обозначим класс функций  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , имеющих обобщенные по Соболеву производные  $u^{(k)}(x)$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  — мультииндекс,  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq r$ , с конечной полунормой

$$\|u; L_{p,r}^s(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=s} \int_{\Omega} (\sigma(x) g_1^{k_1-r}(x) g_2^{k_2-r}(x) \dots g_n^{k_n-r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом  $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$  — пространство функций  $u \in L_{p,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$  с конечной нормой

$$\|u; W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \|u; L_{p,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p + \|u; L_{p,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \quad (2.2)$$

Пространство  $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$  банахово с нормой (2.2), и в сделанных выше предположениях при всех  $p \in [1, \infty)$  и всех натуральных  $r$  множество  $C_0^\infty(\Omega)$  плотно в нем [10].

Символом  $L_p(\Omega; \sigma)$  обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u; L_p(\Omega; \sigma)\| = \left\{ \int_{\Omega} \sigma^p(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Для любого натурального числа  $m$  и любого  $\varepsilon > 0$  обозначим через  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(\xi)$  параллелепипед  $\Pi_{\varepsilon_m, \vec{g}}(\xi)$  при  $\varepsilon_m = m \cdot \varepsilon / (m + 1)$ . Заметим, что  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(\xi) \subset \Pi_{\varepsilon_0, \vec{g}}(\xi)$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , для любого натурального числа  $m$ .

Следующая лемма (см. лемму 2 работы [10]) является обобщением известной леммы Труази [15] на рассматриваемый случай и используется при выводе весовых интегральных неравенств из безвесовых.

**Лемма 2.1.** [10]. *В сделанных выше предположениях относительно области  $\Omega$  и положительных функций  $\sigma(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, n}$ , справедливо соотношение эквивалентности*

$$\int_{\Omega} (\sigma(\xi) \|u; L_p(\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi))\|)^p d\xi \asymp \int_{\Omega} (\sigma(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{1/p} |u(x)|)^p dx,$$

где символ  $\asymp$  означает наличие двусторонней оценки с некоторыми положительными константами.

**Лемма 2.2.** Пусть  $\chi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(x; \xi)$  — характеристическая функция параллелепипеда  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(\xi)$ . Тогда для любого натурального числа  $m$  и достаточно малого  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство

$$\left( \frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)} \right)^n \leq \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^n g_1^{-1}(x) g_2^{-1}(x) \dots g_n^{-1}(x) \int \chi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(x; \xi) d\xi \leq \left( \frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2} \right)^n, \quad (2.3)$$

где  $\lambda(\varepsilon)$  — такое же число как в условии (2.1).

*Доказательство.* Для произвольной фиксированной точки  $x \in \Omega$  вводим следующие обозначения

$$T_{\varepsilon, \vec{g}}(x) = \left\{ \xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2} g_i(\xi), i = \overline{1, n} \right\},$$

$$D_{\varepsilon, \vec{g}}(x) = \left\{ \xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2} g_i(x), i = \overline{1, n} \right\}.$$

Пусть  $\xi \in D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)-1, \vec{g}}(x)$ . Тогда из условия (2.1) следует, что  $|\xi_i - x_i| < \varepsilon \cdot g_i(x) / 2\lambda(\varepsilon) < \varepsilon g_i(\xi) / 2$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Следовательно,  $\xi \in T_{\varepsilon, \vec{g}}(x)$  и поэтому  $D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)-1, \vec{g}}(x) \subset T_{\varepsilon, \vec{g}}(x)$  для всех  $x \in \Omega$ . Аналогично в силу условия (2.1) доказываем, что  $T_{\varepsilon, \vec{g}}(x) \subset D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon), \vec{g}}(x)$  для всех  $x \in \Omega$ .

Пусть  $\chi_{\varepsilon, \vec{g}}(x, \xi)$  — характеристическая функция параллелепипеда  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ . Так как  $\int \chi_{\varepsilon, \vec{g}}(x, \xi) d\xi = |T_{\varepsilon, \vec{g}}(x)|$ , где правая часть обозначает объем параллелепипеда  $T_{\varepsilon, \vec{g}}(x)$ , то из доказанных выше включений следует, что

$$|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)-1, \vec{g}}(x)| \leq \int \chi_{\varepsilon, \vec{g}}(x, \xi) d\xi \leq |D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon), \vec{g}}(x)|.$$

Поэтому

$$\left( \frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)} \right)^n \leq g_1^{-1}(x) \cdot g_2^{-1}(x) \dots g_n^{-1}(x) \int \chi_{\varepsilon, \vec{g}}(x, \xi) d\xi \leq \left( \frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2} \right)^n.$$

Заменяя в этом неравенстве  $\varepsilon$  через  $\varepsilon_m = \varepsilon m / (m + 1)$ , получим (2.3).  $\square$

**Лемма 2.3.** Пусть целое число  $s$  такое, что  $0 \leq s < r$ . Пусть  $p \geq 1$ ,  $1 \leq q_1 \leq q_0$  и удовлетворяют условиям:

$$\frac{1}{p} - \frac{r-s}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \text{при} \quad n - (r-s)p > 0;$$

$q_0$  — любое конечное число при  $n - (r-s)p \leq 0$ .

Тогда для любого  $\tau > 0$  и всех  $v \in W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| v; L_{q_0, r}^s \left( \Omega; \sigma (g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}}, \vec{g} \right) \right\| \leq \\ & \leq \tau \left\| v; W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\| + c_1 \tau^{-\mu} \left\| v; L_{q_1}(\Omega; \sigma (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}}, \vec{g}) \right\|, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + sn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r - s)n^{-1}}. \quad (2.5)$$

*Доказательство.* В условиях этой леммы из интерполяционных неравенств для классических пространств Соболева (см. например, [16, §4.7]) следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| u^{(k)}; L_{q_0}(\Pi(0)) \right\| \leq \tau \sum_{|l|=r} \left\| u^{(l)}; L_p(\Pi(0)) \right\| + \\ & + \tau \left\| u; L_p(\Pi(0)) \right\| + c_1 \tau^{-\mu} \left\| u; L_{q_1}(\Pi(0)) \right\|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $k$  — любой мультииндекс длины  $s$ , и число  $\mu$  определяется равенством (2.5).

Неравенство (2.4) выводится из (2.6) применением леммы 2.1 и техникой, использованной при доказательстве леммы 2.2 работы [12].  $\square$

Аналогично лемме 2.3 доказывается, что если число  $s$  такое, что  $0 \leq s \leq r$ , и выполняются условия

$$1 \leq p \leq q_0 < +\infty, \quad r - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q_0} > 0,$$

то для всех  $v \in W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$  имеет место неравенство

$$\left\| v; L_{q_0, r}^s \left( \Omega; \sigma (g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}}, \vec{g} \right) \right\| \leq M \left\| v; W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g}) \right\|, \quad (2.7)$$

где число  $M > 0$  не зависит от функции  $v(x)$ .

**Лемма 2.4.** Пусть положительные функции  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  принадлежат классу  $\Phi_{\varepsilon, \vec{g}}(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  и  $r$ ,  $t$  — натуральные числа. Для мультииндексов  $k$ ,  $l$  таких, что  $|k| < r$ ,  $|l| \leq t$ , определим числа  $q_l$ ,  $\lambda_{kl}$ ,  $s_k$  посредством следующих соотношений

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{t - |l|}{n}, & n > q(t - |l|), \\ \varepsilon_1, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq 1/q, & n \leq q(t - |l|), \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r - |k|}{n}, \quad \text{при } n - p(r - |k|) > 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_2, \quad \text{где } 0 < \varepsilon_2 < 1/p, \quad \text{при } n - p(r - |k|) \leq 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{s_k} \geq \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \quad (2.11)$$

Пусть положительная функция  $\sigma_{kl}(x)$  принадлежит классу  $\Phi_{\varepsilon, \vec{g}}(\Omega)$  и удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \sigma_{kl}(x) \alpha^{-1}(x) \beta^{-1}(x) \leq \\ & \leq c g_1^{k_1 + l_1}(x) g_2^{k_2 + l_2}(x) \dots g_n^{k_n + l_n}(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-t + \frac{1}{q} - r + \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda_{kl}}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

для всех  $x \in \Omega$ ; положительное число  $c$  не зависит от  $x$ .

Тогда для любого  $\tau > 0$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| \leq \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\| \cdot \left\{ \left\| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \right\| + \right. \\ & \left. + c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha, (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{s_k}}) \right\| \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k|n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}} \quad (2.14)$$

и положительная постоянная  $c_0$  зависит только от  $n, p, r, |k|$ .

*Доказательство.* Пусть  $|k| < r$ ,  $|l| \leq t$ . Так как число  $q_l$ , определенное равенством (2.8), удовлетворяет условиям

$$1 \leq q \leq q_l < \infty, \quad t - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} > 0,$$

то, применяя неравенство (2.7), имеем

$$\begin{aligned} \left\| v^{(l)}; L_{q_l} \left( \Omega; \beta(x) g_1^{l_1}(x) g_2^{l_2}(x) \dots g_n^{l_n}(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-t + \frac{1}{q} - \frac{1}{q_l}} \right) \right\| &\leq \\ &\leq M \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g}) \right\|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $M$  – положительная константа не зависящая от  $v(x)$ .

Далее заметим, что при  $q_0 = p_k$ ,  $s = |k|$ ,  $q_1 = s_k$ , где  $p_k = (\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1})^{-1}$ , и числа  $q_l$ ,  $\lambda_{kl}$ ,  $s_k$  определены соотношениями (2.8) – (2.11), выполняются условия леммы 2.3. Поэтому, применяя лемму 2.3, в этом случае получим

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k)}; L_{p_k} \left( \Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}} \right) \right\| &\leq \tau \left\| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g}) \right\| + \\ &+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{s_k}}) \right\|, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k - p_k^{-1} + |k|n^{-1}}{p_k^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}}. \quad (2.17)$$

В силу равенства

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l} \quad (2.18)$$

и условия (2.12) с помощью неравенства Гельдера доказывается, что

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl}) \right\| &\leq \left\| v^{(l)}; L_{q_l} \left( \Omega; \beta g_1^{l_1} g_2^{l_2} \dots g_n^{l_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-t + \frac{1}{q} - \frac{1}{q_l}} \right) \right\| \times \\ &\times \left\| u^{(k)}; L_{p_k} \left( \Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}} \right) \right\|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теперь легко можно заметить, что из (2.15), (2.16), (2.19) следует неравенство (2.13). Равенство (2.14) следует из (2.17) в силу равенства (2.18).  $\square$

### 3. НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|l|} (p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x))^{(l)}, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

где

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \dots g_n^{-r+k_n}(x) \quad (3.2)$$

и  $a_{kl}(x)$  — комплекснозначные функции.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (3.1) методами функционального анализа связано со следующей полуторалинейной формой, порожденной этим оператором

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \quad (3.3)$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (3.3), ранее изучалась в работе С.А. Исхокова [10] в предположении, что коэффициенты  $a_{kl}(x)$  удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \bar{\zeta}_l \geq c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \quad (3.4)$$

для всех  $x \in \Omega$  и любого набора комплексных чисел  $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r}$ . Число  $c > 0$  не зависит от  $x, \zeta$ . Здесь в этом разделе вместо условия (3.4) мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|, |l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \bar{\xi}^l \geq c |\xi|^{2r} \quad (3.5)$$

для всех  $x \in \Omega, \xi \in R_n; \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}$ ,  $c$  — положительное число, не зависящее от  $x, \xi$ .

**Теорема 3.1.** Пусть коэффициенты  $a_{kl}(x)$  при  $|k| = |l| = r$  ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (3.5) и для любого достаточно малого числа  $\nu > 0$  существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu \quad (3.6)$$

для любого  $y \in \Omega$  и любого

$$z \in \Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y) = \left\{ z \in R_n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2} \varepsilon g_i(y), i = \overline{1, n} \right\}.$$

Пусть также коэффициенты  $a_{kl}(x)$  при  $|k|, |l| \leq r$  и  $|k| + |l| \leq 2r - 1$  принадлежат пространству  $L_{p_{kl}}(\Omega; (g_1 \cdot g_2 \dots g_n)^{-1/p_{kl}})$ , где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \leq r - 1, |l| \leq r \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r, |l| \leq r - 1, \end{cases}$$

а числа  $q_{kl}$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \leq \frac{n}{r - |l|}, & \text{если } n > 2(r - |k|), n > 2(r - |l|); \\ \frac{n}{r - |k| - \varepsilon_1 n} < q_{kl}, 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}, & \text{если } n > 2(r - |k|), n \leq 2(r - |l|); \\ q_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r - |l| + \varepsilon_2 n}, 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, & \text{если } n \leq 2(r - |k|), n > 2(r - |l|), \\ \text{любое конечное число } > 1, & \text{если } n \leq 2(r - |k|), n \leq 2(r - |l|). \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда существуют такие постоянные  $c_1 > 0$  и  $c_2 \geq 0$ , что

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq c_1 \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - c_2 \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \quad (3.7)$$

для всех  $u \in W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ .

*Доказательство.* В начале рассмотрим случай, когда полуторалинейная форма (3.3) не содержит младшие коэффициенты, то есть когда  $a_{kl}(x) \equiv 0$  ( $x \in \Omega$ ) для всех мультииндексов  $k, l$  таких, что  $|k|, |l| \leq r$  и  $|k| + |l| \leq 2r - 1$ .

Фиксируя произвольную точку  $y \in \Omega$ , рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_y[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{R_n} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad u, v \in C_0^\infty(R_n).$$

Применяя неравенство Гординга для сильно эллиптических операторов с постоянными коэффициентами, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{|k|=r} \int_{R_n} |u^{(k)}(x)|^2 dx \leq \\ & \leq M \left\{ \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int_{R_n} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx + \int_{R_n} |u(x)|^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

для всех  $u \in C_0^\infty(R_n)$ .

Вводим обозначение

$$\Pi_m(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n : |x_i| < \frac{m}{2(m+1)}, i = \overline{1, n} \right\},$$

где  $m$  — натуральное число.

Берем функцию  $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(\Pi_{2m}(0))$  со следующими свойствами:

1)  $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$  для всех  $x \in \Pi(0)$ ;

2)  $\varphi_m(x) = 1$  для всех  $x \in \Pi_m(0)$ ;

3) существует число  $c > 0$  такое, что  $|\varphi_m^{(k)}(x)| \leq c$  для всех  $x \in \Pi(0)$  и всех мультииндексов  $k : |k| \leq r$ .

Пусть  $u(x)$  — произвольная функция класса  $C^\infty(\Pi(0))$ . Продолжая функцию  $v_m(x) = u(x)\varphi_m(x)$  вне множества  $\Pi(0)$  нулем, получаем функцию  $v_m \in C_0^\infty(R_n)$ . Так как  $v_m(x) = u(x)$  для всех  $x \in \Pi_m(0)$ , то из неравенства (3.8) для функции  $v_m(x)$  следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int_{\Pi_m(0)} |u^{(k)}(x)|^2 dx \leq M_0 \left\{ \operatorname{Re} B_y[v_m, v_m] + \int_{\Pi(0)} |u(x)|^2 dx \right\}. \quad (3.9)$$

Форму  $B_y[v_m, v_m]$  представим в виде

$$B_y[v_m, v_m] = B_y^{(1)}[v_m, v_m] + B_y^{(2)}[v_m, v_m], \quad (3.10)$$

где

$$B_y^{(1)}[v_m, v_m] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Pi(0)} a_{kl}(y) \varphi_m^2(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx,$$

$$B_y^{(2)}[v_m, v_m] = B_y[v_m, v_m] - B_y^{(1)}[v_m, v_m].$$

Так как во всех интегралах, составляющих полуторалинейную форму  $B_y^{(2)}[v_m, v_m]$ , порядок хотя бы одной из производных  $u^{(k)}(x)$ ,  $u^{(l)}(x)$  не превосходит  $r - 1$ , то, применяя соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева без веса, а также неравенство Юнга с малым параметром, получаем: для любого достаточно малого числа  $\tau > 0$  существует конечное число  $M(\tau) > 0$  такое, что

$$|B_y^{(2)}[v_m, v_m]| \leq \tau \sum_{|k|=r} \int_{\Pi(0)} |u^{(k)}(x)|^2 dx + M(\tau) \int_{\Pi(0)} |u(x)|^2 dx. \quad (3.11)$$

Действительно, интегралы, составляющие форму  $B_y^{(2)}[v_m, v_m]$ , имеют следующий общий вид

$$I_{y,k,l,\mu,\nu}^{(m)}(u) = \int_{\Pi(0)} C_{k,\mu} C_{l,\nu} a_{kl}(y) \varphi_m^{(\mu)}(x) u^{(k-\mu)}(x) \varphi_m^{(\nu)}(x) \overline{u^{(l-\nu)}(x)} dx,$$

где  $|\mu| + |\nu| \neq 0$ , и в силу свойства 3) функций  $\varphi_m$  и ограниченности коэффициентов  $a_{kl}$ ,  $|k| = |l| = r$ , для них имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| I_{y,k,l,\mu,\nu}^{(m)}(u) \right| &\leq M_0 \int_{\Pi(0)} |u^{(k-\mu)}(x)| \cdot |u^{(l-\nu)}(x)| dx \leq \\ &\leq M_0 \|u^{(k-\mu)}; L_2(\Pi(0))\| \cdot \|u^{(l-\nu)}; L_2(\Pi(0))\|. \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Юнга

$$|ab| \leq \delta |a|^2 + \frac{1}{4\delta} |b|^2,$$

где  $\delta$  – достаточно малое положительное число, а также интерполяционное неравенство (2.6), можно показать, что  $\left| I_{y,k,l,\mu,\nu}^{(m)}(u) \right|$  не превосходит правую часть неравенства (3.11).

Учитывая свойство 2) функций  $\varphi_m(x)$ , представим форму  $B_y^{(1)}[v_m, v_m]$  в виде

$$B_y^{(1)}[v_m, v_m] = B_{y,m}^{(11)}[u, u] + B_{y,m}^{(12)}[u, u], \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} B_{y,m}^{(11)}[u, u] &= \sum_{|k|=|l|=r_{\Pi_m(0)}} \int a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx, \\ B_{y,m}^{(12)}[u, u] &= \sum_{|k|=|l|=r_{\Pi^{(m)}(0)}} \int a_{kl}(y) \varphi_m^2(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx, \end{aligned}$$

$$\Pi^{(m)}(0) = \Pi(0) \setminus \Pi_m(0) = \left\{ x \in R_n : \frac{m}{2(m+1)} < |x_i| < \frac{1}{2}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Так как коэффициенты  $a_{kl}$  ( $|k| = |l| = r$ ) ограничены, то, применяя неравенство Коши-Буняковского и принимая во внимание, что  $|\Pi^{(m)}(0)| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , получаем

$$|B_{y,m}^{(12)}[u, u]| \leq \mu_m \|u; L_2^r(\Pi(0))\|^2, \quad (3.13)$$

где

$$\|u; L_2^r(\Pi(0))\| = \left\{ \sum_{|k|=r_{\Pi(0)}} \int |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и положительные числа  $\mu_m$  стремятся к нулю при  $m \rightarrow \infty$ .

Из представлений (3.10), (3.12) в силу неравенства (3.9) имеем

$$\|u; L_2^r(\Pi_m(0))\|^2 - M_0 |B_y^{(2)}[v_m, v_m]| - M_0 |B_{y,m}^{(12)}[u, u]| \leq M_0 \operatorname{Re} B_{y,m}^{(11)}[u, u].$$

Далее, подбирая натуральное число  $m$  достаточно большим и применяя неравенство (3.11) при  $\tau = \frac{1}{m}$ , а также неравенство (3.13), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\|u; L_2^r(\Pi_m(0))\|^2 - \\ &- c_m \|u; L_2^r(\Pi(0))\|^2 - \mathbb{C}_m \|u; L_2(\Pi(0))\|^2 \leq M_0 \operatorname{Re} B_{y,m}^{(11)}[u, u] \end{aligned} \quad (3.14)$$

для всех  $u \in C^\infty(\Pi(0))$ , где  $c_m, \mathbb{C}_m$  – положительные числа, не зависящие от  $u(x)$  и  $c_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Пусть  $v$  – произвольная функция из класса  $C_0^\infty(\Omega)$  и  $y$  – произвольная фиксированная точка области  $\Omega$ . Отображение  $z \rightarrow x$ , определенное равенствами  $x_i = (z_i - y_i)/(\varepsilon g_i(y))$ ,  $i = \overline{1, n}$ , отображает параллелепипед  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y) = \{z \in R_n : |z_i - y_i| < \varepsilon g_i(y)/2\}$  в единичный куб  $\Pi(0)$ , а параллелепипед  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(y)$  – в  $\Pi_m(0)$ . При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  параллелепипед  $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)$  содержится в области  $\Omega$ , и поэтому функция  $\hat{v}_y(x) = v(x_i \varepsilon g_i(y) + y_i)$  определена для всех  $x \in \Pi(0)$  и принадлежит классу  $C^\infty(\Pi(0))$ .



Неравенство (3.14) для функции  $u(x) = \hat{v}_y(x)$  примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{|k|=r} \left\{ \int_{\Pi_m(0)} |\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2 dx - c_m \int_{\Pi(0)} |\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2 dx \right\} \varepsilon^{2r} g_1^{2k_1}(y) g_2^{2k_2}(y) \dots g_n^{2k_n}(y) - \\ - \mathbb{C}_m \int_{\Pi(0)} |\hat{v}_y(x)|^2 dx \leq M_0 \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \varepsilon^{2r} g_1^{k_1+l_1}(y) g_2^{k_2+l_2}(y) \dots g_n^{k_n+l_n}(y) \times \\ \times \int_{\Pi_m(0)} a_{kl}(y) \hat{v}_y^{(k)}(x) \overline{\hat{v}_y^{(l)}(x)} dx. \end{aligned}$$

В интегралах этого неравенства, переходя к новым переменным интегрирования  $z_i = x_i \varepsilon g_i(y) + y_i$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{|k|=r} \left\{ \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}^{(m)}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz - c_m \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right\} \varepsilon^{2r-n} g_1^{2k_1-1}(y) \times \\ \times g_2^{2k_2-1}(y) \dots g_n^{2k_n-1}(y) - \mathbb{C}_m \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}(y)} |v(z)|^2 dz \varepsilon^{-n} g_1^{-1}(y) g_2^{-1}(y) \dots g_n^{-1}(y) dz \leq \\ \leq M_0 \operatorname{Re} \left\{ \varepsilon^{2r-n} \sum_{|k|=|l|=r} g_1^{k_1+l_1-1}(y) g_2^{k_2+l_2-1}(y) \dots g_n^{k_n+l_n-1}(y) \times \right. \\ \left. \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}^{(m)}(y)} a_{kl}(y) v^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz \right\}. \end{aligned}$$

Обе части этого неравенства умножим на  $\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r}$ , и результат проинтегрируем по  $y \in \Omega$ . В итоге имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r} \varepsilon^{2r-n} \times \\ \times g_1^{2k_1-1}(y) g_2^{2k_2-1}(y) \dots g_n^{2k_n-1}(y) \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}^{(m)}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy - \\ - c_m \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r} \varepsilon^{2r-n} \times \\ \times g_1^{2k_1-1}(y) g_2^{2k_2-1}(y) \dots g_n^{2k_n-1}(y) \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy - \\ - \mathbb{C}_m \int_{\Omega} \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \varepsilon^{-n} \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \bar{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \leq \\ \leq M_0 \varepsilon^{2r-n} \operatorname{Re} B_{\varepsilon, m}[v, v], \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$B_{\varepsilon, m}[v, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \times \\ \times g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y) \dots g_n^{k_n+l_n}(y) \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(y)} a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz \right) dy. \quad (3.16)$$

Далее, применяя лемму 2.1 и неравенства (2.1), оценим интегралы в левой части неравенства (3.15). Для первого интеграла с помощью неравенств (2.1) имеем

$$\varepsilon^{2r-n} \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \times \\ \times g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y) \dots g_n^{2k_n}(y) \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \geq \\ \geq \varepsilon^{2r-n} \nu^{-2}(\varepsilon_m) \lambda^{-n}(\varepsilon_m) \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(z) (g_1(z)g_2(z) \dots g_n(z))^{-2r-1} \times \\ \times g_1^{2k_1}(z)g_2^{2k_2}(z) \dots g_n^{2k_n}(z) \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(z; y) dy \right) |v^{(k)}(z)|^2 dz,$$

где  $\varepsilon_m = m\varepsilon/(m+1)$ .

Далее, применяя лемму 2.1, получим

$$\varepsilon^{2r-n} \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \times \\ \times g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y) \dots g_n^{2k_n}(y) \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \geq \\ \geq \varepsilon^{2r} \nu^{-2}(\varepsilon_m) \lambda^{-2n}(\varepsilon_m) 2^{-n} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^{-n} \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2. \quad (3.17)$$

Теперь оценим второй интеграл в левой части неравенства (3.15). Применяя неравенства (2.1), имеем

$$\sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r} \varepsilon^{2r-n} g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y) \dots g_n^{2k_n-1}(y) \times \\ \times \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \leq \\ \leq \varepsilon^{2r-n} \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-n}(\varepsilon) \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(z) g_1^{2k_1-2r-1}(z)g_2^{2k_2-2r-1}(z) \dots g_n^{2k_n-2r-1}(z) |v^{(k)}(z)|^2 \times \\ \times \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon, \vec{g}}(z; y) dy \right) dz.$$

Далее, применяя лемму 2.1, получаем следующую окончательную оценку

$$\sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y)g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r} \varepsilon^{2r-n} g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y) \dots g_n^{2k_n-1}(y) \times$$

$$\times \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \leq \varepsilon^{2r} \nu^2(\varepsilon) 2^{-n} \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2. \quad (3.18)$$

Переходим к оценке третьего интеграла в левой части неравенства (3.15). Применяя неравенства (2.1), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \varepsilon^{-n} \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy &\leq \\ &\leq \varepsilon^{-n} \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-2rn-n}(\varepsilon) \times \\ &\times \int_{\Omega} \sigma^2(z) (g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z))^{-2r-1} |v(z)|^2 \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon, \vec{g}}(z; y) dy \right) dz. \end{aligned}$$

Теперь, для оценки внутреннего интеграла применяем лемму 2.1 и приходим к следующему неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma^2(y) (g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y))^{-2r-1} \varepsilon^{-n} \left( \int_{\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy &\leq \\ &\leq \nu^2(\varepsilon) \lambda^{-2rn}(\varepsilon) 2^{-n} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу полученных неравенств (3.17) – (3.19) из (3.15) следует, что

$$\begin{aligned} (1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - \tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon) \varepsilon^{-2r} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) \operatorname{Re} B_{\varepsilon, m}[v, v], \end{aligned} \quad (3.20)$$

где полуторалинейная форма  $B_{\varepsilon, m}[v, v]$  определена равенством (3.16) и

$$\begin{aligned} \tilde{c}_m &= c_m \nu^4(\varepsilon_m) \lambda^{2n}(\varepsilon_m) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n, \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon m}{m+1}, \\ \tilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon) &= \mathbb{C}_m \nu^4(\varepsilon) \lambda^{-2rn}(\varepsilon) \lambda^{2n}(\varepsilon_m) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n, \\ M_m(\varepsilon) &= M_0 \nu^2(\varepsilon_m) \lambda^{2n}(\varepsilon_m) 2^n \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вводим новую полуторалинейную форму

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon, m}^{(1)}[u, v] &= \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(z; y) a_{kl}(y) dy \right) \times \\ &\times (g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z))^{-1} p_k(z) p_l(z) u^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz, \end{aligned}$$

где функции  $p_k(z)$  определены равенством (3.2).

Учитывая ограниченности коэффициентов  $a_{kl}(x)$  при  $|k| = |l| = r$ , имеем

$$\begin{aligned} |B_{\varepsilon, m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon, m}[v, v]| &\leq \\ &\leq M \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(z; y) \left| 1 - \frac{p_k(y) p_l(y)}{p_k(z) p_l(z)} \cdot \frac{g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z)}{g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y)} \right| \times \right. \\ &\times p_k(z) p_l(z) (g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z))^{-1} |v^{(k)}(z)| |v^{(l)}(z)| dz \Big) dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В силу условия (2.1) для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  существует положительное число  $\mu_1(\varepsilon)$  такое, что

$$\left| 1 - \frac{p_k(y) p_l(y)}{p_k(z) p_l(z)} \cdot \frac{g_1(z) g_2(z) \dots g_n(z)}{g_1(y) g_2(y) \dots g_n(y)} \right| \leq \mu_1(\varepsilon) \quad (3.23)$$

для всех  $y, z \in \Omega$ , удовлетворяющих условию  $\chi_{\varepsilon, \vec{g}}^{(m)}(z; y) \neq 0$ ;  $\mu_1(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Учитывая это обстоятельство и применяя лемму 2.1, а также неравенство Коши-Буняковского из (3.22), получим

$$|B_{\varepsilon,m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon,m}[v, v]| \leq \varepsilon^n \mu_1(\varepsilon) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \quad (3.24)$$

для всех  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Рассмотрим новую полуторалинейную форму

$$B_{\varepsilon,m}^{(2)}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(z; y) dy \right) a_{kl}(z) p_k(z) p_l(z) \times \\ \times (g_1(z)g_2(z) \dots g_n(z))^{-1} u^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz, \quad (u, v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

В силу условия (3.6), леммы 2.1, действуя стандартным образом с помощью неравенства Коши-Буняковского, доказывается, что для любого достаточно малого положительного  $\nu$  существует число  $\varepsilon_\nu > 0$  такое, что

$$|B_{\varepsilon,m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v]| \leq \varepsilon^n \nu \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \quad (3.25)$$

для всех  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  и любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\nu)$ .

**Лемма 3.1.** Для любой вещественнозначной функции  $\Phi(z) \in L_1(\Omega)$  при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$c_{n,m} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(z; y) dy \right) (g_1(z)g_2(z) \dots g_n(z))^{-1} \Phi(z) dz \leq \\ \leq \lambda^n(\varepsilon_m) \varepsilon^n \int_{\Omega} \Phi(z) dz + \varepsilon^n [\lambda^n(\varepsilon_m) - \lambda^{-n}(\varepsilon_m)] \int_{\Omega} \Phi^-(z) dz, \quad (3.26)$$

где

$$\Phi^-(z) = (|\Phi(z)| - \Phi(z))/2, \quad c_{n,m} = 2^n \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n.$$

*Доказательство.* Определим также функцию  $\Phi^+(z) = (|\Phi(z)| + \Phi(z))/2$ . Заметим, что  $\Phi(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z)$  и функции  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$  неотрицательны.

В силу леммы 2.1 имеем

$$\varepsilon^n 2^{-n} \lambda^{-n}(\varepsilon_m) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} \leq (g_1(z)g_2(z) \dots g_n(z))^{-1} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(z; y) dy,$$

$$(g_1(z)g_2(z) \dots g_n(z))^{-1} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(z; y) dy \leq \varepsilon^n \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} 2^{-n} \lambda^n(\varepsilon_m).$$

Обе части первого неравенства умножим на  $\Phi^-(z)$ , а второе неравенство – на  $\Phi^+(z)$  и затем интегрируем по  $z \in \Omega$ . Из полученных неравенств на основе равенства  $\Phi(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z)$  получим (3.26).  $\square$

Применяя неравенство (3.26) при

$$\Phi(z) = \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(z) p_k(z) p_l(z) v^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)},$$

имеем

$$c_{n,m} \operatorname{Re} B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v] \leq \lambda^n(\varepsilon_m) \varepsilon^n \operatorname{Re} B[v, v] + \\ + \varepsilon^n [\lambda^n(\varepsilon_m) - \lambda^{-n}(\varepsilon_m)] \int_{\Omega} \Phi^-(z) dz. \quad (3.27)$$

Так как коэффициенты  $a_{kl}(z), |k| = |l| = r$ , ограничены, то

$$\int_{\Omega} \Phi^{-}(z) dz \leq \int_{\Omega} |\Phi(z)| dz \leq M \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} p_k(z) p_l(z) |v^{(k)}(z)| |v^{(l)}(z)| dz \leq \\ \leq M \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2.$$

Отсюда и из (3.27) следует, что

$$\operatorname{Re} B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v] \leq \varepsilon^n M \left\{ \operatorname{Re} B[v, v] + \mu_2(\varepsilon) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \right\}, \quad (3.28)$$

где  $M$  — положительное число, не зависящее от  $\varepsilon > 0$  и  $v(x)$ , и

$$\mu_2(\varepsilon) = \lambda^n(\varepsilon_m) - \lambda^{-n}(\varepsilon_m), \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon m}{m+1}. \quad (3.29)$$

Используя неравенство (3.20), имеем

$$(1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - \tilde{C}_m(\varepsilon) \varepsilon^{-2r} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \leq \\ \leq \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) \operatorname{Re} B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v] + \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) |B_{\varepsilon,m}[v, v] - B_{\varepsilon,m}^{(1)}[v, v]| + \\ + \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) |B_{\varepsilon,m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v]|.$$

Отсюда в силу неравенств (3.24), (3.25) следует, что

$$(1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - \tilde{C}_m(\varepsilon) \varepsilon^{-2r} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \leq \\ \leq \varepsilon^{-n} M_m(\varepsilon) \operatorname{Re} B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v] + \mu_1(\varepsilon) M_m(\varepsilon) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 + \\ + M_m(\varepsilon) \nu \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2.$$

Далее, применяя неравенство (3.28), имеем

$$(1 - \tilde{c}_m(\varepsilon)) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - \tilde{C}_m(\varepsilon) \varepsilon^{-2r} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \leq \\ \leq M_m(\varepsilon) M \left\{ \operatorname{Re} B[v, v] + \mu_2(\varepsilon) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \right\} + \\ + \mu_1(\varepsilon) M_m(\varepsilon) \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 + M_m(\varepsilon) \nu \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$[1 - \tilde{c}_m(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon) M_m(\varepsilon) M - \mu_1(\varepsilon) M_m(\varepsilon) - M_m(\varepsilon) \nu] \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - \\ - \tilde{C}_m(\varepsilon) \varepsilon^{-2r} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \leq M_m(\varepsilon) M \operatorname{Re} B[v, v], \quad (3.30)$$

где числа  $\tilde{c}_m(\varepsilon)$ ,  $\tilde{C}_m(\varepsilon)$ ,  $M_m(\varepsilon)$  такие же, как в (3.21),  $\mu_1(\varepsilon)$  — такое же, как в (3.23), а число  $\mu_2(\varepsilon)$  определено равенством (3.29).

Подбирая число  $m$  достаточно большим, а числа  $\varepsilon, \nu$  — достаточно малыми, из (3.30) получаем неравенство

$$\operatorname{Re} B[v, v] \geq c_3 \|v; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - c_4 \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \quad (3.31)$$

для всех  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ;  $c_3, c_4$  — положительные постоянные, не зависящие от  $v(x)$ .

Таким образом, неравенство Гординга для вырождающегося эллиптического оператора, ассоциированного с полуторалинейной формой  $B[u, v]$ , определенной равенством (3.3) в случае  $a_{kl} \equiv 0$  при  $|k| + |l| \leq 2r - 1$ , доказано.

Теперь перейдем к доказательству неравенства Гординга (3.7) в общем случае.

Положим

$$B_0[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad B_1[u, v] = B[u, v] - B_0[u, v].$$

Согласно вышедоказанному результату для полуторалинейной формы  $B_0[u, v]$  имеет место неравенство вида (3.31), то есть существуют числа  $c_5 > 0$ ,  $c_6 \geq 0$  такие, что

$$\operatorname{Re} B_0[u, u] \geq c_5 \|u; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - c_6 \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \quad (3.32)$$

для всех  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Полуторалинейную форму  $B_1[u, v]$  представим в виде

$$B_1[u, v] = B_{11}[u, v] + B_{12}[u, v], \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}[u, v] &= \sum_{|k| < r, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \\ B_{12}[u, v] &= \sum_{|k|=r, |l| < r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Используя неравенство Гельдера с показателями  $q_{kl}$ ,  $\lambda_{kl}$ , в силу условия

$$\|a_{kl}; L_{q_{kl}}(\Omega; (g_1 g_2 \dots g_n)^{-1/q_{kl}})\| < +\infty, \quad |k| + |l| \leq 2r - 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} |B_{11}[u, v]| &\leq \sum_{|k| < r, |l| \leq r} \int_{\Omega} (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-1/q_{kl}} |a_{kl}(x)| |\sigma_{kl}(x)| |u^{(k)}(x)| |v^{(l)}(x)| dx \leq \\ &\leq M_0 \sum_{|k| < r, |l| \leq r} \|u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\|. \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2.4 при  $p = q = 2$ , получим

$$|B_{11}[u, v]| \leq M \|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \left\{ \tau \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| + c_0 \tau^{-\mu} \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \right\}, \quad (3.35)$$

где  $\mu = \max_{|k| < r} \mu_k$  и числа  $\mu_k$  определяются равенством (2.14);  $\tau$  — достаточно малое положительное число.

Так как (см. (3.34)) полуторалинейная форма  $B_{12}[u, v]$  содержит  $u^{(k)}(x) v^{(l)}(x)$  при  $|l| < r$ ,  $|k| = r$ , то, меняя ролями  $u(x)$  и  $v(x)$ , и действуя так же, как в доказательстве неравенства (3.35), имеем

$$|B_{12}[u, v]| \leq M \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \left\{ \tau \|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| + c_0 \tau^{-\mu} \|v; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \right\}. \quad (3.36)$$

Используя неравенства (3.35), (3.36) при  $u(x) \equiv v(x)$  и равенство (3.33), получаем

$$|B_1[u, u]| \leq M \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \left\{ \tau \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| + c_0 \tau^{-\mu} \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \right\}. \quad (3.37)$$

Так как  $B[u, v] = B_0[u, v] + B_1[u, v]$ , то, используя неравенства (3.32), (3.37), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B[u, u] &\geq \operatorname{Re} B_0[u, u] - |B_1[u, u]| \geq \\ &\geq (c_5 - \tau) \|u; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - (\tau + c_0 \tau^{-2\mu} + c_6) \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2. \end{aligned}$$

Далее, фиксируя достаточно малое число  $\tau > 0$ , получим

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq c_7 \|u; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - c_8 \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2. \quad (3.38)$$

Так как

$$\|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \|u; L_{2,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 + \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \right\}^{1/2},$$

то из полученного неравенства (3.38) следует неравенство (3.7).  $\square$

Теорема 3.1 доказана.

#### 4. О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С НЕСТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

В этом разделе сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле, который доказывается с помощью полученного выше неравенства Гординга и обобщенной теоремы Лакса-Мильграма (см., например, [8]).

Пусть  $(W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$  – пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на  $W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ , наделенное нормой сопряженного пространства.

Рассмотрим следующую вариационную задачу Дирихле, связанную с полуторалинейной формой (3.3).

**Задача  $D_\lambda$ .** Для заданного функционала  $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$  требуется найти решение  $U(x)$  уравнения

$$B[U, v] + \int_{\Omega} \sigma^2(x) (g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x))^{-2r} U(x)\overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle, v \in C_0^\infty(\Omega), \quad (4.1)$$

принадлежащее пространству  $W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ .

Заметим, что в случае достаточной гладкости коэффициентов  $a_{kl}(x)$  и правой части  $F$  уравнения (4.1), решение  $U(x)$  задачи  $D_\lambda$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(AU)(x) + \lambda \sigma^2(x) (g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x))^{-2r} U(x) = F(x), x \in \Omega,$$

где  $A$  такой же дифференциальный оператор как в (3.1).

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда существует число  $\lambda_0 \geq 0$  такое, что при  $\lambda > \lambda_0$  для любого заданного функционала  $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$  задача  $D_\lambda$  имеет единственное решение  $U(x)$ , и при этом выполняется оценка

$$\|U; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| \leq M \|F; (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'\|,$$

где положительное число  $M$  не зависит от  $F$ .

#### 5. О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В силу плотности класса  $C_0^\infty(\Omega)$  в  $W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$  теорема 2 позволяет установить разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для конкретных видов областей  $\Omega \subset R_n$  (например, ограниченные области, дополнения к ограниченным областям, полупространство и т.д.), а для изучения разрешимости таких задач с неоднородными граничными условиями требуется предварительно доказать теорему вложения разных метрик для соответствующих весовых пространств, элементы которых, в общем случае, не аппроксимируются с помощью функций из класса  $C_0^\infty(\Omega)$ . В этом разделе без доказательства сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса эллиптических операторов в полупространстве со степенным вырождением.

Пусть  $R_n^+ = \{x | x = (x', x_n) \in R_n, x_n > 0\}$  и пусть функция  $\varphi(t) \in C^\infty(R_1^+)$  такая, что  $0 \leq \varphi(t) \leq 1$  для любого  $t \in [\frac{1}{2}; 1]$  и  $\varphi(t) \equiv 0$ , когда  $t \geq 1$ ;  $\varphi(t) = 1$  для любого  $t \in [0; \frac{1}{2}]$ . Для любых двух вещественных чисел  $\alpha, \beta$  определим функцию

$$\sigma_{\alpha, \beta}(t) = \varphi(t)t^{-\alpha} + (1 - \varphi(t))t^\beta \quad (t > 0).$$

Обозначим через  $W_{p; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)$  пространство функций  $u(x)$  ( $x \in R_n^+$ ) с конечной нормой

$$\|u; W_{p; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)\| = \{\|u; L_{p; \alpha, \beta}^r(R_n^+)\|^p + \|u; L_{p; \alpha, \gamma}^0(R_n^+)\|^p\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L_{p;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пусть  $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$  множество бесконечно дифференцируемых функций в  $R_n^+$  финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях  $x_n$ . Символами  $\overset{\circ}{W}_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$ ,  $\widetilde{W}_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  обозначим замыкания классов  $C_0^\infty(R_n^+)$  и  $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$  в пространстве  $W_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$ , соответственно.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{R_n^+} \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \quad (5.1)$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

**Задача D.** Для заданного функционала  $F \in \left(\overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\right)'$  и заданного элемента  $\Psi(x) \in \widetilde{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  требуется найти решение  $U(x) \in \widetilde{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  уравнения

$$\mathbb{B}[U, v] = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in C_0^\infty(R_n^+),$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+). \quad (5.2)$$

Предположим, что коэффициенты  $a_{kl}(x)$  полуторалинейной формы (5.1) удовлетворяют условиям:

I) при  $|k| = |l| = r$  коэффициенты  $a_{kl}(x)$  ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \bar{\xi}^l \geq c |\xi|^{2r}$$

для всех  $x \in R_n^+$ ,  $\xi \in R_n$  ( $c$  — положительное число, не зависящее от  $x, \xi$ ), и для любого достаточно малого  $\nu > 0$  существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(y)| < \nu$$

для всех  $x, y \in R_n^+$  таких, что

$$|x_i - y_i| < \frac{1}{2} \varepsilon y_n, \quad i = \overline{1, n};$$

II) при  $|k| + |l| \leq 2r - 1$  коэффициенты  $a_{kl}$  принадлежат пространству  $L_{p_{kl}}(R_n^+; \sigma_{\alpha_{kl}, \beta_{kl}}(x_n))$ , где числа  $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, p_{kl}$  определяются соотношениями:

а) если  $|k| < r, |l| < r$ , то

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= -\frac{n}{2} + \frac{n}{p_{kl}} + n\delta_k - r + |l|, \\ \beta_{kl} &= 2r - |k| - |l| - (n-1)\delta_k + \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}}, \\ \frac{1}{p_{kl}} &= 1 - \delta_k - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+, \end{aligned}$$

где числа  $\delta_k, \varepsilon_l$  из интервала  $(0, 1/2)$  удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{1}{2} - \delta_k - \varepsilon_l < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{r-|k|}{n} \right\}$$

и  $(\theta)_+ = \theta$ , если  $\theta > 0$ , и  $(\theta)_+ = 0$  в противном случае;



б) если  $|k| = r$ ,  $|l| \leq r - 1$ , то

$$\begin{aligned}\alpha_{kl} &= \frac{n}{p_{kl}} - r + |l|, \\ \beta_{kl} &= -\frac{p_{kl}}{n} + r - |l|, \\ \frac{1}{p_{kl}} &= \frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \left( \frac{1}{2} - \frac{r - |l|}{n} \right)_+, \end{aligned}$$

а  $\varepsilon_0$  — достаточно малое положительное число;

в) если  $|k| \leq r - 1$ ,  $|l| = r$ , то

$$\begin{aligned}\alpha_{kl} &= \frac{1}{2} - \delta_k, \\ \beta_{kl} &= r - |k| - \frac{1}{2} + \delta_k, \\ \frac{1}{p_{kl}} &= \frac{1}{2} - \delta_k. \end{aligned}$$

В этих условиях число  $\delta_k$  такое, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \delta_k < \frac{1}{2}.$$

**Теорема 5.1.** Пусть выполнены условия I), II) и пусть существует такое положительное число  $c_0$ , что

$$c_0 \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha, \beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|)^2 dx \leq \operatorname{Re} \mathbb{B}[v, v]$$

для всех  $v \in C_0^\infty(R_n^+)$ .

Пусть также

$$\alpha < -\frac{1}{2}, \quad -\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \dots, r\}, \quad \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \dots, r\}, \quad \beta - r \geq \gamma.$$

Тогда для любого заданного функционала  $F \in \left( \overset{\circ}{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+) \right)'$  и любого заданного элемента  $\Psi \in \widetilde{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)$  задача  $D$  имеет единственное решение  $U(x)$  и при этом выполняется оценка

$$\|U; W_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)\| \leq M \left\{ \left\| F; \left( \overset{\circ}{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+) \right)' \right\| + \|\Psi; W_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)\| \right\},$$

где число  $M$  не зависит от  $F$  и  $\Psi$ .

*Замечание 5.1.* Условие (5.2) означает, что на гиперплоскости  $x_n = 0$  решение  $U(x)$  задачи  $D$  имеет такие же следы, как и заданная функция  $\Psi(x)$ . При дополнительных ограничениях на параметры  $\alpha, \beta, \gamma$ , так же, как в работе [9], можно выписать граничные условия на гиперплоскости  $x_n = 0$  в явном виде.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. *Функциональный анализ*. М.: Мир, 1967. 624 с.
2. Егоров Ю.В. *Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы*. М.: Изд-во МГУ, 1985. 166 с.
3. L. Garding *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* // Math. Scand. 1953. Bd.1, No. 1. P. 55-72.
4. Кудрявцев Л.Д. *Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1959. Т. 55. С. 1-182.

5. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1981. Т.157. С.90-118.
6. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 157-183.
7. Мирошин Н.В. *Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 3. С. 455-464.
8. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия Вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4-30.
9. Исохов С.А. *О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 641-653.
10. Исохов С.А. *О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением* // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536-542.
11. Киприянов И.А. *О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1969. Т. 105. С. 77-88.
12. Исохов С.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 2. С. 201-216.
13. Исохов С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением* // Доклады РАН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286-289.
14. Лизоркин П.И. *Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых  $L_p$ -нормах* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т.156. С. 130-142.
15. M. Troizi *Theoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso* // Ric. mat. 1969. No. 18. P. 49-74.
16. V.I. Burenkov *Sobolev Spaces on Domains*. Teubner-Texte Math. V. 137. B.G.Teubner, Stuttgart. 1998. 312 p.

Сулаймон Абунасович Исохов,  
 Институт математики им. А. Джураева АН РТ,  
 ул. Айни, 299/4,  
 734063, г. Душанбе, Таджикистан  
 Мирнинский политехнический институт  
 (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,  
 678170, г. Мирный, Россия  
 E-mail: sulaimon@mail.ru

Махмадрахим Гафурович Гадоев,  
 Мирнинский политехнический институт  
 (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,  
 ул. Тихонова, 5/1,  
 678170, г. Мирный, Россия  
 E-mail: gadoev@crambler.ru

Илья Анатольевич Якушев,  
 Мирнинский политехнический институт  
 (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,  
 ул. Тихонова, 5/1,  
 678170, г. Мирный, Россия  
 E-mail: yakushevilya@mail.ru