ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 22-37.

УДК 517.968

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. АСХАБОВ

Аннотация. Методом монотонных операторов устанавливаются глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в вещественных пространствах 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$.

Ключевые слова: нелинейное уравнение типа свертки, монотонный оператор, потенциальный оператор.

Mathematics Subject Classification: 45G10, 47H05

1. Введение

Многие задачи современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям типа свертки. Например, общий класс нелинейных сервомеханизмов (следящих систем) описывается [1] нелинейным интегральным уравнением типа свертки вида

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot F[t, u(t)]\, dt = f(x)\,, \tag{1}$$

где $f(x)$ есть входной сигнал, а $h(x)$ — ответный импульс системы. Уравнение (1) возникает также [2] в теории электрических сетей (сигнальной трансмиссии через общую электрическую сеть), содержащих нелинейные элементы (нелинейный резистр). При $f(x)=0$ уравнение вида (1) описывает [3], [4] детерменистические модели пространственного распространения эпидемии или благоприятного гена среди популяции вдоль линии с различными нелинейностями в эпидемической и генетической моделях, а также используется как математическая модель некоторых инфекционных заболеваний или как уравнение роста некоторых видов популяции.

Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью возникают [5], [6] в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [7], а также при описании динамики открытой p-адической струны для скалярного поля тахионов [8]–[10].

Информацию о других приложениях нелинейных интегральных уравнений типа свертки можно найти в монографии [11].

В данной работе, используя новый подход, методом монотонных операторов [12]–[14] устанавливаются глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для различных классов нелинейных уравнений типа свертки в вещественных пространствах 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$ при любых значениях $p \in (1,\infty)$ (см.

S.N. Askhabov, Periodic solutions of convolution type equations with monotone nonlinearity.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00422-а).

Поступила 5 июля 2015 г.

[16]). Ранее подобные результаты в случае пространств $L_p(-\infty,\infty)$ были доказаны в [11], в зависимости от рассматриваемого класса уравнений, либо только при $p \in (1,2]$, либо только при $p \in [2,\infty)$ (по сути дела, это было связано с тем, что согласно неравенству Юнга [11, с. 30], оператор свертки действует из пространства $L_p(-\infty,\infty)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\infty,\infty)$, $p' = p/(p-1)$, лишь при $p \in (1,2]$). В рассматриваемом здесь случае пространств $L_p(-\pi,\pi)$, используя неравенство Юнга при $p \in (1,2]$ и вложения $L_p(-\pi,\pi) \subset L_2(-\pi,\pi) \subset L_{p'}(-\pi,\pi)$ при $p \in [2,\infty)$, показано, что оператор свертки действует непрерывно из пространства $L_p(-\pi,\pi)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\pi,\pi)$ при любых значениях $p \in (1,\infty)$ и положителен, что позволило доказать теоремы существования и единственности решения для всех рассматриваемых уравнений без дополнительных ограничений на p. Кроме того, в случае монотонных (не степенных) нелинейностей общего вида, комбинированием принципов Банаха-Каччиополи и Браудера-Минти, показано, что решения этих уравнений в рамках пространства $L_2(-\pi,\pi)$ могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа (ср. [17]), а в случае степенных нелинейностей вида u^{p-1}, используя теорию потенциальных монотонных операторов, доказано, что решения могут быть найдены методом наискорейшего спуска (градиентным методом) в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$ при любом четном $p > 2$ (ср. [18]).

Для удобства ссылок, приведем основные определения и вспомогательные утверждения, используемые в данной работе, придерживаясь терминологии и обозначений, принятых в монографии [14].

Пусть X — вещественное банахово пространство и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в X и X^*, соответственно.

Определение 1. *Пусть $u, v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:*

монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$;

строго монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$;

сильно монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq m \cdot \|u - v\|^2$, $m > 0$;

равномерно монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \beta(\|u - v\|)$, где β — возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$;

коэрцитивным, если $\langle Au, u\rangle \geq \gamma(\|u\|) \cdot \|u\|$, где $\gamma(s)$ — вещественная функция неотрицательного аргумента такая, что $\gamma(s) \to \infty$ при $s \to \infty$;

липшиц-непрерывным, если $\|Au - Av\|_* \leqslant M \cdot \|u - v\|$, $M > 0$;

ограниченно липшиц-непрерывным, если $\|Au - Av\|_* \leqslant \mu(r) \cdot \|u - v\|$, где μ — возрастающая на $[0,\infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|, \|v\|)$;

хеминепрерывным, если функция $s \to \langle A(u + s \cdot v), w\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при любых фиксированных $u, v, w \in X$.

Основная теорема теории монотонных операторов (см, например, [14]) – теорема (принцип) Браудера-Минти – сохраняется, если вместо условия коэрцитивности предположить, что оператор $A : X \to X^*$ удовлетворяет условию: $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} = \infty$.

Если A — *линейный* оператор, то определение монотонного, строго монотонного и сильно монотонного оператора совпадает, соответственно, с определением *положительного, строго положительного* и *сильно положительного* (*положительно определенного*) оператора [14].

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, — произвольный (не обязательно линейный) функционал.

Определение 2. *Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемым по Гато, если существует оператор $A : X \to X^*$ такой, что для всех $u, v \in X$ выполняется равенство* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(u+t\cdot v)-f(u)}{t} = \langle Au, v\rangle$. *При этом оператор A называют градиентом функционала f* и *пишут $A = grad\, f$.*

Определение 3. *Оператор $A : X \to X^*$ называется потенциальным, если существует функционал $f : X \to \mathbb{R}$ такой, что оператор A является его градиентом. При этом функционал f называют потенциалом оператора A.*

Пример 1 [14]. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — линейный ограниченный симметрический оператор, т. е. $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, $\forall u, v \in X$. Тогда A является потенциальным оператором, и его потенциал $f(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle$.

2. О положительности и потенциальности оператора свертки

Рассмотрим в пространстве Лебега $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, состоящем из вещественных 2π-периодических функций, интегральный оператор свертки

$$(Hu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt,$$

где ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ есть $2\,\pi$-периодически продолженная на отрезок $[-2\,\pi, 2\,\pi]$ функция.

Для выяснения вопроса о том, при каких условиях на ядро $h(x)$ оператор свертки H является положительным в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, введем дискретное преобразование Фурье (изображение) последовательности комплексных чисел $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$:

$$a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{i\,k\,x}, \quad \text{где } \ a_k = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\, e^{-i\,k\,x} dx\,.$$

Нам понадобятся следующие два равенства

формула свертки изображений [21, с. 233]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x-t)\, b(t)\, dt = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_k\, e^{i\,k\,x},$$

обобщенное равенство Парсеваля [22, с. 158]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\, \overline{b(x)}\, dx = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \overline{b_k}\,,$$

где $b(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, e^{i\,k\,x}$, $\quad b_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} b(x)\, e^{-i\,k\,x} dx.$

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнены условия:*

$$\begin{cases} h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi), \text{ если } 1 < p \leqslant 2, \\ h(x) \in L_1(-\pi,\pi), \quad \text{ если } 2 < p < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

$$h_c(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\, cos(k \cdot t)\, dt \geq 0 \quad \text{при } k = 0, 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{3}$$

Тогда оператор свертки H *действует непрерывно из пространства* $L_p(-\pi,\pi)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(-\pi,\pi)$, $p' = p/(p-1)$, *и положителен, причем* $\forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *выполняются неравенства:*

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant c_{p,h} \cdot \|u\|_p\,, \tag{4}$$

$$\langle Hu, u\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt \right) u(x)\, dx \geq 0,$$

где

$$c_{p,h} = \begin{cases} 2\pi \cdot \|h\|_{p'/2}, \text{ если } 1 < p \leqslant 2, \\ (2\pi)^{2/p'} \|h\|_1, \quad \text{ если } 2 < p < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ – произвольная функция. Так как $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi)$, то из неравенства Юнга [23, с. 67] непосредственно вытекает, что

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant 2\,\pi\, \|h\|_{p'/2} \|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi),\ 1 < p \leqslant 2\,. \tag{6}$$

Пусть теперь $2 < p < \infty$. Тогда имеют место непрерывные вложения $L_p(-\pi,\pi) \subset L_2(-\pi,\pi) \subset L_{p'}(-\pi,\pi)$, причем, в силу неравенства Гельдера, выполняются неравенства

$$\|u\|_{p'} \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)} \|u\|_2\,, \quad \forall u(x) \in L_2(-\pi,\pi)\,,$$

$$\|u\|_2 \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)} \|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi).$$

Используя последние два неравенства, а также неравенство (6) при $p = p' = 2$, имеем

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)} \|Hu\|_2 \leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)} 2\pi \cdot \|h\|_1 \cdot \|u\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{(p-2)/(2p)} 2\pi \cdot (2\pi)^{(p-2)/(2p)} \|h\|_1 \cdot \|u\|_p = (2\pi)^{2(p-1)/p} \|h\|_1 \cdot \|u\|_p\,,$$

т.е.

$$\|Hu\|_{p'} \leqslant (2\pi)^{2/p'} \|h\|_1 \cdot \|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi),\ 2 < p < \infty\,. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) непосредственно вытекает, что оператор H действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ при любом $p \in (1,\infty)$, причем справедливо неравенство (4).

Докажем положительность оператора H. В силу формулы свертки изображений, имеем $(Hu)(x) = 2\,\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot u_k \cdot e^{i\,k\,x}$, где

$$h_k = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot e^{-i\,k\,x} dx\ , \qquad u_k = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot e^{-i\,k\,x} dx\ .$$

Значит,

$$2\,\pi \cdot h_k \cdot u_k = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (Hu)(x) \cdot e^{-i\,k\,x} dx\ .$$

Поэтому, используя обобщенное равенство Парсеваля, с учетом, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, имеем

$$\langle Hu, u\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (Hu)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx = 2\,\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\,\pi\cdot h_k\cdot u_k\cdot\overline{u_k} =$$

$$= (2\,\pi)^2\cdot\left(h_0\cdot|u_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} h_k\cdot|u_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k\cdot|u_k|^2\right) =$$

$$= (2\,\pi)^2\cdot\left(h_0\cdot|u_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[h_{-k}\cdot|u_{-k}|^2 + h_k\cdot|u_k|^2\Big]\right). \quad (8)$$

Замечая теперь, что

$$|u_{-k}|^2 = u_{-k}\cdot\overline{u_{-k}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\left(\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(t)\cdot e^{-ikt}dt\right) = \overline{u_k}\cdot u_k = |u_k|^2\,,$$

$$h_k + h_{-k} = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\left[e^{ikt} + e^{-ikt}\right]\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}h_c(k),$$

из равенства (8) получаем

$$\langle Hu, u\rangle = (2\,\pi)^2\left(\frac{1}{2\,\pi}\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,h_c(k)\cdot|u_k|^2\right) =$$

$$= 2\,\pi\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2 + 4\,\pi\sum_{k=1}^{\infty} h_c(k)\cdot|u_k|^2\,. \quad (9)$$

Из формулы (2) видно, что оператор свертки H является положительным, если $h_c(k)\geq 0$, т.е. если выполнено условие (3). □

Аналогично доказывается следующая лемма, двойственная лемме 1.

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$,

$$\begin{cases} h(x)\in L_1(-\pi,\pi), & \text{если } 1 < p\leqslant 2,\\ h(x)\in L_{p/2}(-\pi,\pi), & \text{если } 2 < p < \infty\end{cases} \quad (10)$$

и выполнено условие (3). *Тогда оператор свертки* H *действует непрерывно из* $L_{p'}(-\pi,\pi)$ *в* $L_p(-\pi,\pi)$, $p' = p/(p-1)$, *и положителен, причем*

$$\|Hu\|_p\leqslant c^*_{p,h}\cdot\|u\|_{p'}\,,\quad \forall u(x)\in L_{p'}(-\pi,\pi)\,,$$

где

$$c^*_{p,h} = \begin{cases} (2\pi)^{2/p}\cdot\|h\|_1, & \text{если } 1 < p\leqslant 2,\\ 2\pi\|h\|_{p/2}, & \text{если } 2 < p < \infty.\end{cases}$$

Замечание 1. Если в леммах 1 и 2 дополнительно предположить, что ядро $h(x)$ есть четная функция, то оператор свертки H будет потенциальным. В самом деле, в случае четного ядра $h(x)$ оператор H является симметрическим и, следовательно, на основании примера 1, потенциален.

3. Теоремы существования и единственности

Всюду далее предполагается, что заданная функция $F(x,u)$, порождающая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in [-\pi,\pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори [15, с. 15]: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u почти для всех x. Обозначим через $L_p^+(-\pi,\pi)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$, а через F оператор суперпозиции (оператор Немыцкого), порождаемый функцией $F(x,u)$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, ядро $h(x)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), а нелинейность $F(x,u)$ для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:*

3.1) $|F(x,u)| \leqslant c(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L_{p'}^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;

3.2) $F(x,u)$ *не убывает по u почти при каждом x;*

3.3) $F(x,u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$.

Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ уравнение

$$\lambda \cdot F[x,u(x)] + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt = f(x) \tag{11}$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Это решение единственно, если в условии 3.2) функция $F(x,u)$ строго возрастает по u. Кроме того, если условие 3.3) выполнено при $D(x) = 0$, то $\|u^*\|_p \leqslant \left(\lambda^{-1} \cdot d_2^{-1}\, \|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Запишем данное уравнение (11) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda \cdot Fu + Hu$. В силу леммы 1 и условий 3.1)–3.3) получаем, что оператор A действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является монотонным и коэрцитивным. При этом оператор A является строго монотонным, если функция $F(x,u)$ строго возрастает по u. Поэтому утверждения о существовании и единственности решения вытекают из теоремы (принципа) Браудера-Минти (см., например, [14]) – основной теоремы теории монотонных операторов. Наконец, используя условие 3.3) при $D(x) = 0$, положительность оператора H и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda \cdot d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \lambda \cdot \langle Fu^*, u^* \rangle \leqslant \lambda \cdot \langle Fu^*, u^* \rangle + \langle Hu^*, u^* \rangle =$$
$$= \langle Au^*, u^* \rangle = \langle f, u^* \rangle \leqslant \|f\|_{p'} \|u\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка для нормы решения. □

Следствие 1. *Пусть $p \geq 2$ – любое четное число, ядро $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию (3). Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ при любом $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$, причем $\|u^*\|_p \leqslant \|f\|_{p'}^{1/(p-1)}$.

В следующей теореме существование и единственность решения рассматриваемого уравнения типа Гаммерштейна устанавливаются без требования коэрцитивности нелинейности.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ при $1 < p \leqslant 2$ и $h(x) \in L_{p/2}(-\pi,\pi)$ при $2 < p < \infty$. Если ядро $h(x)$ удовлетворяет условию (3), а нелинейность $F(x,u)$ удовлетворяет условиям 3.1) и 3.2) теоремы 1, то уравнение*

$$u(x) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, F[t,u(t)]\, dt = f(x) \tag{12}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *при любом* $\lambda \geq 0$ *и любом* $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. *Кроме того, если выполнены условия 3.1) и 3.3) при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (12) в операторном виде: $u + \lambda \cdot HFu = f$. Из условий 3.1) и 3.2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является монотонным, а из леммы 2 вытекает, что оператор H действует непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ обратно в $L_p(-\pi,\pi)$ и положителен. Но тогда, по теореме 3 из [19] (см. ниже замечание 2), данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Используя условия 3.1) и 3.3) при $c(x) = D(x) = 0$, положительность оператора свертки H и равенство $u^* + \lambda \cdot HFu^* = f$, имеем

$$d_2\|u^*\|_p^p \leqslant \langle u^*, Fu^*\rangle + \lambda\langle HFu^*, Fu^*\rangle =$$
$$= \langle f, Fu^*\rangle \leqslant \|f\|_p\|Fu^*\|_{p'} \leqslant d_1\|f\|_p\|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следствие 2. *Пусть* $p \geq 2$ *– любое четное число, ядро* $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда уравнение*

$$u(x) + \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u^{p-1}(t)\, dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ *при любом* $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, *причем* $\|u^*\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 в части существования и единственности решения основано на теореме 3 из [19]. Важно отметить, что в этой теореме 3, относящейся к уравнениям Гаммерштейна вида

$$u(x) + \int\limits_a^b K(x,s)\, F[s,u(s)]\, ds = f(x),$$

нелинейность $F(x,u)$ должна *не убывать* по u (в [19] предполагается, что нелинейность $F(x,u)$ *не возрастает* по u). Это следует из работы [20] этих же авторов, в которой приведено доказательство теоремы 3 из [19]. Более того, пример уравнения

$$u(x) - w(x)\int\limits_a^b w(s)\, u^{1/3}(s)\, ds = 0$$

с убывающей нелинейностью $F(s,u) = -u^{1/3}$ и вырожденным ядром $K(x,s) = w(x)\cdot w(s)$ с $w(x) \in L_{4/3}(a,b)$, имеющего два различных решения $u_1(x) = 0$ и $u_2(x) = w(x)\left(\int\limits_a^b w^{4/3}(s)\, ds\right)^{3/2}$ в пространстве $L_{4/3}(a,b)$, показывает, что утверждение о единственности решения в теореме 3 из [19] не выполняется.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение, в которое оператор свертки H входит нелинейно. В этом случае, в отличие от теорем 1 и 2, на нелинейность $F(x,u)$ накладываются условия, обеспечивающие действие оператора Немыцкого F из сопряженного пространства $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в исходное пространство $L_p(-\pi,\pi)$, в котором ищутся решения, а также его непрерывность, строгую монотонность и коэрцитивность. Важную роль при исследовании такого уравнения играют существование, строгая монотонность и коэрцитивность обратного оператора F^{-1}.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$, ядро $h(x)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), а нелинейность $F(x,u)$ для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:*

3.4) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3|u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;

3.5) $F(x,u)$ *строго возрастает по u почти при каждом x;*

3.6) $F(x,u)\cdot u \geq d_4|u|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4 > 0$.

Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt\right] = f(x) \tag{13}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Кроме того, если в условиях 3.4) и 3.6) $g(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \leqslant \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot c_{p,h} \cdot \|f\|_p\right]^{1/(p-1)},$$

где константа $c_{p,h}$ определена в (5).

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. В силу леммы 1, оператор H действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, непрерывен и положителен. Из условий 3.4)-3.6) вытекает, что оператор F действует обратно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по лемме 2.1 из [11], оператор F имеет обратный F^{-1}, который действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, хеминепрерывен и строго монотонен, причем $\lim\limits_{\|v\|_p\to\infty} \langle F^{-1}v, v\rangle \cdot \|v\|_p^{-1} = \infty$. Запишем уравнение (13) в операторном виде: $u + \lambda \cdot FHu = f$. Полагая в нем $f - u = \lambda \cdot v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения обратный оператор F^{-1}, приходим к уравнению

$$\Phi v = Hf, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1}v + \lambda \cdot Hv. \tag{14}$$

В силу указанных свойств операторов F^{-1} и H, оператор Φ действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, хеминепрерывен и строго монотонен, причем

$$\frac{\langle \Phi v, v\rangle}{\|v\|_p} \geq \frac{\langle F^{-1}v, v\rangle}{\|v\|_p} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_p \to \infty.$$

Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение (14) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Но тогда уравнение (13) имеет решение $u^* = f - \lambda \cdot v^* \in L_p(-\pi,\pi)$. Покажем, что это решение u^* единственно. Предположим противное, т.е. что уравнение (13) имеет два различных решения $u_1, u_2 \in L_p(-\pi,\pi)$. Тогда справедливы равенства:

$$u_1 + \lambda \cdot FHu_1 = f \quad \text{и} \quad u_2 + \lambda \cdot FHu_2 = f\,. \tag{15}$$

Из (15), путем вычитания первого равенства из второго, имеем:

$$u_2 - u_1 + \lambda \cdot FHu_2 - \lambda \cdot FHu_1 = 0$$

и, значит,

$$\langle u_2 - u_1 + \lambda \cdot FHu_2 - \lambda \cdot FHu_1, Hu_2 - Hu_1\rangle = 0$$

или

$$\langle u_2 - u_1, Hu_2 - Hu_1\rangle + \lambda \cdot \langle FHu_2 - FHu_1, Hu_2 - Hu_1\rangle = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как первое слагаемое в левой части неотрицательно, в силу положительности оператора H, а второе слагаемое строго положительно, в силу строгой монотонности оператора F и того, что $Hu_1 \neq Hu_2$. Покажем, что $Hu_1 \neq Hu_2$.

В самом деле, если предположить противное, что $Hu_1 = Hu_2$, то из (15) следует, что $u_1 + \lambda \cdot FHu_2 = f$ и $u_2 + \lambda \cdot FHu_2 = f$, откуда, путем вычитания левых и правых частей, получаем $u_1 - u_2 = 0$ — что противоречит тому, что u_1 и u_2 различны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как $F^{-1}v^* + \lambda \cdot Hv^* = Hf$, то в силу леммы 1 и равенств $g(x) = D(x) = 0$, имеем

$$d_4\|\psi\|_{p'}^{p'} \leqslant \langle F\psi, \psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \leqslant \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \lambda\langle v^*, Hv^*\rangle =$$

$$= \langle F\psi, Hf\rangle \leqslant \|F\psi\|_p\|Hf\|_{p'} \leqslant c_{p,h}\|F\psi\|_p\|f\|_p \leqslant c_{p,h}d_3\|\psi\|_{p'}^{p'-1}\|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p'} \leqslant d_3 d_4^{-1} c_{p,h}\|f\|_p. \tag{16}$$

Поскольку $\|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \leqslant d_3 \cdot \|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ и $v^* = \lambda^{-1} \cdot (f - u^*)$, то

$$\|f - u^*\|_p \leqslant \lambda d_3\|\psi\|_{p'}^{1/(p-1)},$$

откуда с учетом неравенства (16) получаем доказываемую оценку нормы решения. □

Следствие 3. *Пусть ядро $h(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию (3). Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt\right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}(-\pi,\pi)$ при любом $f(x) \in L_{4/3}(-\pi,\pi)$, причем $\|u^*\|_p \leqslant (\|h\|_2\|f\|_p)^3$.

Заметим, что из оценок для норм решений, доказанных в теоремах 1–3, непосредственно вытекает, что при условиях этих теорем однородные (т.е. при $f(x) = 0$) уравнения, соответствующие уравнениям (11)–(13), имеют лишь нулевое решение $u^*(x) = 0$.

4. Приближенное решение. Метод последовательных приближений

Теоремы 1–3 не содержат информации о том, как можно найти решения уравнений (11)–(13). В этом пункте при $p = 2$ и более жестких, чем п. 3, ограничениях на нелинейность доказывается не только существование и единственность решений рассматриваемых нелинейных интегральных уравнений типа свертки, но и обосновывается возможность нахождения этих решений методом последовательных приближений пикаровского типа без ограничений на величину числового параметра λ. Всюду ниже, как обычно, предполагается, что нелинейность $F(x,u)$ удовлетворяет *условиям Каратеодори* (см. п. 3).

Далее нам понадобится следующая теорема, являющаяся следствием известных результатов, доказанных в монографии [14].

Теорема 4. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство, и оператор A действует из H в H. Если существуют постоянные $m > 0$ и $M > 0$ ($M > m$) такие, что для любых $u, v \in H$ выполняются неравенства:*

$$\|Au - Av\|_H \leqslant M \cdot \|u - v\|_H, \quad (Au - Av, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_H^2, \tag{17}$$

то операторное уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in H$ при любом $f \in H$. Это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{m}{M^2} \cdot (Au_{n-1} - f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

и для которых имеет место следующая оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{m}{M^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Au_0 - f\|_H, \tag{19}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^2 \cdot M^{-2}}$, $u_0 \in H$ *— произвольный элемент.*

Если, дополнительно, A *является потенциальным оператором, то это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:*

$$u_n = u_{n-1} - \frac{2}{M+m} \cdot (Au_{n-1} - f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

и для которых имеет место следующая оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{2}{M+m} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Au_0 - f\|_H \,, \tag{21}$$

где $\alpha = (M-m)/(M+m)$.

Доказательство. Так как оператор A удовлетворяет двусторонним оценкам (17), то из теоремы 1.4 [11] вытекает, что уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in H$ и его можно найти по итерационной формуле (18) с оценкой погрешности (19). Если оператор A является еще и потенциальным, то по теореме 1.7 [11] это решение можно найти по итерационной формуле (20) с оценкой погрешности (21). □

Замечание 3. В силу неравенства Коши-Буняковского, одновременное выполнение неравенств из (17) возможно лишь при условии, что $m \leqslant M$. Поэтому, так как при $m < M$

$$\frac{M-m}{M+m} < \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} < \frac{M+m}{M} \cdot \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\,,$$

последовательные приближения (20) сходятся к решению u^* значительно быстрее, чем (18), т.е. при $n \to \infty$ правая часть в (21) стремится к нулю быстрее, чем в (19).

Теорема 4 непосредственно применима к уравнениям вида (11). Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть ядро* $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ *и удовлетворяет условию* (3). *Если для почти всех* $x \in [-\pi, \pi]$ *и всех* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ *нелинейность* $F(x, u)$ *удовлетворяет условиям:*

4.1) *существует постоянная* $M > 0$ *такая, что выполняется неравенство:*

$$|F(x, u_1) - F(x, u_2)| \leqslant M \cdot |u_1 - u_2|\,;$$

4.2) *существует постоянная* $m > 0$ *такая, что выполняется неравенство:*

$$[F(x, u_1) - F(x, u_2)] \cdot [u_1 - u_2] \geq m \cdot |u_1 - u_2|^2\,,$$

то при любом $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ *уравнение* (11) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений, которые определяются по формуле:*

$$u_n = u_{n-1} - \mu \cdot (\lambda \cdot Fu_{n-1} + Hu_{n-1} - f), \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{22}$$

где $\mu = \lambda \cdot m \cdot \Big(\lambda \cdot M + \|h\|_1\Big)^{-2}$, *с оценкой погрешности:*

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|\lambda \cdot Fu_0 + Hu_0 - f\|_2\,, \tag{23}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 m^2 (\lambda \cdot M + \|h\|_1)^{-2}}$, $u_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ *— начальное приближение (произвольная функция). Если, дополнительно, ядро* $h(x)$ *является четной функцией, то решение* $u^*(x)$ *можно найти по формуле* (22), *где* $\mu = 2/[\lambda \cdot (M+m) + \|h\|_1]$, *с оценкой погрешности* (23), *где* $\alpha = [\lambda \cdot (M-m) + \|h\|_1]/[\lambda \cdot (M+m) + \|h\|_1]$.

Доказательство. Запишем уравнение (11) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda \cdot Fu + Hu$. Из условий 4.1) и 4.2) вытекает, соответственно, что $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \,, \quad (Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_2^2 \,, \tag{24}$$

т.е. оператор $F : L_2(-\pi, \pi) \to L_2(-\pi, \pi)$ является липшиц-непрерывным и сильно монотонным.

Используя оценки (24), условие (3) и неравенство (4), имеем:

$$\|Au - Av\|_2 \leqslant \lambda \cdot \|Fu - Fv\|_2 + \|H(u - v)\|_2 \leqslant \Big(\lambda \cdot M + \|h\|_1\Big) \cdot \|u - v\|_2 \,,$$

$$(Au - Av, u - v) = \lambda \cdot (Fu - Fv, u - v) + (H(u - v), u - v) \geq \lambda \cdot m \cdot \|u - v\|_2^2 \,.$$

Так как оператор A удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, то уравнение $Au = f$, а значит, и данное уравнение (11) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, и это решение можно найти по итерационной формуле (22) с оценкой погрешности (23).

Если, дополнительно, предположить, что ядро $h(x)$ является четной функцией, то оператор свертки H является потенциальным оператором. Из условия 4.1) вытекает [15, с. 89 и 214], что оператор суперпозиции F также является потенциальным оператором. Значит, оператор $A = \lambda \cdot F + H$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, из которой, согласно формуле (20) и оценке (21), вытекает, что в (22) и (23) можно взять $\mu = 2/[\lambda \cdot (M + m) + \|h\|_1]$, $\alpha = [\lambda \cdot (M - m) + \|h\|_1]/[\lambda \cdot (M + m) + \|h\|_1]$. □

Важно отметить (см. замечание 3), что последовательные приближения (22), соответствующие четному ядру $h(x)$, сходятся значительно быстрее к решению $u^*(x)$.

Рассмотрим теперь нелинейные интегральные уравнения типа свертки (12) и (13). К уравнениям такого вида применить непосредственно теорему 4 нельзя, так как произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором. Поэтому в случае уравнений (12) и (13) удается построить последовательные приближения и получить оценки скорости их сходимости к точному решению лишь в терминах обратного оператора F^{-1} к оператору суперпозиции F.

Теорема 6. *Пусть ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (3), а нелинейность $F(x, u)$ — условиям 4.1) и 4.2) теоремы 5. Тогда при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ уравнение (12) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Это решение можно найти по формуле: $u_n = F^{-1} v_n$, $n \in \mathbb{N}$, где F^{-1} — оператор, обратный F,*

$$v_n = v_{n-1} - \mu \cdot (F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot H v_{n-1} - f) \,, \tag{25}$$

с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|F^{-1} v_0 + \lambda \cdot H v_0 - f\|_2 \,, \tag{26}$$

где $\mu = m/[M^2(m^{-1} + \lambda \|h\|_1)^2]$, $\alpha = \sqrt{1 - m^4 M^{-4} (1 + \lambda m \|h\|_1)^{-2}}$, $v_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ — начальное приближение (произвольная функция). Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то решение $u^*(x)$ можно найти по итерационной формуле (25), где $\mu = 2/[m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}]$ с оценкой погрешности (26), где $\alpha = [1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}]/[1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}]$.

Доказательство. Из условий 4.1) и 4.2) следует, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из $L_2(-\pi, \pi)$ в $L_2(-\pi, \pi)$ и сильно монотонен, причем выполняются неравенства (24). Поэтому, в силу теорем 1.3 и 1.5 [11], существует обратный оператор F^{-1}, который так же, как и F, является потенциальным, причем $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства:

$$\|F^{-1} u - F^{-1} v\|_2 \leqslant m^{-1} \cdot \|u - v\|_2 \,, \tag{27}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geq m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2 \,. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь уравнение (12). Запишем его в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot H\,Fu = f \,. \tag{29}$$

Легко видеть, что если $v^* \in L_2(-\pi, \pi)$ является решением уравнения

$$Av = f, \qquad \text{где} \quad Av = F^{-1}v + \lambda \cdot Hv \,, \tag{30}$$

то $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(-\pi, \pi)$ является решением уравнения (29), причем эти решения являются единственными в $L_2(-\pi, \pi)$, так как F и F^{-1} являются строго монотонными операторами. Далее, так как в силу неравенств (27), (28), условия (3) и оценки (4), $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства:

$$\|Au - Av\|_2 \leqslant \|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 + \lambda \cdot \|H(u - v)\|_2 \leqslant \\ \leqslant \Big(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1\Big) \cdot \|u - v\|_2 \,, \tag{31}$$

$$(Au - Av, u - v) = (F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) + \lambda \cdot (H(u - v), u - v) \geq \\ \geq m \cdot M^{-2} \cdot \|u - v\|_2^2 \,, \tag{32}$$

то оператор A удовлетворяет всем требованиям теоремы 4. Следовательно, уравнение (30) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, и это решение можно найти по итерационной формуле (25) с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \frac{m \cdot M^{-2}}{(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|F^{-1}v_0 + \lambda \cdot Hv_0 - f\|_2 \,, \tag{33}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^4 \cdot M^{-4} \cdot (1 + \lambda \cdot m \cdot \|h\|_1)^{-2}}$. Поскольку, в силу неравенства (27),

$$\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant m^{-1} \cdot \|v_n - v^*\|_2 \,,$$

то из (33) легко получаем оценку (26) — что и требовалось.

Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то оператор свертки H является потенциальным. Значит, оператор A удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, из которой согласно формуле (20) и оценке (21) вытекает, что в (25) и (26) можно взять $\mu = 2/[m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}]$ и $\alpha = [1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}]/[1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}]$. $\square$

Докажем, наконец, следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (3), а нелинейность $F(x, u)$ — условиям 4.1) и 4.2) теоремы 5. Тогда при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ уравнение (13) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Это решение можно найти по итерационной формуле:*

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \cdot \mu \cdot \Big(F^{-1}(\lambda^{-1}(f - u_{n-1})) - Hu_{n-1}\Big) \,, \tag{34}$$

где $\mu = m \cdot M^{-2}/(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2$, с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \lambda \cdot \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|F^{-1}(\lambda^{-1}(f - u_0)) - Hu_0\|_2 \,, \tag{35}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^4 \cdot M^{-4} \cdot (1 + \lambda \cdot m \cdot \|h\|_1)^{-2}}$, $u_0(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ — начальное приближение (произвольная функция). Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией, то решение $u^*(x)$ можно найти по итерационной формуле (34), где $\mu = 2/[m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}]$ с оценкой погрешности (35), где $\alpha = [1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}]/[1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}]$.

Доказательство. Из условий 4.1) и 4.2) следует (см. доказательство теоремы 6), что оператор суперпозиции F имеет обратный оператор F^{-1}, причем оба оператора являются потенциальными и выполняются неравенства (24), (27) и (28). Рассмотрим уравнение (13). Запишем его в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot F\,Hu = f\ . \tag{36}$$

Легко видеть, что если $v^* \in L_2(-\pi, \pi)$ является решением уравнения

$$F^{-1}v + \lambda \cdot Hv = Hf\ , \tag{37}$$

то $u^* = f - \lambda \cdot v^* \in L_2(-\pi, \pi)$ является решением уравнения (36), т.е. данного уравнения (13).

Замечая, что уравнение (37) имеет такой же вид, что и уравнение (30) (с Hf вместо f), получаем (см. доказательство теоремы 6), что уравнение (37) имеет единственное решение $v^* \in L_2(-\pi, \pi)$, и это решение можно найти по итерационной формуле вида (25):

$$v_n = v_{n-1} - \frac{m \cdot M^{-2}}{(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2} \cdot (F^{-1}v_{n-1} + \lambda \cdot Hv_{n-1} - Hf)\ , \tag{38}$$

с оценкой погрешности вида (33):

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \frac{m \cdot M^{-2}}{(m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1)^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|F^{-1}v_0 + \lambda \cdot Hv_0 - Hf\|_2\ , \tag{39}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^4 \cdot M^{-4} \cdot (1 + \lambda \cdot m \cdot \|h\|_1)^{-2}}$.

Из (38) и (39), умножая на λ и учитывая затем, что $\lambda \cdot v^* = f - u^*$ и $\lambda \cdot v_{n-1} = f - u_{n-1}$, легко получаем формулу (34) и оценку (35).

Далее, если ядро $h(x)$ является четной функцией, то, в силу указанной связи между уравнениями (37) и (30), из доказательства теоремы 6 очевидным образом вытекает, что в (34) и (35) можно взять

$$\mu = \frac{2}{m^{-1} + \lambda \cdot \|h\|_1 + m \cdot M^{-2}} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1 + \lambda \cdot \|h\|_1 - m^2 \cdot M^{-2}}{1 + \lambda \cdot \|h\|_1 + m^2 \cdot M^{-2}}\ .$$

□

5. Приближенное решение. Градиентный метод

В п. 4 были рассмотрены вопросы, касающиеся приближенного решения уравнений типа свертки (11)–(13) с *нелинейностями общего вида* в пространствах Лебега при $p = 2$. Методы, использованные при этом, оказываются не пригодными при $p \neq 2$, так как в этом случае не удается комбинировать *принцип сжимающих отображений*, в котором требуется, чтобы оператор отображал данное пространство в себя, с *принципом Браудера-Минти*, в котором требуется, чтобы оператор отображал данное пространство в сопряженное с ним пространство. В этом пункте будет показано, что если ограничиться рассмотрением уравнений типа свертки с *нечетностепенной нелинейностью* вида u^{p-1}, то такие уравнения можно приближенно решать в пространствах Лебега $L_p(-\pi, \pi)$ при четных $p > 2$. При этом, в отличие от п. 4, используется один из методов теории *потенциальных* монотонных операторов, известный как *метод наискорейшего спуска* или *градиентный метод*.

Определение 4. *Банахово пространство X называется строго выпуклым, если $\forall u, v \in X$ из того, что $u \neq v$, $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ следует, что $\|u + v\| < 2$.*

Определение 5. *Оператор $J : X \to X^*$, где X^* строго выпуклое пространство, называется дуализующим отображением, если для любого $u \in X$ выполняются равенства $\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|_*^2$.*

Заметим, что условие строгой выпуклости сопряженного пространства X^* в определении 5 обеспечивает [13, с. 312–313] единственность дуализующего отображения $J : X \to X^*$, причем J является [14, с. 115] потенциальным оператором с потенциалом $f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$.

Далее нам понадобится следующая теорема, являющаяся следствием известных результатов, доказанных в монографии [14].

Теорема 8. *Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ — хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(\|u_n\| + \|Au_n - f\|_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $J^* : X^* \to X$ — дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.*

Доказательство. Существование и единственность решения u^* вытекает из теоремы Браудера-Минти, а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из теоремы 4.2 [14, с. 122] и замечания 4.13 [14, с. 125], поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством [14, с. 80–81]. □

Указанный в теореме 8 способ приближенного нахождения решения u^* известен [14] как метод *наискорейшего* спуска (или *градиентный* метод, так как $J^*v = \|v\|_* \cdot \operatorname{grad}\|v\|_*$, $\forall v \in X^*$).

Теорема 8, в отличие от теоремы 4, применима к интегральным уравнениям типа свертки со степенными нелинейностями. А именно, справедлива следующая теорема, согласующаяся со следствием 1.

Теорема 9. *Пусть $\alpha = r/s \in [1, \infty)$, где $r, s = 1, 3, 5, \ldots$ — нечетные числа, $f(x) \in L_{1+1/\alpha}(-\pi, \pi)$, $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и выполнено условие (3). Тогда уравнение*

$$u^\alpha(x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt = f(x) \tag{40}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{1+\alpha}(-\pi, \pi)$. Если, дополнительно, ядро $h(x)$ является четной функцией и $\alpha > 1$ — нечетное число, то это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Au_n - f\|_{1+1/\alpha}^{1-1/\alpha} \cdot |Au_n - f|^{-1+1/\alpha} \cdot [Au_n - f], \tag{41}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $u_0(x) \in L_{1+\alpha}(-\pi, \pi)$ — произвольная функция (начальное приближение), $Au = u^\alpha + Hu$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + \alpha \cdot \left(\|u_n\|_{1+\alpha} + \|Au_n - f\|_{1+1/\alpha}\right)^{\alpha-1} + \gamma \cdot \|h\|_1}\right), \tag{42}$$

$\varepsilon > 0$ — любое число, $\gamma = (2\pi)^{2\alpha/(\alpha+1)}$.

Доказательство. Запишем уравнение (40) в операторном виде:

$$Au = f, \quad \text{где } Au = u^\alpha + Hu. \tag{43}$$

Существование и единственность решения $u^*(x) \in L_{1+\alpha}(-\pi, \pi)$ уравнения (43) вытекает из теоремы 1, в которой следует взять $p = 1 + \alpha$, $\lambda = 1$, $F(x, u) = u^\alpha$ и $\alpha = r/s$.

Осталось доказать основное утверждение теоремы о том, что последовательность (41) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$. Для этого воспользуемся теоремой 8.

По лемме 1 при $p=\alpha+1\geq 2$ получаем, что оператор свертки H действует непрерывно из $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ в $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$, причем

$$\|Hu\|_{1+1/\alpha}\leqslant \gamma\cdot\|h\|_1\cdot\|u\|_{1+\alpha}\,, \quad \text{где } \gamma=(2\pi)^{2\alpha/(\alpha+1)}. \tag{44}$$

Поскольку $u^\alpha(x)\in L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$, то оператор A также действует из $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ в $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$. Покажем, что оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным. Для любых $u,v\in L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ имеем

$$\|Au-Av\|_{1+1/\alpha}\leqslant\|u^\alpha-v^\alpha\|_{1+1/\alpha}+\|H(u-v)\|_{1+1/\alpha}=I_1+I_2\ .$$

Так как $|t^\alpha-s^\alpha|\leqslant(\alpha/2)\cdot|t-s|\cdot(t^{\alpha-1}+s^{\alpha-1})\,,\ \ \forall t,s\in\mathbb{R}$ и нечетном $\alpha\geq 3$, то

$$I_1\leqslant\frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u(x)-v(x)|^{1+1/\alpha}|u^{\alpha-1}(x)+v^{\alpha-1}(x)|^{1+1/\alpha}dx\right)^{\alpha/(\alpha+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\,\|u-v\|_{1+\alpha}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u^{\alpha-1}(x)+v^{\alpha-1}(x)|^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{2}\,\|u-v\|_{1+\alpha}\left(\|u\|_{1+\alpha}^{\alpha-1}+\|v\|_{1+\alpha}^{\alpha-1}\right)\leqslant\alpha\cdot r^{\alpha-1}\cdot\|u-v\|_{1+\alpha}\ ,$$

где $r=\max\left(\|u\|_{1+\alpha},\|v\|_{1+\alpha}\right)$. Таким образом, оценив I_2 с помощью неравенства (44), имеем

$$\|Au-Av\|_{1+1/\alpha}\leqslant\mu(r)\cdot\|u-v\|_{1+\alpha}\ ,$$

где $\mu(r)=\alpha\cdot r^{\alpha-1}+\gamma\cdot\|h\|_1$ — возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Значит, A — ограниченно липшиц-непрерывный оператор.

Покажем теперь, что A — равномерно монотонный оператор. Используя лемму 1 и неравенство $(t^\alpha-s^\alpha)\cdot(t-s)\geq 2^{1-\alpha}|t-s|^{\alpha+1}$, справедливое для всех $t,s\in\mathbb{R}$ и нечетных $\alpha\geq 3$, имеем

$$\langle Au-Av,u-v\rangle\geq\int\limits_{-\pi}^{\pi}[u^\alpha(x)-v^\alpha(x)]\cdot[u(x)-v(x)]\,dx\geq$$

$$\geq 2^{1-\alpha}\cdot\|u-v\|_{1+\alpha}^{1+\alpha}=\beta(\|u-v\|_{1+\alpha})\,,\quad\forall u,v\in L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)\ ,$$

где $\beta(s)=2^{1-\alpha}\cdot s^{\alpha+1}$ — строго возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0)=0$, т.е. A — равномерно монотонный оператор.

Далее, поскольку $Fu=u^\alpha$ и H — потенциальные операторы (см. [13, с. 62] и замечание 1), то оператор A также является потенциальным. Заметим, наконец, что пространства $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$ и $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$ являются строго выпуклыми, и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{1+1/\alpha}(-\pi,\pi)$ имеет вид [15]:

$$J^*w(\cdot)=\|w\|_{1+1/\alpha}^{1-1/\alpha}\cdot|w(\cdot)|^{1/\alpha-1}\cdot w(\cdot).$$

Следовательно, на основании теоремы 8, последовательность (41) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_{1+\alpha}(-\pi,\pi)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.E. Beneš *A nonlinear integral equation from the theory of servo-mechanisms* // Bell. System. Techn. J. 1961. V. 40, №5. P. 1309–1321.
2. V.E. Beneš *A nonlinear integral equation in the Marcinkiewicz space M_2* // J. Math. Phys. 1965. V. 44, №1. P. 24–35.
3. O. Diekman *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection* // J. Math. Biol. 1978. V. 6, № 2. P. 109–130.
4. O.Diekman, H.G. Kaper *On the bounded solutions of nonlinear convolutions equation* // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. 1978. V. 2, № 6. P. 721–737.
5. J. Goncerzevicz, H. Marcinkowska, W. Okrasiński, K. Tabisz *On the percolation of water from a cylindrical reservoir into the surrounding soi*l // Zast. Mat. 1978. V. 16, № 2. P. 249–261.
6. W. Okrasiński *Nonlinear Volterra equations and physical applications* // Extracta Math. 1989. V. 4, №2. P. 51–74.
7. J.J. Keller *Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction* // Z. Angew. Math. Phys. 1981. V. 32, № 2. P. 170–181.
8. Владимиров В.С., Волович Я.И. *О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны* // Теорет. и матем. физика. 2004. Т. 138, №3. С. 355–368.
9. Владимиров В.С. *Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов* // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, №. С. 55–80.
10. Владимиров В.С. *Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов* // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 73–88.
11. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки.* М.: Физматлит, 2009. 304 с.
12. Качуровский Р.И. *Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах* // Успехи матем. наук. 1968. Т. 23, №2. С. 121–168.
13. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. 416 с.
14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. 336 с.
15. Вайнберг М.М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* – М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
16. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега* // Матем. заметки. 2015. Т. 97, №5. С. 643–654.
17. Асхабов С. Н. *Приближенное решение нелинейных уравнений типа свертки на отрезке* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, №2. С. 3–11.
18. Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л. *Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №4. С. 8–13.
19. H. Brezis, F.E. Browder *Some new results about Hammerstein equations* // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80(3). P. 567–572.
20. H. Brezis, F.E. Browder *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type* // Advances in Math. 1975. V. 18. P. 115–147.
21. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* М.: Наука, 1978. 296 с.
22. Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении. Том 1.* М.: Мир, 1985. 264 с.
23. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды. Том 1.* М.: Мир, 1965. 616 с.

Султан Нажмудинович Асхабов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru