ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 133-145.

УДК 517.53

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВНУТРЕННИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ф.А. ШАМОЯН

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. В статье получены необходимые и достаточные условия на весовую вектор-функцию, при которых заданная внутренняя функция является слабо обратимой в весовом пространстве голоморфных функций в трубчатой области.

Ключевые слова: слабая обратимость, весовые пространства, трубчатая область.

Mathematics Subject Classification: 32A36, 32A37, 47A16, 47A15, 42B35

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{C}^n$ – n-мерное комплексное пространство, G – некоторая область в $\mathbb{C}^n$, $H(G)$ – множество всех аналитических в G функций, $H^\infty(G)$ – множество всех ограниченных аналитических функций в G. Предположим, что X – некоторое топологическое подпространство пространства $H(G)$, в котором $H^\infty(G)$ составляет всюду плотное множество, операторы $S_z(f) = f(z)$, $z \in G$, и $M_\psi(f) = \psi f$, $\psi \in H^\infty$, $f \in X$, являются ограниченными операторами в X.

Определение. *Пусть $f \in X$, и существует последовательность $f_m \in H^\infty(G)$, такая что $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X, тогда функцию f назовем слабо обратимой в пространстве X.*

Таким образом, f слабо обратима в X, если множество $H^\infty(G)f$ всюду плотно в пространстве X.

Отметим, что вопросы слабой обратимости в конкретных функциональных пространствах связаны с широким кругом задач нескольких дисциплин: от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа [1].

Слабая обратимость в одномерном случае была исследована в классической работе М. В. Келдыша [2], где установлено, что существует функция $f \in H^\infty(D)$, $f(z) \neq 0$, $z \in D = \{z \in \mathbb{C}^1 : |z| < 1\}$, не являющаяся слабо обратимой в пространстве Бергмана:

$$A^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A^p(D)} = \left(\int_D |f(z)|^p \, dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

где m_2 – плоская мера Лебега.

Важную роль в этих построениях сыграла внутренняя функция $S(z) = \exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)$, $z \in D$.

F.A. Shamoyan, On a class of inner functions in a half-space.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1704.2014К) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-97508).

Поступила 12 октября 2015 г.

В работах А. Берлинга [3] и Н. Никольского [4] была исследована слабая обратимость функции S в весовом пространстве

$$A_{\varphi}^{p}=\left\{f\in H\left(D\right):\|f\|_{A_{\varphi}^{p}}=\left(\int\limits_{D}\left|f\left(z\right)\right|^{p}\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right)dm_{2}\left(z\right)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}.$$

В этих работах, при некоторых ограничениях на регулярность роста φ, установлено, что для слабой обратимости функции S в пространстве A_{φ}^{p}, $1\leq p<+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\frac{\varphi\left(x\right)}{x^{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=+\infty. \tag{1}$$

Учитывая, что функция S аналитическая всюду, кроме точки $z=1$, в работе автора и его аспиранта И. Геворкяна [5] было исследована слабая обратимость функции S в пространстве

$$\tilde{A}_{\varphi}^{p}=\left\{f\in H\left(D\right):\|f\|_{\tilde{A}_{\varphi}^{p}}=\left(\int\limits_{D}\left|f\left(z\right)\right|^{p}\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right)dm_{2}\left(z\right)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,1\leq p<+\infty\right\}.$$

В работе [5] установлено, что, в отличие от (1), необходимым и достаточным условием слабой обратимости функции S в $\tilde{A}_{\varphi}^{p}$, $0<p\leq+\infty$, является

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\varphi\left(x\right)}{x^{2}}dx=+\infty. \tag{2}$$

Очевидно, что из условия (2) следует (1), но обратное неверно.

В недавней работе [6] было предложено новое доказательство вышеуказанных результатов А. Берлинга, Н. Никольского и Геворкяна – Шамояна в случае $p=2$, основанное на хорошо известной теореме о короне.

В данной работе мы исследуем вопросы указанного типа в многомерных бесконечных областях (трубчатых).

§1. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Для изложения основных результатов работы введем также следующие обозначения:

Пусть $P(x)=(p_1(x_1),...,p_n(x_n))$, $x=(x_1,...,x_n)$, – вектор-функция, определенная на $\mathbb{R}_{+}^{n}=\left\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,x_j>0,\ j=\overline{1,n}\right\}$, $\mathbb{C}_{+}^{n}$ – трубчатая область с основанием $\mathbb{R}_{+}^{n}$, т.е. $\mathbb{C}_{+}^{n}=\left\{z=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n:(Imz_1,...,Imz_n)\in\mathbb{R}_{+}^{n}\right\}$.

Пусть далее

$$A_{P}^{q}\left(\mathbb{C}_{+}^{n}\right)=\left\{f\in H\left(\mathbb{C}_{+}^{n}\right):\|f\|_{A_{P}^{q}}=\left(\int\limits_{\mathbb{C}_{+}^{n}}\left|f\left(z\right)\right|^{p}\exp\left(-P\left(|z|\right)\right)dm_{2n}\left(z\right)\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty\right\},$$

где $z=\left(z_1,...,z_n\right)$, $\exp\left(-P\left(|z|\right)\right):=\prod\limits_{j=1}^{n}\exp\left(-p_j\left(|z_j|\right)\right)$; dm_{2n} – $2n$-мерная мера Лебега в $\mathbb{C}_{+}^{n}$.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что $p_j(x) = \int\limits_1^x \frac{\omega_j(t)}{t} dt,\ j = \overline{1,n}$, где ω_j определены на $\mathbb{R}_+ := \mathbb{R}_+^1$, причем $\omega_j(t) \uparrow^{+\infty}$ $(t \to +\infty)$, $1 \le j \le n$. Такие функции назовем весовыми, а вектор-функции вида $P = (p_1, ..., p_n)$ – весовыми вектор-функциями. Множество всех весовых вектор-функций обозначим через Ω.

Основными результатами статьи являются доказательства следующих двух утверждений:

Теорема 1. *Пусть* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}_+^n$, $az = \sum\limits_{j=1}^n a_j z_j$, $S_a(z) = \exp\left(i \sum\limits_{j=1}^n a_j z_j\right)$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}_+^n$, $P = (p_1, ..., p_n) \in \Omega$.

Тогда

1) следующие утверждения равносильны:

а) функция S_a *слабо обратима в пространстве* A_P^q *при некотором* $q = q_0$, $1 \le q_0 < +\infty$*;*

б) S_a*слабо обратима в пространстве* A_P^q *при всех* $0 < q < +\infty$;

в)

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{p}_j(t)}{t^2} dt = +\infty, j = \overline{1,n}; \tag{3}$$

2) Если хоть один из интегралов в (3) *сходится, то функция* S_a *не является слабо обратимой в любом пространстве* A_P^q, $0 < q < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $P = (p_1, ..., p_n)$ *– вектор-функция из* Ω, $f \in H^\infty\left(\mathbb{C}_{-\eta}^n\right)$, *где* $\mathbb{C}_{-\eta}^n = \left\{z = (z_1, ..., z_n) : Imz_j > -\eta, j = \overline{1,n}\right\}$, $f(z) \ne 0$, $z \in \mathbb{C}_{-\eta}^n$, $0 < s < 1$.

Пусть $M_m = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}_+^n} \left\{|\ln f(z)|^m \exp(-sP(|z|))\right\}$, *где выбрана главная ветвь логарифма. Тогда если*

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[m]{M_m}} = +\infty, \tag{4}$$

то функция f *слабо обратима в пространстве* $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$ *при всех* $0 < q < +\infty$.

Замечание 1. Отметим, что условия $f \in H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right)$ и $f(z) \ne 0$, $z \in \mathbb{C}_+^n$, не являются достаточными для слабой обратимости функции f в пространстве $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$.

Действительно, исходя из результатов работы [8], нетрудно установить, что функции вида $f_a(z) = \exp\left(-\sum\limits_{j=1}^n \frac{ic_j}{z_j - a_j}\right)$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}_+^n$, $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}_+^n$, не являются слабо обратимыми в пространстве $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$.

Замечание 2. Если ряд (4) сходится, а функция f совпадает с функцией S_a, то из теоремы 1 следует, что функция f не будет слабо обратимой в пространстве $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, при всех $q > 0$, поскольку сходимость ряда (4) эквивалентна сходимости интегралов (3) (см. [12]).

Перед доказательством теорем 1 и 2 приведем следующие вспомогательные утверждения.

Пусть $k = (k_1, ..., k_n)$ – некоторая перестановка чисел $(1, 2, ..., n)$, $n \in N$, $1 \le m \le n$. Тогда кортежем порядка m назовем вектор с координатами $(k_1, ..., k_m)$. Множество всех кортежей порядка m обозначим через K_m. Ясно, что если $1 \le r,\ m \le n$, то равенство $(k_1, ..., k_r) = (s_1, ..., s_m)$ выполняется тогда и только тогда, когда $r = m$, $s_i = k_i$, $i = \overline{1,m}$.

Лемма 1. *Пусть* $f \in H\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, $k = (k_1, ..., k_m) \in K_m$, $\widetilde{z} = (\widetilde{z_1}, ..., \widetilde{z_n}) \in \mathbb{C}_+^n$, *причем* $\widetilde{z_j} = z_{k_j}$, *если* $j = k_j$ *при некотором* $k_j \in K_m$, *и* $\widetilde{z_j} = i$, *если* $j \neq k_j$, $j = \overline{1, n}$.

Предположим, что $P = (p_1, ..., p_n)$ *– весовая вектор-функция,* $P \in \Omega$.

Тогда если $0 < s < +\infty$, *то справедлива оценка*

$$|f(\widetilde{z})|^s \exp\left(-P\left(2\,|\widetilde{z}|\right)\right) \leq \frac{c_0(s)}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_{k_j}^2} \int\limits_{\widetilde{U}^n(\widetilde{z})} |f(\zeta)|^s \exp\left(-P\left(|\zeta|\right)\right) dm_{2n}(\zeta), \tag{5}$$

где $\widetilde{U}^n(\widetilde{z}) = \left\{\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}_+^n : |\zeta_j - \widetilde{z_j}| < \dfrac{Im\widetilde{z_j}}{2}, j = \overline{1, n}\right\}$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно предположить, что $j = k_j$, $1 \leq j \leq m$. Тогда $\widetilde{U}^n(\widetilde{z}) = \left\{\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) : |\zeta_j - z_j| < \dfrac{y_j}{2}, 1 \leq j \leq m\ ,\ |\zeta_j - i| < \dfrac{1}{2}, m+1 \leq j \leq n\right\}$.

Учитывая n-субгармоничность функции $|f(\zeta)|^s$, $\zeta \in \mathbb{C}_+^n$, получаем

$$|f(\widetilde{z})|^s \leq \frac{2^{2m}}{\pi^n \prod\limits_{j=1}^{m} y_j^2} \int\limits_{\widetilde{U}^n(\widetilde{z})} |f(\zeta)|^s dm_{2n}(\zeta), \tag{6}$$

где $\widetilde{z} = (z_1, ..., z_m, i, ..., i)$. Заметим теперь, что если $\zeta \in \widetilde{U}^n$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, то $|z_j - \zeta_j| < \dfrac{y_j}{2}$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = \overline{1, m}$, и $|i - \zeta_j| < \dfrac{1}{2}$, если $j = \overline{m+1, n}$.

Поэтому $\dfrac{|z_j|}{2} \leq |z_j| - \dfrac{|y_j|}{2} \leq |\zeta_j| \leq |z_j| + \dfrac{|y_j|}{2} \leq \dfrac{3}{2}|z_j|$, $j = \overline{1, m}$; $\dfrac{1}{2} \leq |\zeta_j| \leq \dfrac{3}{2}$, $j = \overline{m+1, n}$.

Следовательно, справедливо

$$\exp\left(-p_j\left(\frac{3}{2}|z_j|\right)\right) \leq \exp\left(-p_j\left(|\zeta_j|\right)\right) \leq \exp\left(-p_j\left(\frac{|z_j|}{2}\right)\right), \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \widetilde{U}^n(\widetilde{z}), j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Используя оценки (6), (7), приходим к неравенству

$$|f(\widetilde{z})|^s \exp\left(-p_j\left(\frac{3}{2}|\widetilde{z}|\right)\right) = |f(z_1, ..., z_m, i, ..., i)|^s \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} p_j\left(\frac{3}{2}|z_j|\right)\right) \leq \frac{2^{2m}}{\pi^n \prod\limits_{j=1}^{m} y_j^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\widetilde{U}^n(\widetilde{z})} |f(\zeta)|^s \exp - \left(P\left(|\zeta|\right)\right) dm_{2n}(\zeta) \leq \frac{C(m, n)}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_j^2} \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |f(\zeta)|^s \exp\left(-P\left(|\zeta|\right)\right) dm_{2n}(\zeta). \tag{8}$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение при $n = 1$ установлено в работе М.М. Джрбашяна [9] (см. также [10]).

Лемма 2. *Пусть* $P = (p_1, ..., p_n)$ *– весовая вектор-функция,* $1 \leq q < +\infty$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) множество всех алгебраических многочленов от $z_1, ..., z_n$ *составляет всюду плотное множество в* $A_P^q(\mathbb{C}_+)$;

2) выполняются условия (3) *теоремы 1, причем если хоть один из интегралов в* (3) *сходится, то множество многочленов не является плотным в пространстве* $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$ *для произвольного* $0 < q < +\infty$.

Доказательство. Пусть $1 \leq q < +\infty$. Докажем лемму 2 при $n = 2$, при остальных n основные моменты доказательства сохраняются.

Пусть

$$L_P^{q'}\left(\mathbb{C}_+^2\right) := \left\{ f \in S\left(\mathbb{C}_+^n\right) : \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^2} |f(\zeta)|^{q'} \exp\left(-P\left(|\zeta|\right)\right) dm_4(\zeta) \right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty \right\},$$

где S – множество всех измеримых функций на $\mathbb{C}_+^n$, а $q' = \dfrac{q}{q-1}$. Предположим $g \in L_P^{q'}\left(\mathbb{C}_+^2\right)$, такая что

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+^2} g(\zeta_1,\zeta_2)\,\zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2} e^{-p_1(|\zeta_1|)-p_2(|\zeta_2|)} dm_4(\zeta_1,\zeta_2) = 0, k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^2. \tag{9}$$

Докажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+^2} g(\zeta_1,\zeta_2)\, f(\zeta_1,\zeta_2)\, e^{-p_1(|\zeta_1|)-p_2(|\zeta_2|)} dm_4(\zeta_1,\zeta_2) = 0 \tag{10}$$

для всех $f \in A_P^q\left(\mathbb{C}_+^2\right)$.

Пусть $\widetilde{g}(\zeta_1) = \int\limits_{\mathbb{C}_+} g(\zeta_1,\zeta_2) \exp\left(-p_2\left(|\zeta_2|\right)\right) dm_2(\zeta_2)$. Очевидно, что $\widetilde{g}(\zeta_1)$ – почти всюду конечная функция. Докажем, что $\widetilde{g}(\zeta_1) \in L_{p_1}^{q'}(\mathbb{C}_+)$. Из неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+} |\widetilde{g}(\zeta_1)|^{q'} e^{-p_1(|\zeta_1|)} dm_2(\zeta_1) = \int_{\mathbb{C}_+} \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} |g(\zeta_1,\zeta_2)|\, e^{-p_2(|\zeta_2|)} dm_2(\zeta_2) \right)^{q'} e^{-p_1(|\zeta_1|)} dm_2(\zeta_1) \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{C}_+^2} |g(\zeta_1,\zeta_2)|^{q'} e^{-p_2(|\zeta_2|)} e^{-p_1(|\zeta_1|)} dm_4(\zeta_1,\zeta_2) \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} e^{-p_2(|\zeta_2|)} dm_2(\zeta_2) \right)^{\frac{q'}{q}} \le$$

$$\le const \int\limits_{\mathbb{C}_+} |g(\zeta_1)|^{q'} e^{-p_1(|\zeta_1|)} dm_2(\zeta_1) < +\infty.$$

Следовательно, по теореме М.М. Джрбашяна (см. [9])

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+} \widetilde{g}(\zeta_1)\, f(\zeta_1)\, e^{-p_1(|\zeta_1|)} dm_2(\zeta_1) = 0, \tag{11}$$

для произвольного $f \in A_{P_1}^q(\mathbb{C}_+)$.

Заметим, что точно таким же образом доказывается, что если $f \in A_{P_1}^q\left(\mathbb{C}_+^2\right)$, то функция $\tilde{f}(\zeta_1) = \int\limits_{\mathbb{C}_+} f(\zeta_1,\zeta_2) \exp\left(-p_2\left(|\zeta_2|\right)\right) dm_2(\zeta_2)$ принадлежит классу $A_{P_1}^q(\mathbb{C}_+)$. Поэтому, применяя теорему М. М. Джрбашяна, получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+} \widetilde{g}(\zeta_1)\, \widetilde{f}(\zeta_1)\, dm_2(\zeta_1) = 0,$$

то есть

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+^2} g(\zeta_1,\zeta_2)\, f(\zeta_1,\zeta_2) \exp\left(-p_1\left(|\zeta_1|\right)\right) \exp\left(-p_2\left(|\zeta_2|\right)\right) dm_4(\zeta_1,\zeta_2) = 0.$$

Из этого равенства и теоремы Хана-Банаха следует первая часть леммы.

Перейдем к доказательству второй части. Из леммы 1 следует, что если многочлены плотны в $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, то существует последовательность многочленов $\tilde{P}_m(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k^{(m)} z^k$, $z \in \mathbb{C}_+$, таких что $\max_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{\left|\tilde{P}_m(z) - f(z)\right| \exp(-p_j(|z|))\right\} = 0$, $1 \le j \le n$, для любого $f \in A_{P_j}^{\infty}(\mathbb{C}_+)$, тогда по теореме М. М. Джрбашяна $\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_j(t)}{t^2}dt = +\infty$ (см. [9], [10]).

Следующая лемма установлена в работе [11].

Лемма 3. *Пусть p – весовая функция, такая что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{p}(t)}{1+t^2}dt < +\infty.$$

Предположим, что G – внешняя функция в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, имеющая вид

$$G(z) = \exp\left(-\frac{4i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+1}{t-z}\frac{p(t)}{1+t^2}dt\right), z \in \mathbb{C}_+.$$

Тогда существует положительное число с, такое что

$$\exp(-cp(3|z|)) \le |G(z)| \le \exp(-p(|z|)), z \in \mathbb{C}_+. \tag{12}$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТЬИ

Перейдем к доказательству теоремы 1. Сначала докажем первый пункт теоремы в) $\Rightarrow$ б).

Пусть $1 \le q < +\infty$, $a = (a_1, ..., a_n)$, $a_j > 0, j = \overline{1,n}$. Обозначим через $E_q(S_a)$ замыкание множества $H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right) S_a$ в пространстве $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$. Для доказательства этой части теоремы достаточно установить, что $1 \in E_q(S_a)$.

Пусть Φ – линейный непрерывный функционал, ортогональный к $E_q(S_a)$. Докажем, что $\Phi(1) = 0$. Предположим, что Φ порождается некоторой функцией $\Psi \in L_P^{q'}\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, тогда

$$\Phi(S_a F) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{iaz} F(z)\Psi(z) e^{-P(|z|)} dm_{2n}(z) = 0,$$

при всех $F \in H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, а также при $F(z_1, ..., z_n) = z_1^{m_1}...z_n^{m_n}$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Пусть $t \in [0,1]$, положим $e_1(t) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{ia_1 t z_1 + i\widetilde{a}\widetilde{z}}\Psi(z) e^{-P(|z|)} dm_{2n}(z)$, где $\widetilde{z} = (z_2, z_3, ..., z_n)$, $\widetilde{a} = (a_2, ..., a_n)$.

Ясно, что

$$e_1^{(m)}(t) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{ia_1 z_1 t + i\widetilde{a}\widetilde{z}} (ia_1 z_1)^m \Psi(z) e^{\left(-p_1(|z_1|) - \widetilde{P}(|z|)\right)} dm_{2n}(z),$$

где $\exp\left(-\widetilde{P}(|\widetilde{z}|)\right) = \exp(-p_2(|z_2|) ... - p_n(|z_n|))$. Очевидно, что

$$e_1^{(m)}(1) = 0, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

Докажем, что функция e принадлежит квазианалитическому классу на отрезке $[0,1]$ (см. [12]). Действительно, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left|e_1^{(m)}(t)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} \exp\left(-p_1\left(|z_1|\right)\right)|a_1|^m |z_1|^m |\Psi(z)| \exp\left(-\widetilde{P}\left(|\widetilde{z}|\right)\right) dm_{2n}(z) \leq$$

$$\leqslant |a_1|^m \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} e^{(-p_1(|z_1|))} |z_1|^{mq} dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} e^{(-p_1(|z_1|))} \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^{n-1}} |\Psi(z)| e^{\left(-\widetilde{P}(|z|)\right)} dm_{2n-2}(z)\right)^{q'} dm_2(z)\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Снова применяя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\left|e_1^{(m)}(t)\right| \leq |a_1|^m \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} |z_1|^{mq} e^{(-p_1(|z_1|))} dm_2(z)\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} e^{(-p_1(|z_1|))} \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^{n-1}} |\Psi(z)|^{q'} e^{\left(-\widetilde{P}(|z|)\right)} dm_{2n-2}(z)\right) dm_{2n}(z)\right) \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^{n-1}} e^{\left(-\widetilde{P}(|z|)\right)} dm_{2n-2}(z)\right)^{\frac{q'}{q}} \leq$$

$$\leq C_1 |a_1|^m \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} |z_1|^{mq} e^{(-p_1(|z_1|))} dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |\Psi(z)|^{q'} e^{(-P(|z|))} dm_{2n}(z)\right)^{\frac{1}{q'}}. \qquad (14)$$

Пусть теперь δ – произвольное положительное число $\delta \in (0,1)$. Тогда из последней оценки имеем

$$\left|e_1^{(m)}(t)\right| \leq C_2 |a_1|^m \sup_{r>0} \left(r^{\overline{m}} e^{-\frac{\delta}{q} p_1(r)}\right) \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+} e^{-(1-\delta) p_1(|z|)} dm_2(z)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_2 |a_1|^m \sup_{r>0} \left(r^{\overline{m}} e^{-\frac{\delta}{q} p_1(r)}\right) \left(\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{\pi} e^{-(1-\delta) p_1(|\rho|)} \rho d\rho d\varphi\right)^{\frac{1}{q}} = C_3 |a_1|^m \sup_{r>0} \left(r^{\overline{m}} e^{-\frac{\delta}{q} p_1(r)}\right).$$

Итак, окончательно получаем:

$$\left|e_1^{(m)}(t)\right| \leq C_3 |a_1|^m M_m,$$

где $M_m = \sup\limits_{r>0} \left(r^{\overline{m}} e^{-\frac{\delta}{q} p_1(r)}\right)$.

Теперь используем теорему Карлемана–Островского (см. [12]) о квазианалитичности класса

$$C^{\infty}(M_m) = \left\{\varphi \in C^{\infty}[0,1] : \left|\varphi^{(m)}(t)\right| \leq A^m M_m\right\},$$

согласно которой необходимым и достаточным условием квазианалитичности класса $C^\infty(M_m)$ является

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty, \tag{15}$$

где $T(r) = \sup\limits_{r \geq 1} \dfrac{r^m}{M_m}$ (см. [12]).

Но по теореме М. М. Джрбашяна (см. [9], [10]) расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_1(r)}{r^2} dr$ равносильна условию (15). Следовательно, функция $e(t)$ принадлежит квазианалитическому классу Карлемана–Островского на отрезке $[0,1]$. Ввиду условия (13), имеем $e_1(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$, то есть $e_1(0) = 0$. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{-i\tilde{a}\tilde{z}} \Psi(z) e^{-P(|z|)} dm_{2n}(z) = 0.$$

Положим

$$e_2(t) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{-ia_2 z_2 t - i\widetilde{a}\widetilde{z}} \psi(z) e^{-p_2(|z_2|) - \tilde{P}(|z|)} dm_{2n}(z),$$

где $\widetilde{a}$ и $\widetilde{z}$ определяются как и выше.

Копируя вышеприведенные рассуждения, получим, что $e_2(0) = 0$. Повторяя эти рассуждения $n-1$ раз, получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} \Psi(z) e^{-P(|z|)} dm_{2n}(z) = 0,$$

то есть $\Phi(1) = 0$.

По теореме Хана-Банаха $1 \in E_q(S_a)$.

Итак, доказательство импликации в) $\Rightarrow$ б) установлено при условии $q \geq 1$. Но учитывая, что для произвольного $f \in H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, $0 < q < 1$,

$$\|fS_a - 1\|_{A_P^q(\mathbb{C}_+^n)} \leq \|fS_a - 1\|_{A_P^1(\mathbb{C}_+^n)} \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{-P(|z|)} dm_{2n}(z) \right)^{\frac{1-q}{q}},$$

получим доказательство этой импликации полностью.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна. Поэтому нами установлено в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а). Чтобы доказать первый пункт теоремы, остается установить импликацию а) $\Rightarrow$ в).

Очевидно, что импликация а) $\Rightarrow$ в) первого пункта непосредственно следует из второго пункта теоремы. Поэтому перейдем к доказательству второго пункта.

Итак, пусть существует некоторое $k = (k_1, ..., k_m) \in K_m$, такое что

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_{k_j}(t)}{t^2} dt < +\infty, j = \overline{1, m}. \tag{$\tilde{3}$}$$

Не умаляя общности, будем считать, что $k_j = j, j = \overline{1, m}$.

По функциям $p_j, j=\overline{1,m}$, как в лемме 3, построим совокупность внешних функций

$$G_j(z)=\exp\left(\frac{-4i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{tz+1}{t-z}\frac{p_j(3|t|)}{1+t^2}dt\right), j=\overline{1,m}.$$

Положим также

$$G(z)=\prod_{j=1}^{m}G_j(z_j)=\exp\left(\frac{-4i}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t_jz_j+1}{t_j-z_j}\frac{p_j(3|t_j|)}{1+t_j^2}dt_j\right)\right), z=(z_1,...,z_m)\in\mathbb{C}_+^m.$$

Используя лемму 3, получим

$$\exp\left(-c\sum_{j=1}^{m}p_j(9|z_j|)\right)\le|G(z)|\le\exp\left(-\sum_{j=1}^{m}p_j(3|z_j|)\right), z=(z_1,...,z_m)\in\mathbb{C}_+^m, \qquad (16)$$

при некотором положительном c.

Пусть теперь, вопреки утверждению второго пункта, существует последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}, \quad f_k\in H^\infty(\mathbb{C}_+^n)$, такая что

$$\lim_{k\to+\infty}\|f_kS_a-1\|_{A_P^q(\mathbb{C}_+^n)}=0. \qquad (17)$$

Используя лемму 1, получаем

$$|f_k(z_1,...,z_m,i,...,i)\,S_a(z_1,...,z_m,i,...,i)-1|^q\times\exp\left(-\sum_{j=1}^{m}p_j(2|z_j|)\right)\le$$

$$\le\frac{c_0(q)}{\prod\limits_{j=1}^{m}y_j^2}\times\|f_kS_a-1\|^q_{A_P^q(\mathbb{C}_+^n)}, z=(z_1,...,z_m,i,...,i)\in\mathbb{C}_+^n. \qquad (18)$$

Из оценок (16) и (18) непосредственно следует, что

$$|f_k(z_1,...,z_m,i,...,i)\,S_a(z_1,...,z_m,i,...,i)-1|^q\times|G(z_1,...,z_m)|\le$$

$$\le\frac{c(q)}{\prod\limits_{j=1}^{m}y_j^2}\times\|f_kS_a-1\|^q_{A_P^q(\mathbb{C}_+^n)}, z=(z_1,...,z_m)\in\mathbb{C}_+^n. \qquad (19)$$

В частности, из оценки (19) непосредственно следует

$$|f_k(x_1+i,x_2+i,...,x_m+i,i,...,i)\,S_a(x_1+i,x_2+i,...,x_m+i,i,...,i)-1|^q\times$$

$$\times|G(x_1+i,x_2+i,...,x_m+i)|\le1,$$

при $k\ge k_0$.

Следовательно,

$$|f_k(x_1+i,...,x_m+i,i,...,i)|^q\,|G(x_1+i,...,x_m+i)|\,|S_a(x_1+i,...,x_m+i,i,...,i)|^q\le$$

$$\le|G(x+i)|\left|f_k\left(\widetilde{x+i}\right)S_a\left(\widetilde{x+i}\right)-1\right|^q+|G(x+i)|\le1+|G(x+i)|, \qquad (20)$$

где $x+i=(x_1+i,x_2+i,...,x_m+i,i,i...,i)\in\mathbb{C}_+^m$.

Очевидно, что из оценки (16) следует, что $|G(z)|\le1$ при всех $z\in\mathbb{C}_+^m$, кроме того

$$|S_a(x+i)|^q=\left|\exp i\sum_{j=1}^{n}a_j(x_j+i)\right|^q=\exp\left(-q\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\le1.$$

Положив $A = \exp\left(-q\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$, из (20) получаем

$$\left|f_k\left(\widetilde{x+i}\right)\right|^q \left|G\left(x+i\right)\right| \le 2A,$$

то есть

$$\left|f_k\left(\widetilde{x+i}\right)\right| \left|G\left(x+i\right)\right|^{\frac{1}{q}} \le \left(2A\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (21)$$

Поскольку функция

$$F_k(z) = f_k\left(\tilde{z}+i\right)\left(G\left(z+i\right)\right)^{\frac{1}{q}}, k = 1, 2, ...,$$

в полупространстве $\mathbb{C}_+^m$ представима интегралом Пуассона (см. [13], [14]), при этом $F_k \in H^\infty\left(\mathbb{C}_+^m\right)$, то мы получим оценку (21) в полупространстве $\mathbb{C}_+^m$, то есть

$$\left|f_k\left(\tilde{z}+i\right)\right|^q \left|G\left(z+i\right)\right| \le 2A, \qquad (22)$$

при всех $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}_+^m$.

Учитывая, что

$$\lim_{k\to+\infty} f_k\left(z_1, ..., z_m, i, ..., i\right) = e^{-\sum\limits_{j=1}^{m} ia_j z_j + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_j}, (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}_+^m,$$

и переходя к пределу в неравенстве (22), окончательно получим

$$\left(\exp\sum_{j=1}^{m} qa_j y_j + q\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right) \le 2A \times \prod_{j=1}^{m} \exp(cp_j\left(3\left|z_j\right|\right)); (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}_+^m. \qquad (23)$$

Но из (3) следует, что

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{p_j\left(3y\right)}{y} = 0, j = \overline{1, m},$$

что невозможно ввиду оценки (23).

Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Сначала докажем, что если $f \in H^\infty\left(\mathbb{C}_{-\eta}^n\right)$, $f(z) \ne 0, z \in \mathbb{C}_+^n \cup \mathbb{R}^n$, при некотором $\eta > 0$, то функция $(\ln f)^m$, где выбрана главная ветвь логарифма, принадлежит классу $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, $1 \le q < +\infty$, $P \in \Omega$.

Действительно, не умаляя общности, можно предположить, что $\left|f\left(z\right)\right| \le 1, z \in \mathbb{C}_{-\eta}^n$.

Поэтому функция $\Psi\left(z\right) = -i\ln f\left(z-i\delta\right)$ удовлетворяет условию $Im\Psi\left(z\right) \ge 0$, при этом $\Psi \in H\left(\mathbb{C}_{\frac{-\eta}{2}}^n\right)$. Положим $\delta = \dfrac{\eta}{2}$ и применим формулу типа формулы Шварца для функции Ψ в $\mathbb{C}_+^n$ (см.[13]).

Получим

$$\Psi\left(z\right) = \frac{2i^n}{\left(2\pi\right)^n}\int\limits_{R^n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{i+z_j}{z_j-t_j}\right)\frac{1}{i+t_j} \times \ln\frac{1}{\left|f\left(t\right)\right|} + i\arg f(i).$$

Поэтому

$$\left|\ln f\left|z-i\delta\right|\right| \le \frac{2}{\left(2\pi\right)^n}\int\limits_{R^n}\prod_{j=1}^{n}\left(\left|\frac{i+z_j}{z_j-t_j}\right|\frac{1}{i+t_j}\right) \times \ln\frac{1}{\left|f\left(t-i\delta\right)\right|}dt + c_0.$$

Теперь, используя элементарную оценку

$$\sup_{t\in R}\left|\frac{i-t}{z-t}\right| = \frac{\left|z-i\right| + \left|z+i\right|}{2Imz},$$

где $z \in \mathbb{C}_+$ (см. [12]), получим

$$|\ln|f(z-i\delta)|| \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{|i+z_j|}{|i-t_j|} \frac{|i-t_j|}{|z_j-t_j|(i+t_j)} \right) \times \ln \frac{1}{|f(t-i\delta)|} \leq$$

$$\leq \frac{2}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \prod_{j=1}^{n} (1+|z_j|) \int\limits_{R^n} \frac{\ln \frac{1}{|f(t-i\delta)|}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(1+t_j^2\right)} \times \prod_{j=1}^{n} \sup_{t_j \in R} \left| \frac{i-t_j}{z_j-t_j} \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \left[(1+|z_j|) \left(\frac{|z_j-1|+|z_j+1|}{2Imz_j} \right) \right] \times \int\limits_{R^n} \frac{\ln \frac{1}{|f(t-i\delta)|}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(1+t_j^2\right)} dt_1 ... dt_n, t=(t_1,...,t_n).$$

Таким образом, окончательно получим

$$|\ln|f(z-i\delta)|| \leq const \int\limits_{R^n} \frac{\ln \frac{1}{|f(t-i\delta)|}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(1+t_j^2\right)} dt \times \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(1+|z_j|^2\right)}{Imz_j} \leq const \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(1+|z_j|^2\right)}{Imz_j}.$$

Положим в последнем неравенстве $\zeta = z - i\delta$. Тогда если $Im\zeta_j \geq 0$, то $Imz_j \geq \delta$, $1 \leq j \leq n$. Следовательно,

$$|\ln|f(\zeta)|| \leq const \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(1+|z_j|^2\right)}{Imz_j} \leq const \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+|z_k|^2\right)}{\delta}, \zeta \in \mathbb{C}_+^n. \tag{24}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (см. [13])

$$\int\limits_{R^n} \frac{\ln \frac{1}{|f(t-i\delta)|}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(1+t_j^2\right)} dt_1 ... dt_n < +\infty, t=(t_1,...,t_n).$$

Из оценки (24) мы получим, что функция $\Psi_m(z) = (\ln f(z))^m$ принадлежит классу $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$ при всех $1 \leq q < +\infty$. Теперь применим схему доказательства теоремы 1. Пусть $1 \leq q < +\infty$.

Положим снова

$$e(t) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} f^t(\zeta) \Psi(\zeta) e^{-P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta), 0 \leq t \leq 1,$$

где выбрана главная ветвь степенной функции, а Ψ – произвольная функция из $A_P^{q'}\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} \Psi(\zeta) F(\zeta) e^{-P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta) = 0,$$

для произвольного $F \in E_q(f)$. Напомним, что $E_q(f)$ – замыкание множества $H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right) f$ в пространстве $A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$. Ясно, что

$$e^{(m)}(t) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} f^t(\zeta) (\ln f(\zeta))^m \Psi(\zeta) e^{-P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta).$$

Как и при доказательстве теоремы 1, докажем, что $e^{(m)}(1) = 0$, $m = 0, 1...$

Действительно,

$$e^{(m)}(1) = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} f(\zeta)(\ln f(\zeta))^m e^{-P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta).$$

Поэтому для произвольной последовательности $\{f_k\} \in H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right)$ имеем

$$\|f_k f - f\Psi_m\|_{A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)} \leq \|f\|_\infty \|f_k - \Psi_m\|_{A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)},$$

где $\Psi_m = (\ln f)^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

Как было установлено выше, $\Psi_m \in A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)$, поэтому можно подобрать последовательность $\{f_k\}^\infty \in H^\infty\left(\mathbb{C}_+^n\right)$ так, что $\|f_k - \Psi_m\|_{A_P^q\left(\mathbb{C}_+^n\right)} \to 0$ при $k \to +\infty$, $m = 1, 2...$

Итак, $f(\ln f)^m \in E_q(f)$. Перейдем к оценке $e^{(m)}(t)$ на отрезке $[0,1]$.

Имеем

$$\left|e^{(m)}(t)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} \left|f^t(\zeta)\right| |\ln f(\zeta)|^m |\Psi(\zeta)| e^{-P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta).$$

Теперь воспользуемся оценкой

$$\left|f^t(\zeta)\right| \leq (|f(\zeta)| + 1) \leq 2,\ \zeta \in \mathbb{C}_+^n, t \in [0,1].$$

Тогда

$$\left|e^{(m)}(t)\right| \leq 2\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |\ln f(\zeta)|^m |\Psi(\zeta)| e^{-P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta).$$

Применяя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\left|e^{(m)}(t)\right| \leq 2\left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |\ln f(\zeta)|^{qm} e^{-qP(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |\Psi(\zeta)|^{q'} e^{-q'P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta)\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Следовательно, если $0 < s < 1$, то

$$\left|e^{(m)}(t)\right| \leq 2\left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} \left(|\ln f(\zeta)|^m e^{-sP(|\zeta|)}\right)^q \times e^{(-q(1-s)P(|\zeta|))} dm_{2n}(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |\Psi(\zeta)|^{q'} e^{-q'P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta)\right)^{\frac{1}{q'}} \leq$$

$$\leq 2M_m \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} e^{-(q(1-s)P(|\zeta|))} dm_{2n}(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |\Psi(\zeta)|^{q'} e^{-q'P(|\zeta|)} dm_{2n}(\zeta)\right)^{\frac{1}{q'}},$$

где $s \in (0,1)$.

Учитывая, что $P \in \Omega$, окончательно получаем

$$\left|e^{(m)}(t)\right| \leq A^m M_m, m \in \mathbb{Z}_+, t \in [0,1].$$

Остается использовать условие $e^{(m)}(1) = 0, m = 0, 1, ...$ При этом из расходимости ряда следует, что e принадлежит квазианалитическому классу Карлемана – Островского (см. [12]). Поэтому $e(0) = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N.K. Nikolski *Operators, functions and system: An easy reading, Providence.* RI:Amer. Math. Soc. 2001. **1**; (Math. Surveys and monograph, **92**. 498 pp.
2. Келдыш М.В. *Sur l'approximation en moyenne par polynomes les functions d'une variable complexe* // Мат. сб., **16**:1. 1945. С. 1–20.
3. A. Beurling *A critical topology in harmonic analysis on semigroups* // Acta. Math. 1964. **112**:3-4.P. 213–215.
4. Никольский Н.К. *Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа* // Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова, **120**. 1974. С. 3–270.
5. Геворкян И.М., Шамоян Ф.А. *О слабой обратимости в пространствах аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи его границы* // ДАН Арм.ССР. **82**:4. 1986. С. 156–159.
6. O. El-Fallah, K. Kellay, K. Seip *Cyclicity of singular inner functions from the corona theorem* // Journal of the institute of Mathematics of Jossieu. 2012. **11**: 6. P. 815–824.
7. Гарнет Дж. *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир, 1984.
8. Шамоян Ф.А. *Слабо обратимые элементы в весовых анизотропных пространствах аналитических в поликруге функций* // Мат. сборник, **193**. 2002. С. 143–161.
9. Джрбашян М.М. *Метрические признаки полноты систем полиномов при взвешанном приближении* // ДАН СССР. 1949. **56**:6. С. 1034–1040.
10. Мергелян С.Н. *Весовые приближения многочленами* // Успехи мат. наук. 1956. **9**:5. С. 107–152.
11. Шамоян Ф.А. *О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций* // Изв. РАН, сер. Матем. **60**:5. 1996. С. 191–201.
12. P. Koosis *The Logarithmic Integral, I.* Cambridge university Press. 2004.
13. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике, 2-ое изд.* М.: Наука, 1979.
14. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* 1974.

Файзо Агитович Шамоян,
Научно-исследовательская лаборатория
комплексного и функционального анализа,
Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского,,
ул. Бежицкая, 14,
241036, г. Брянск, Россия
E-mail: `shamoyanfa@yandex.ru`