ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 99-108.

УДК 517.927.5

ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

Р.Ч. КУЛАЕВ

Аннотация. В работе развивается теория неосцилляции уравнений четвертого порядка на геометрическом графе, возникающих при моделировании стержневых конструкций. Определение неосцилляции уравнения дается в терминах свойств специальной фундаментальной системы решений однородного уравнения. Устанавливается связь свойства неосцилляции со свойством положительности функции Грина некоторых классов краевых задач для уравнения четвертого порядка на графе.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, неосцилляция, функция Грина.

Mathematics Subject Classification: 34C10

1. Введение

Вопрос о неосцилляции дифференциального уравнения занимает одно из центральных мест в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1]–[4]. Напомним, что в классической теории уравнение n-го порядка называется неосциллирующим на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если любое его нетривиальное решение имеет не более $n-1$ нулей, которые считаются с учетом их кратностей [1], [2]. Основное значение это свойство приобретает в контексте исследования осцилляционных свойств спектра краевых задач, и в первую очередь – положительности функции Грина того или иного класса краевых задач. Так, например, для уравнения второго порядка на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ неосцилляция эквивалентна, с одной стороны, существованию положительного на полуинтервале $[a, b)$ решения однородного уравнения, а с другой стороны – положительности функции Грина задачи Дирихле.

Известные на сегодняшний день результаты, связанные с неосцилляцией уравнений на графах, касаются уравнения второго порядка и подробно изложены в монографиях [5], [6]. Свойство неосцилляции уравнения второго порядка на графе базируется на понятии S-зоны, являющейся аналогом промежутка между соседними нулями непрерывной на отрезке функции. Для непрерывной на графе функции под S-зоной понимается любой подграф, на котором функция не имеет нулей и на границе которого она равна нулю. Уравнение второго порядка на графе называется неосциллирующим, если любое его нетривиальное решение не имеет S-зон на графе. Замена в определении неосцилляции уравнения второго порядка «числа нулей» на «число S-зон» позволила получить для уравнения второго порядка на графе точный аналог теории неосцилляции уравнения на отрезке – аналоги теорем сравнения Штурма и критерия неосцилляции Валле–Пуссена. При этом, как и в случае уравнения на отрезке, условия неосцилляции уравнения второго порядка на графе оказались эквивалентны, с одной стороны, положительности решений специальных задач

R.Ch. Kulaev, Comparison theorems for Green function of a fourth order boundary value problem on a graph.

Поступила 10 апреля 2015 г.

Дирихле, а с другой стороны – положительности функции Грина задачи Дирихле. Причем при других краевых условиях функция Грина может оказаться и неположительной.

В данной работе мы изучаем свойство неосцилляции уравнений четвертого порядка на графе, которые возникают при моделировании упругих стержневых конструкций. В работе [7] дан критерий положительности функции Грина некоторых краевых задач для таких уравнений. Согласно [7], положительность функции Грина эквивалентна положительной разрешимости специфических краевых задач четвертого порядка. Этот результат и приведенные выше соображения дают основание в качестве отправной точки при изучении неосцилляции уравнения на графе брать свойство положительности специальной фундаментальной системы решений уравнения на графе. Тем более, что фундаментальная система решений характеризует дифференциальное уравнение в целом. При таком подходе проявляется специфика уравнений четвертого порядка. Если для уравнения второго порядка пространство его решений допускает параметризацию граничными значениями функций, то в случае уравнения четвертого порядка, решение однозначно определяется уже *парами* значений – самого решения и его первой (или второй) производной – в граничных вершинах графа. Поскольку в каждой граничной вершине у нас два параметра, то для уравнения четвертого порядка на графе возникает два вида неосцилляции – слабая и сильная. Для классического случая, когда внутренние вершины графа отсутствуют, эти понятия не различимы, а в случае когда множество внутренних вершин графа не пусто, они, вообще говоря, разнятся. В данной работе мы вводим понятие слабо неосциллирующего уравнения и изучаем следствия этого свойства. Как будет показано, слабая неосцилляция обеспечивает положительность функции Грина для класса задач Дирихле. Помимо этого, свойство слабой неосцилляции позволяет получить принцип сравнения для функций Грина краевых задач Дирихле.

2. Основные определения и обозначения

Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается связное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i, а вершины — через a, b, c или a_j, b_j, c_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер).

Обозначим через $J(\Gamma)$ – множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть граничными и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Мы считаем, что граф Γ – это объединение множества всех его ребер γ_i и множества всех внутренних вершин $J(\Gamma)$. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Ребро, примыкающее к граничной вершине $a \in \partial\Gamma$, нам иногда будет удобнее обозначать γ_a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a, обозначим $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$. Подграфом графа Γ назовем любое связное подмножество графа Γ.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \overset{\circ}{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для таких функций в каждой вершине a графа при $i \in I(a)$ существует предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, который мы также обозначаем через $u_i(a)$. При этом для внутренней вершины a величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$ ($k, i \in I(a)$). Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций для которых $u_k(a) = u_i(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любых $k, i \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их непрерывными на графе. Такое определение вполне естественно, так как мы можем доопределить их по непрерывности на весь граф и положить $u(a) = u_i(a)$, $i \in I(a)$.

Пусть a – некоторая граничная вершина графа и γ_a – примыкающее к ней ребро. Мы будем иногда использовать выражение «вблизи вершины $a \in \partial\Gamma$» взамен выражения «в некоторой малой полуокрестности вершины a, содержащейся в γ_a».

Определим понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\mu(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset \Gamma$ на некоторый интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$ при $l_i > 0$. Функцию $\mu(x)$ будем называть метрической, а величину l_i– длиной ребра γ_i. Для сужения функции $\mu(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\mu)$ интервала $(0, l_i)$ на ребро γ_i. Метрическая функция определяет на каждом ребре графа ориентацию. Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем дифференцируемой на графе Γ, если для каждого ребра $\gamma_i \subset \Gamma$ ее сужение $u_i(x)$ дифференцируемо относительно $\mu_i(x)$. При этом полагаем $u_i'(x_0) = \frac{du_i(x)}{d\mu_i(x)}\big|_{x=x_0} = \lim\limits_{\gamma_i \ni x \to x_0} \frac{\triangle u_i(x)}{\triangle \mu_i(x)}$, $x_0 \in \overline{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные высших порядков. Отметим, что производные нечетных порядков зависят от направления ориентации ребер графа, т. е. определяются с точностью до знака, а для четной производной ориентация не важна. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$. Пространство $C^n[\Gamma]$ допускает естественную нормировку $\|u\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \sup\limits_{x \in \mathring{\Gamma}} |u^{(j)}(x)|$.

Под дифференциальным уравнением на графе мы подразумеваем, следуя [5], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах, которое можно записать в общем виде

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1}$$

При изучении дифференциальных уравнений на графах, важное значение имеет вопрос о том, для каких наборов условий связи в вершинах графа следует ожидать распространения таких ключевых свойств уравнения, как характер расположения точек экстремума (принцип максимума), положительность функции Грина соответствующей краевой задачи, свойства спектра и т.п. Понятно, что такое распространение вряд ли возможно для всех условий. Поэтому основой для выделения классов наборов условий в вершинах графа, в сочетании с которыми уравнение на графе наследует ключевые свойства уравнения на отрезке, должны служить математические модели реальных физических явлений. Именно это соображение мы берем в качестве посылки при выделении классов уравнений 4-го порядка на графе, для которых изучаются аналоги свойств скалярных уравнений на отрезке.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \mathring{\Gamma}, \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x \in \mathring{\Gamma}} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geqslant 0$ на Γ, $f(x) \in C[\Gamma]$, дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \\ \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\alpha_{ki}(a)u_i''(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\alpha_{ji}(a)u_i''(a) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i\in I(a)} D^3u_i(a)+\delta(a)u(a)=f(a),\quad a\in J(\Gamma). \tag{4}$$

При этом, мы считаем, что в условиях (3), (4) все производные считаются в направлении от вершины $a\in J(\Gamma)$; k, j – фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i\in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $f(a)$ – заданные числа, причем $\alpha_{kk}(a)=\alpha_{jj}(a)=1$ и $\alpha_{kj}(a)=\alpha_{jk}(a)=0$, $\delta(a)\geqslant 0$, а в (4) через D^3u обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')'-q(x)u'$. Кроме того, если к внутренней вершине a примыкает всего два ребра γ_i и γ_k, то полагаем, что все величины и соотношения, связанные с индексом j в системе условий (3), (4) отсутствуют. В этом случае условия (3), (4) принимают вид:

$$u_i(a)=u_k(a),\quad u_i'(a)=\alpha_{ki}(a)u_k'(a),$$
$$\alpha_{ki}(a)p_i(a)u_i''(a)+p_k(a)(a)u_k''(a)(a)=0,\quad D^3u_i(a)+D^3u_k(a)+\delta(a)u(a)=f(a).$$

Таким образом, левая часть Lu уравнения (1) – это левые части уравнений (2) на ребрах вместе с равенствами (3) и левыми частями условий (4) на $J(\Gamma)$, а правая часть

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in \mathring{\Gamma};\\ f(a), & \text{если } a\in J(\Gamma).\end{cases}$$

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x)\in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую на каждом ребре графа, соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине – условиям (3), (4).

При исследовании свойств решений уравнения (1) мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

• $p(x)\in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x)>0$, $q(x)\in C^1[\Gamma]$, $q(x)\geqslant 0$ на Γ, $f(x)\in C[\Gamma]$;

• граф Γ является деревом;

• для каждой вершины $a\in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i\in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;

• для каждой вершины $a\in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j,k\in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i\in I(a)\setminus\{j,k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a)\leqslant 0$, $\alpha_{ki}(a)\leqslant 0$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Уравнение (1) имеет естественную физическую интерпретацию [9]. Оно возникает при моделировании малых деформаций (без учета деформаций кручения) плоской механической системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней и имеющей структуру сети. Узлы системы образованы в результате жесткого соединения трех и более концов различных стержней. При этом полагается, что в некоторых точках (не обязательно узловых или граничных) система упруго подперта. Поэтому первая серия предположений определяется физическим смыслом задачи. А вот последние два предположения требуют дополнительного объяснения.

Условия непрерывности вида $u_i(a)=u_k(a)$ для каждой внутренней вершины мы можем задавать, перебирая всевозможные индексы $i,k\in I(a)$, однако, содержательную часть несут лишь $|I(a)|-1$ из всех таких условий, где $|I(a)|$ – число ребер графа, примыкающих к вершине a. Таковыми, например, являются условия с произвольно фиксированным индексом $k\in I(a)$ и всеми $i\in I(a)\setminus k$. Аналогичные суждения можно делать относительно условий для первых производных из (4), которые с физической точки зрения описывают компланарность всех троек касательных векторов $u_i'(a)$, $i\in I(a)$: если θ_{is}– угол между осевыми линиями i–го и s–го стержней, примыкающих к вершине $a\in J(\Gamma)$, то $\alpha_{ji}(a)=-\frac{sin\theta_{ki}}{sin\theta_{kj}}$, $\alpha_{ki}(a)=-\frac{sin\theta_{ij}}{sin\theta_{kj}}$, причем фиксированные индексы k и j выбираются так, чтобы $0 < \theta_{kj} < \pi$. Поэтому предположение о том, что для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля, означает, что осевые линии различных стержней системы не накладываются друг на друга. Из этого же предположения следует, что условия для первых производных могут быть заменены их линейными комбинациями того же вида так, что любой наперед заданный индекс $i \in I(a)$ будет одним из двух базисных. Что касается второго базисного индекса, то он не всегда может быть выбран произвольно. Такая ситуация возникает в случае, когда в заданных условиях для первых производных из (4) одна из констант $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$, $i \neq j, k$, равна нулю: если, например, для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ будет выполняться равенство $\alpha_{ji}(a) = 0$, то индексы i и k не могут быть сделаны одновременно базисными. Из этого следует, что из всех возможных вариантов условий гладкости содержательную часть несут лишь $|I(a)| - 2$ из всех таких соотношений, например, когда фиксированы два каких-нибудь возможных базисных индекса $j, k \in I(a)$, а $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$.

Учитывая эти комментарии и результаты работы [8], [10], последнее из наших предположений гарантирует невырожденность краевой задачи для уравнения (1) на графе Γ (или на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$) с краевыми условиями вида

$$\begin{gathered} u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma \; (a \in \partial\Gamma_0), \\ \vartheta(a), \beta(a) \geqslant 0, \; \vartheta(a) + \beta(a) > 0. \end{gathered} \tag{5}$$

В краевых условиях мы всегда полагаем, что каждое граничное ребро графа Γ (подграфа Γ_0) ориентировано от граничной вершины, к которой оно примыкает.

3. Фундаментальная система решений уравнения (1)

Однозначная разрешимость краевой задачи (1), (5) дает возможность параметризации пространства решений уравнения (1) на графе парами значений функций и их первой (или второй) производной в граничных вершинах графа.

Лемма 1. *Соответствие между решениями однородного дифференциального уравнения* (1) *и упорядоченными парами значений решений и их первой (или второй) производной на границе является взаимно однозначным.*

Доказательство. В силу предположений относительно коэффициентов дифференциального уравнения (1) и краевых условий (5), а также результатов работ [8], [10], однородная краевая задача (1), (5), имеет только тривиальное решение. Следовательно, неоднородная краевая задача (1), (5) имеет единственное решение. Это означает, что отображение

$$u \mapsto \left\{ \left(u(a), u^{(\omega_a)}(a) \right) \right\}_{a \in \partial\Gamma},$$

где $\omega_a = 1$ или $\omega_a = 2$, является обратимым и сюръективным, а значит, и взаимно однозначным. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $|\partial\Gamma| = m$. *Тогда размерность пространства решений однородного дифференциального уравнения* (1) *равна* $2m$.

Следствие 2. *Пусть* $|\partial\Gamma| = m$. *Тогда множество всех решений однородного уравнения* (1), *удовлетворяющих* n *условиям из полного набора краевых условий* (5), *образует подпространство размерности* $2m - n$.

4. Слабая неосцилляция уравнения (1)

Сначала мы исследуем качественные свойства решений однородного уравнения (1), которые равны нулю на всей границе графа. Как показывают результаты работы [7], свойства таких функций определяют знак функции Грина задачи Дирихле для уравнения (1).

Для каждой вершины $a \in \partial\Gamma$ введем в рассмотрение краевую задачу Дирихле

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 1, \\ u(b) = 0, \quad \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = 0, \;\; b \in \partial\Gamma \setminus a. \end{gathered} \tag{6}$$

Из леммы 1 и ее следствий 1, 2 следует, что для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ краевая задача (6) однозначно разрешима. Из результатов работы [7] следует, что функция Грина краевой задачи (1), (5) строго положительна на $\Gamma \times \Gamma$ тогда и только тогда, когда для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (6) положительно на всем графе Γ (см. [7]). Понятно, что решение краевой задачи (6) зависит от значений функций $\vartheta(\cdot), \beta(\cdot) : \partial\Gamma \to \mathbb{R}_+$, определяющих коэффициенты в краевых условиях (5). В работе [11] показано, что если граница графа Γ состоит только из двух вершин, т.е. если граф Γ состоит из последовательно соединенных в цепь ребер, то знакопостоянство решений краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$ никак не связано со значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$, а зависит только от коэффициентов дифференциального уравнения (1). Если же граф не гомеоморфен интервалу, то здесь ситуация совсем иная. При изменении коэффициентов краевых условий решение краевой задачи (6) (а с ним и функция Грина) может потерять свойство положительности, а может и, наоборот, приобрести его, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример. Рассмотрим плоский граф $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из трех ребер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = 1, 2, 3$, имеющих общий конец b, который является внутренней вершиной графа. Считая ребра γ_i ориентированными от граничных вершин a_i, рассмотрим на Γ однородное уравнение

$$\begin{gathered} u^{IV} = 0, \quad x \in \gamma_i, \\ u_1(b) = u_2(b) = u_3(b), \quad u_1'(b) = -u_2'(b) - u_3'(b), \\ -u_1''(b) + u_2''(b) = 0, \quad -u_1''(b) + u_3''(b) = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} u_i'''(b) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Положим, что длины l_i ребер графа равны $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = \frac{1}{5}$. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (7) с условиями шарнира в каждой граничной вершине $u(a_i) = u''(a_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. В [14] показано, что соответствующая функция Грина положительна, а в [7] показано, что положительность функции Грина задачи (1), (5) эквивалентна положительности на Γ решений всех краевых задач (6). Следовательно, если в краевых условиях (6) будет $\vartheta(\cdot) \equiv 0$, то решения всех задач (6) для уравнения (7) будут положительны на Γ.

Рассмотрим теперь решение $y_{a_1}(x)$ краевой задачи (6) для уравнения (7) с условиями жесткого закрепления (случай $\beta(\cdot) \equiv 0$), которое соответствует вершине $a_1 \in \partial\Gamma$. Привлекая метрическую функцию $\mu = \mu(x)$, будем иметь

$$y_{a_1}(x) = \begin{cases} Y_{11}\frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{12}\mu^2(x) + \mu(x), & x \in \gamma_1; \\ Y_{j1}\frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{j2}\frac{\mu^2(x)}{2}, & x \in \gamma_j, \;\; j = 2, 3. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} Y_{11} \approx 3.681, \;\; Y_{12} \approx -3.184, \\ Y_{21} \approx 0.681, \;\; Y_{22} \approx -0.184 \quad Y_{31} \approx -4.362, \;\; Y_{32} \approx 1.37. \end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что $y''_{a_1}(a_2) = \frac{d^2}{d\mu(x)^2}\left(Y_{21}\frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{22}\frac{\mu^2(x)}{2}\right)\Big|_{x=a_2} = Y_{22} < 0$. Поскольку $y_{a_1}(a_2) = 0$, то заключаем, что функция $y_{a_1}(x)$ отрицательна вблизи граничной вершины a_2.

Рассмотрим две пары неотрицательных функций $\beta(\cdot)$, $\widetilde{\beta}(\cdot)$ и $\vartheta(\cdot)$, $\widetilde{\vartheta}(\cdot)$, определенных на $\partial\Gamma$ и удовлетворяющих условиям

$$\beta(a)+\vartheta(a)>0, \quad \widetilde{\beta}(a)+\widetilde{\vartheta}(a)>0, \quad a\in\partial\Gamma.$$

Каждая пара $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ и $\widetilde{\beta}(\cdot)$, $\widetilde{\vartheta}(\cdot)$ определяет свой набор краевых задач (6), $a\in\partial\Gamma$, решения которых мы обозначим через $z_a(x)$ и $\widetilde{z}_a(x)$.

Лемма 2. *Пусть всюду на $\partial\Gamma$ выполнено неравенство $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)}\geqslant\frac{\widetilde{\beta}(a)}{\widetilde{\vartheta}(a)}$ (в случае $\vartheta(a)=0$ полагаем $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)}=\infty$, аналогично при $\widetilde{\vartheta}(a)=0$). Если все функции $\widetilde{z}_a(x)$, $a\in\partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ, то и все функции $z_a(x)$ положительны на Γ.*

Доказательство. Если $\frac{\beta(\cdot)}{\vartheta(\cdot)}\equiv\frac{\widetilde{\beta}(\cdot)}{\widetilde{\vartheta}(\cdot)}$ на $\partial\Gamma$, то, в силу невырожденности задач (6), будем иметь $z_a(x)\equiv\widetilde{z}_a(x)>0$ для всех $a\in\partial\Gamma$. Поэтому рассмотрим случай $\frac{\beta(\cdot)}{\vartheta(\cdot)}\not\equiv\frac{\widetilde{\beta}(\cdot)}{\widetilde{\vartheta}(\cdot)}$. Доказательство будем вести индукцией по количеству граничных вершин графа, в которых выполнено строгое неравенство $\frac{\beta(\cdot)}{\vartheta(\cdot)}>\frac{\widetilde{\beta}(\cdot)}{\widetilde{\vartheta}(\cdot)}$.

Пусть неравенство $\frac{\beta(\cdot)}{\vartheta(\cdot)}>\frac{\widetilde{\beta}(\cdot)}{\widetilde{\vartheta}(\cdot)}$ выполняется только в одной вершине $b\in\partial\Gamma$. Из невырожденности краевой задачи (6) следует $z_b(x)\equiv\lambda\widetilde{z}_b(x)$ при некотором $\lambda>0$. Поэтому $z_b(x)>0$ на всем Γ.

Рассмотрим теперь функции $z_a(x)$, соответствующие другим граничным вершинам. Зафиксируем произвольную граничную вершину $a\in\partial\Gamma\setminus b$ и определим функцию $r(x)=z_a(x)-\widetilde{z}_a(x)$. Очевидно, что функция $r(x)$ удовлетворяет на $\partial\Gamma\setminus\{a,b\}$ тем же краевым условиям, что и функции $z_a(x)$, $\widetilde{z}_a(x)$, а в вершине a однородному краевому условию

$$\vartheta(a)r'(a)-\beta(a)r''(a)=0.$$

Посмотрим на свойства функции $r(x)$ в вершине b. Сразу отметим, что поскольку $\widetilde{z}_a(x)>0$ на всем графе Γ, то из краевых условий $\widetilde{z}_a(b)=0$ и $\widetilde{\vartheta}(b)\widetilde{z}_a'(b)-\widetilde{\beta}(b)\widetilde{z}_a''(b)=0$ следует, что $\widetilde{z}_a'(b)\widetilde{z}_a''(b)\geqslant 0$, а значит, $\widetilde{z}_a'(b)\geqslant 0$ и $\widetilde{z}_a''(b)\geqslant 0$. Далее, так как $\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)}>\frac{\widetilde{\beta}(b)}{\widetilde{\vartheta}(b)}$, то $\beta(b)>0$ и $\widetilde{\vartheta}(b)>0$. Поэтому для функции $r(x)$ будем иметь

$$\vartheta(b)r'(b)-\beta(b)r''(b)=\vartheta(b)z_a'(b)-\beta(b)z_a''(b)-\vartheta(b)\widetilde{z}_a'(b)+\beta(b)\widetilde{z}_a''(b)=$$
$$=\beta(b)\left[-\frac{\vartheta(b)}{\beta(b)}\widetilde{z}_a'(b)+\widetilde{z}_a''(b)\right]\geqslant\beta(b)\left[-\frac{\widetilde{\vartheta}(b)}{\widetilde{\beta}(b)}\widetilde{z}_a'(b)+\widetilde{z}_a''(b)\right]=0.$$

Таким образом, функция $r(x)$ является решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям

$$r(b)=0, \quad \vartheta(b)r'(b)-\beta(b)r''(b)\geqslant 0,$$
$$r(c)=0, \quad \vartheta(c)r'(c)-\beta(c)r''(c)=0, \quad c\in\partial\Gamma\setminus b.$$

Следовательно, либо $r(x)\equiv 0$ на Γ, либо $r(x)\equiv\lambda\widetilde{z}_b(x)$ при некотором $\lambda>0$. Значит, $r(x)\geqslant 0$ на всем графе, т.е. $z_a(x)\geqslant\widetilde{z}_a(x)>0$, $a\in\partial\Gamma$.

Предположим, что утверждение леммы верно для случая, когда неравенство $\frac{\beta(\cdot)}{\vartheta(\cdot)}>\frac{\widetilde{\beta}(\cdot)}{\widetilde{\vartheta}(\cdot)}$ выполняется в любых n граничных вершинах графа при некотором $n\leqslant m-1$, и покажем, что тогда оно верно и в случае строгих неравенств в $(n+1)$–й граничной вершине. Выберем произвольную вершину $b\in\partial\Gamma$ в которой выполнено строгое неравенство $\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)}>\frac{\widetilde{\beta}(b)}{\widetilde{\vartheta}(b)}$. Заменим значение функции $\beta(\cdot)$ в точке $b\in\partial\Gamma$ на $\widetilde{\beta}(b)$, а значение $\vartheta(b)$ на $\widetilde{\vartheta}(b)$ и обозначим через $\widehat{\beta}(\cdot)$ и $\widehat{\vartheta}(\cdot)$ получаемые таким образом функции. Через $\widehat{z}_a(x)$, $a\in\partial\Gamma$, обозначим решения получающихся при такой замене краевых задач (6), $a\in\partial\Gamma$. В силу предположения индукции, сразу при всех $a \in \partial\Gamma$ на всем графе Γ будут выполнены неравенства $\widehat{z}_a(x) > 0$. Далее, для произвольной вершины $a \in \partial\Gamma$ определим функцию $r(x) = z_a(x) - \widehat{z}_a(x)$ и, дословно повторяя рассуждения проведенные выше, показываем, что функция $r(x)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяющим на $\partial\Gamma$ краевым условиям

$$r(b) = 0, \quad \vartheta(b)r'(b) - \beta(b)r''(b) \geqslant 0,$$
$$r(c) = 0, \quad \vartheta(c)r'(c) - \beta(c)r''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus b.$$

Откуда следует тождественное равенство $r(x) \equiv \lambda\widetilde{z}_a(x)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Поэтому $r(x) \geqslant 0$ на всем графе, а значит $z_a(x) \geqslant \widehat{z}_a(x) > 0$. Лемма доказана. □

Определение 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *называется слабо неосциллирующим на графе* Γ, *если для каждой граничной вершины* $a \in \partial\Gamma$ *краевая задача* (6) *имеет при* $\beta(\cdot) \equiv 0$ *положительное на* Γ *решение.*

Следует отметить, что определение слабой неосцилляции распространяется и на уравнение, порожденное обыкновенными дифференциальными уравнениями (2) на ребрах графа с условиями упруго-шарнирного сочленения

$$u_i(a) = u_k(a), \quad \vartheta_i(a)u_i'(a) - \beta_i(a)u_i''(a) = 0, \quad i, k \in I(a),\ a \in J(\Gamma),$$
$$\vartheta_i(\cdot), \beta_i(\cdot) \geqslant 0, \quad \vartheta_i(\cdot) + \beta_i(\cdot) > 0,$$

и условиями (4) на $J(\Gamma)$ (все производные считаются от вершин $a \in J(\Gamma)$). Свойства решений этого уравнения, которое мы назовем $(1')$, изучались в работах Ю.В. Покорного, А.В. Боровских, К.П. Лазарева и Р.О. Мустафакулова (см. [12], [13] и библиографию там же) и подробно представлены в монографии [5, Гл. 8]. Учитывая результаты [5], можно утверждать, что уравнение $(1')$ всегда является слабо неосциллирующим. Действительно, если заменить в краевой задаче (6) однородное уравнение (1) на однородное уравнение $(1')$ и обозначить через $v_a(x)$ решение полученной краевой задачи, то, как следует из результатов [5], [13], функция $v_a(x)$ монотонна на каждом ребре графа, кроме граничного ребра $\gamma_a = (a, b)$, $a \in \partial\Gamma$, $b \in J(\Gamma)$. Кроме того (см. [5], [13]), любое решение этого уравнения, удовлетворяющее в каждой граничной вершине графа условию $u'(\cdot)u''(\cdot) \geqslant 0$, достигает своих максимума и минимума на границе графа (принцип максимума). Поскольку $v_a'(a) > 0$, то либо функция $v_a(x)$ имеет точку максимума $\xi \in \gamma_a$ такую, что $v_a'(\xi) = 0$ и $v_a(x) > 0$ на $(a, \xi] \subset \gamma_a$, либо $v_a'(x) > 0$ на γ_a, и функция $v_a(x)$ возрастает на всем ребре γ_a. В первом случае, в силу принципа максимума, $v_a(x) > 0$ на $\Gamma \setminus (a, \xi)$, а значит $v_a(x) > 0$ на всем Γ. Во втором случае, функция $v_a(x)$ положительна на ребре γ_a и в вершине $b \in J(\Gamma)$. Отсюда и из принципа максимума следует, что $v_a(x) > 0$ на каждой ветви графа, выходящей из вершины $b \in J(\Gamma)$. Следовательно, в любом случае решение $v_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительно на Γ, т.е. уравнение $(1')$ слабо не осциллирует.

В терминах слабой неосцилляции удается сформулировать ряд полезных свойств решений уравнения четвертого порядка, а с ними и свойств функций Грина краевых задач Дирихле для уравнения четвертого порядка (1).

Следствие 3. *Пусть дифференциальное уравнение* (1) *слабо не осциллирует на* Γ. *Тогда решение краевой задачи* (6) *положительно на всем графе* Γ *при любых допустимых значениях коэффициентов* $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ *краевых условий.*

Лемма 3. *Пусть дифференциальное уравнение* (1) *слабо не осциллирует на* Γ. *Тогда для любого решения уравнения* (1), *равного нулю на* $\partial\Gamma$, *из неравенства* $u'(x) \geqslant 0$ *на* $\partial\Gamma$ *следует* $u(x) \geqslant 0$ *на* Γ. *Если, при этом,* $u'(x) \not\equiv 0$ *на* $\partial\Gamma$, *то* $u(x) > 0$ *на всем графе* Γ.

Доказательство почти очевидно: из лемм 1 и следствия 3 следует, что функция $u(x)$ есть линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами положительных решений краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, при $\beta(\cdot) \equiv 0$. Причем, если $u'(a) > 0$ для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$, то и соответствующий коэффициент в линейной комбинации положителен.

Лемма 2, вместе со следствием 3 позволяют сформулировать теорему сравнения для функции Грина краевой задачи Дирихле (1), (5).

Теорема 1. (признак сравнения). *Пусть всюду на $\partial\Gamma$ выполнено неравенство $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} \geqslant \frac{\widetilde{\beta}(a)}{\widetilde{\vartheta}(a)}$ (в случае $\vartheta(a) = 0$ полагаем $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} = \infty$, аналогично при $\widetilde{\vartheta}(a) = 0$). Тогда положительность функции Грина $\widetilde{G}(x,s)$ краевой задачи* (1), (5) *с коэффициентами $\widetilde{\beta}(\cdot)$ и $\widetilde{\vartheta}(\cdot)$ в условиях* (5) *влечет положительность функции Грина $G(x,s)$ задачи* (1), (5) *с коэффициентами $\beta(\cdot)$ и $\vartheta(\cdot)$.*

Доказательство. В работе [7] показано, что функция Грина краевой задачи (1), (5) положительна на $\Gamma \times \Gamma$ тогда и только тогда, когда для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ решение $v_a(x)$ задачи (6) положительно на всем графе Γ. Так как $\widetilde{G}(x,s) > 0$ на $\Gamma \times \Gamma$, то для всех $a \in \partial\Gamma$ будут выполнены строгие неравенства $\widetilde{v}_a(x) > 0$ на всем графе Γ. А из леммы 2 и условий теоремы следует, что для всех $a \in \partial\Gamma$ на всем графе Γ выполняются неравенства $v_a(x) > 0$, влекущие уже положительность функции $G(x,s)$. Теорема доказана. □

В качестве следствий теоремы сравнения выделим ее предельные случаи.

Следствие 4. *Если функция Грина краевой задачи Дирихле для уравнения* (1) *с условиями жесткого закрепления на границе положительна на $\Gamma \times \Gamma$, то положительной будет и функция Грина краевой задачи* (1), (5) *Дирихле с любыми допустимыми значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ в краевых условиях* (5).

Следствие 5. *Если функция Грина краевой задачи Дирихле для уравнения* (1) *с условиями шарнирного закрепления на границе меняет знак на $\Gamma \times \Gamma$, то знакопеременной будет и функция Грина краевой задачи Дирихле с любыми допустимыми значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ в краевых условиях* (5).

Как показывает следствие 4, свойство слабой неосцилляции дифференциального уравнения (1) эквивалентно положительности функции Грина задачи Дирихле (1), (5) с любыми допустимыми значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ краевых условий.

Стоит отметить, связь слабой неосцилляции уравнения (1) с теорией осцилляционных по Гантмахеру–Крейну ядер [15], [16]. Если граф Γ представляет собой цепь последовательно соединенных ребер, то (см. [11], [17]) условие слабой неосцилляции является необходимым и достаточным для осцилляционности функции Грина задачи Дирихле (1), (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин А.Ю. *Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdot + p_n(t)x = 0$* // Успехи мат. наук. Т. 24, № 2. 1969. С. 43–96.
2. Дерр В.Я. *Неосцилляция решений дифференциальных уравнений* // Вестник Удмурдского университета. Вып. 1. 2009. С. 46–89.
3. A. Wintner *One the non–existence of conjugate points* // Amer. J. Math. №. 73. 1953. P. 368–380.
4. Тептин А.Л. *К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи* // Известия ВУЗов. Математика. №. 4. 1999. С. 44–53.
5. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* М.: Физматлит. 2007. 272 с.
6. Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А. *Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.* М.: Физматлит, 2009. 192 с.

7. Кулаев Р.Ч. *Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе* // Дифференц. уравнения. Т. 51, №3. 2015. С. 302–316.
8. Кулаев Р.Ч. *О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе* // Дифференц. уравнения. Т. 50, №1. 2014. С. 27–34.
9. Завгородний М.Г. *Вариационные принципы построения моделей стержневых стержней* // Воронеж: Воронеж. гос. технол. академия. Вып. 4. 2000. С. 59–62.
10. Кулаев Р.Ч. Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. Т. 51, №2. 2015. С. 161–173.
11. Кулаев Р.Ч. *Условия осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи для уравнения четвертого порядка* // Владикавказский матем. журнал. Т. 17, вып. 1. 2015. С. 48–60.
12. Боровских А.В., Мустафакулов Р.О., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. *Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети* // Докл. РАН. Т. 345, №6. 1995. С. 730–732.
13. A.V. Borovskikh, K.P. Lazarev *Fourth-order differential equations on geometric graphs* // Journal of Mathematical Science. V. 119, № 6. 2004. P. 719–738.
14. Кулаев Р.Ч. О знаке функции Грина краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Владикавказский матем. журнал. Т. 16, вып. 2. 2014. С. 49–61.
15. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 359 с.
16. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака, II* // Сиб. мат. журнал. Т. 17, №4. 1976. С. 813–830
17. Кулаев Р.Ч. *Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 51, №4. 2015. С. 445–458.

Руслан Черменович Кулаев,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: `kulaev@smath.ru`