ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 75-79.

УДК 517.9

ОБ ОРБИТАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ТИПА ПОММЬЕ

О.А. ИВАНОВА, С.Н. МЕЛИХОВ

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости, содержащая 0; $A(\Omega)$ — пространство Фреше всех аналитических в Ω функций. Фиксированная аналитическая в Ω функция g_0 такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор типа Поммье, линейно и непрерывно отображающий $A(\Omega)$ в себя. В статье описываются циклические элементы оператора типа Поммье в $A(\Omega)$. Результаты подобного рода были получены ранее для функций g_0, не имеющих нулей в Ω.

Ключевые слова: оператор Поммье, циклический элемент, аналитическая функция.

Mathematics Subject Classification: 47A16, 47B38, 46E10

Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая 0; $A(\Omega)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в Ω. Пусть функция $g_0 \in A(\Omega)$ такова, что $g_0(0) = 1$. Введем оператор *типа Поммье* следующим образом. Для $f \in A(\Omega)$ положим

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0. \end{cases}$$

Оператор D_{0,g_0} линейно и непрерывно отображает $A(\Omega)$ в себя. При $g_0 \equiv 1$ положим $D_0 := D_{0,g_0}$. Оператор D_0 стали называть оператором Поммье после работ М. Поммье [10]–[13], в которых изучались последовательные остатки рядов Тейлора функций, аналитических в единичном круге.

В настоящей работе идет речь о циклических элементах оператора D_{0,g_0} в $A(\Omega)$. При этом для локально выпуклого пространства E, линейного непрерывного оператора $A : E \to E$ элемент $x \in E$ называется *циклическим* элементом оператора A, если система (орбита x) $\{A^n(x) : n \geq 0\}$ полна в E, т. е. замыкание ее линейной оболочки в E совпадает с E.

При $g_0 \equiv 1$ условия полноты системы $\{D^n_{0,g_0}(f) : n \geq 0\}$ в $A(\Omega)$ были получены М. Г. Хаплановым [5], Н. И. Нагнибидой [4] (в случае, когда Ω является кругом). В работах Ю. А. Казьмина [2] и Н. Е. Линчук [3] (тоже для $g_0 \equiv 1$) получены критерии цикличности $f \in A(\Omega)$ относительно оператора D_{0,g_0}, соответственно, для произвольной односвязной области Ω и конечносвязной области G в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащих 0. В работе [9] Ю. С. Линчук доказал необходимые и достаточные условия полноты в $A(\Omega)$ системы $\{A^n(f) : n \geq 0\}$, где

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov, On the orbits of analytic functions with respect to a Pommiez type operator.

Поступила 14 мая 2015 г.

$A(g)(z) = D_0(g)(z) + g(0)\varphi(z)$, $g \in A(\Omega)$, а $\varphi \in A(\Omega)$ — фиксированная функция [9, следствие, с. 387]. При этом в соответствующем критерии в [9] предполагается, что функция $1 - z\varphi(z)$ в Ω не обращается в 0. Легко видеть, что $A = D_{0,g_0}$, где $g_0(z) = 1 - z\varphi(z)$.

В этой статье доказан критерий цикличности функции $f \in A(\Omega)$ относительно оператора D_{0,g_0} уже для *произвольной* функции $g_0 \in A(\Omega)$ (такой, что $g_0(0) = 1$), не обязательно отличной от 0 во всей области Ω. Доказательство соответствующего критерия в [9] сводится (посредством [9, лемма], см. лемму 1 ниже) к случаю $g_0 \equiv 1$, исследованному в [3, теорема 2] с помощью теории характеристических функций линейных непрерывных операторов в $A(\Omega)$ [8]. Это сведение невозможно, если g_0 имеет в Ω нули.

В данной работе применяются двойственность Кете-Силвы-Гротендика между $A(\Omega)$ и пространством $A_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ ростков функций, аналитических на $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ и равных 0 в ∞ [8], а также результаты о предельных значениях интеграла типа Коши [1, Гл. I, § 4].

Зафиксируем функцию $g_0 \in A(\Omega)$ такую, что $g_0(0) = 1$. Следуя [6], [7], для $z \in \Omega$ введем *оператор сдвига* для D_{0,g_0}

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)g_0(z) - zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in A(\Omega)$. Для любого $z \in \Omega$ оператор T_z линейно и непрерывно отображает $A(\Omega)$ в себя.

Мы будем использовать абстрактный функциональный критерий цикличности [9, лемма]:

Лемма 1. Следующие утверждения равносильны:

(i) f — циклический элемент оператора D_{0,g_0} в $A(\Omega)$.
(ii) Система $\{T_z(f) : z \in \Omega\}$ полна в $A(\Omega)$.

(Этот результат доказан в [9] *без предположения* о том, что g_0 не имеет нули в Ω).

Далее $A(\Omega)'$ обозначает топологическое сопряженное к $A(\Omega)$ пространство.

Теорема 1. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, $0 \in \Omega$. Следующие утверждения равносильны:

(i) f не является циклическим элементом оператора D_{0,g_0} в $A(\Omega)$.
(ii) Функции f и g_0 имеют общие нули в Ω или существует рациональная функция R такая, что $f = g_0 R$.

$\square$ $(ii) \Rightarrow (i)$: Пусть f и g_0 имеют общий нуль $\alpha \in \Omega$. Тогда $D^n_{0,g_0}(f)(\alpha) = 0$ для любого $n \geq 0$, и любая функция из $F := \operatorname{span}\Big\{D^n_{0,g_0}(f) : n \geq 0\Big\}$, а также из $\overline{F}$ — замыкания F в $A(\Omega)$ — обращается в нуль в α. Так как в $A(\Omega)$ найдется функция, не обращающаяся в α в нуль, то f не является циклическим элементом D_{0,g_0} в $A(\Omega)$.

Пусть теперь $f = g_0 R$, где R — рациональная функция. Пусть $R = P/Q$, где P, Q — многочлены, $Q \not\equiv 0$. Построим функционал $\varphi \in A(\Omega)' \setminus \{0\}$ такой, что $\varphi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \Omega$. Для этого построим функцию $\gamma \not\equiv 0$, аналитическую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и такую, что $\gamma(\infty) = 0$, для которой

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \gamma(t) T_z(f)(t) dt = 0, \ z \in \Omega \tag{1}$$

($r > 0$ такое, что круг $\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq r\}$ содержится в Ω и многочлен Q на окружности $|t| = r$ не обращается в 0). Пусть $\gamma(t) := \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{c_k}{t^{k+1}}$ (числа c_k и $N \in \mathbb{N}$ будут определены далее).

Условие (1) равносильно тому, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{\gamma(t)g_0(t)}{Q(t)}\frac{tP(t)Q(z)-zP(z)Q(t)}{t-z}dt=0,\ z\in\Omega. \tag{2}$$

(Если $|z|=r$, то подынтегральная функция при $t=z$ доопределяется естественным образом.) Так как P и Q многочлены, то найдутся $M\in\mathbb{N}$, многочлены b_j, $0\le j\le M$, такие, что

$$\frac{tP(t)Q(z)-zP(z)Q(t)}{t-z}=\sum_{j=0}^{M}b_j(z)t^j.$$

Равенство (2) тогда перепишется в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\gamma(t)\frac{g_0(t)}{Q(t)}\sum_{j=0}^{M}b_j(z)t^jdt=0,\ z\in\Omega,$$

т. е.

$$\sum_{j=0}^{M}\Big(\sum_{k=0}^{N}c_k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{g_0(t)}{Q(t)}t^{j-k-1}dt\Big)b_j(z)=0,\ z\in\Omega.$$

Последние равенства выполняются, если

$$\sum_{k=0}^{N}c_ka_{jk}=0,\ 0\le j\le M, \tag{3}$$

где

$$a_{jk}:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{g_0(t)}{Q(t)}t^{j-k-1}dt.$$

Возьмем $N>M$. Тогда система (3) имеет нетривиальное решение c_k, $0\le k\le M$. Поэтому для ненулевого функционала $\varphi\in A(\Omega)'$ такого, что

$$\varphi(f):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\gamma(t)f(t)dt,\ f\in A(\Omega),$$

выполняются равенства

$$\varphi(T_z(f))=0,\ z\in\Omega.$$

Значит, система $\{T_z(f):z\in\Omega\}$ не является полной в $A(\Omega)$, и, вследствие леммы 1, f не является циклическим элементом оператора D_{0,g_0} в $A(\Omega)$.

$(i)\Rightarrow(ii)$: Пусть f не является циклическим элементом оператора D_{0,g_0} в $A(\Omega)$. Тогда, в силу [8], существуют функция $\gamma\in A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$, $\gamma\not\equiv 0$, замкнутая спрямляемая жорданова кривая Γ, лежащая в области аналитичности γ и в Ω, такие, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\gamma(t)\frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}dt=0,\ z\in\operatorname{int}\Gamma. \tag{4}$$

Здесь $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$ обозначает пространство аналитических на $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ функций, обращающихся в 0 в ∞; $\operatorname{int}\Gamma$ — внутренность кривой Γ.

Пусть f и g_0 не имеют общих нулей в Ω. Положим

$$u(z):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{t\gamma(t)f(t)}{t-z}dt,\ v(z):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma(t)g_0(t)}{t-z}dt,\ z\in\operatorname{int}\Gamma.$$

Функции u и v аналитически продолжаются в Ω. Из (4) вытекает, что

$$g_0(z)u(z) - zf(z)v(z) = 0, \ z \in \Omega.$$

Так как у f и g_0 нет общих нулей в Ω, то

$$v_0 := \frac{v}{g_0} \in A(\Omega) \text{ и } u_0 := \frac{u}{f} \in A(\Omega).$$

При этом $u_0(z) = zv_0(z)$, $z \in \Omega$. По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{tf(t)v_0(t)}{t-z} dt = f(z)u_0(z), \ z \in \operatorname{int} \Gamma.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{tf(t)\gamma(t)}{t-z} dt = f(z)u_0(z), \ z \in \operatorname{int} \Gamma.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{tf(t)(\gamma(t) - v_0(t))}{t-z} dt = 0, \ z \in \operatorname{int} \Gamma.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g_0(t)(\gamma(t) - v_0(t))}{t-z} dt = 0, \ z \in \operatorname{int} \Gamma.$$

Положим для $z \in \operatorname{ext} \Gamma$

$$\alpha(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{tf(t)(\gamma(t) - v_0(t))}{t-z} dt,$$

$$\beta(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g_0(t)(\gamma(t) - v_0(t))}{t-z} dt.$$

Здесь символ $\operatorname{ext} \Gamma$ обозначает внешность Γ. Из свойств интеграла типа Коши и его предельных значений (см. [1, Гл. I, § 4]) следует, что функции α и β являются аналитическими в $\operatorname{ext} \Gamma$, аналитически продолжаются в некоторую область, содержащую Γ, обращаются в 0 в ∞, и для $t \in \Gamma$

$$tf(t)(\gamma(t) - v_0(t)) = \alpha(t) \ \text{ и } \ g_0(t)(\gamma(t) - v_0(t)) = \beta(t).$$

Заметим, что $\gamma(t) - v_0(t) \not\equiv 0$ на Γ. Действительно, в противном случае функция $v_0(t)$ аналитически продолжается во внешность Γ, равна 0 в ∞, а значит, тождественно равна 0. Но $\gamma \not\equiv 0$. Отсюда следует, что вне некоторого конечного множества на Γ

$$\frac{f(t)}{g_0(t)} = \frac{\alpha(t)}{t\beta(t)} =: \frac{\alpha(t)}{\omega(t)}.$$

Поэтому мероморфную вне Γ функцию α/ω можно продолжить до мероморфной в Ω функции f/g_0. При этом полученная мероморфная в $\mathbb{C}$ функция имеет конечное число полюсов, ∞ для нее является либо нулем, либо полюсом. Отсюда следует, что $R := \alpha/\omega$ — рациональная функция. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977. 641 с.
2. Казьмин Ю.А. *О последовательных остатках ряда Тейлора* // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, Механика. 1963. № 5. С. 35–46.
3. Линчук Н.Е. *Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения* // Матем. заметки. 1988. Т. 44, № 6. С. 794–802.
4. Нагнибида Н.И. *Об одном классе операторов обобщенного дифференцирования в пространстве аналитических в круге функций* // Теория функций, функциональный анализ в их приложения. Харьков. 1975. Вып. 24. С. 98–106.
5. Хапланов М.Г. *О полноте некоторых систем аналитических функций* // Уч. зап. Ростовск. гос. пед. ин-та: Сб статей. Ростов-на-Дону. 1955. Вып. 3. С. 53–58.
6. Z. Binderman *Functional shifts induced by right invertible operators* // Math. Nachr. 1992. № 157. P. 211–224.
7. I.N. Dimovski, V.Z. Hristov *Commutants of the Pommiez operator* // Int. J. Math. and Math. Science. 2005. V. 8. P. 1239–1251.
8. G. Köthe *Dualität in der Funktionentheorie* // J. Reine Angew. Math. 1953. № 191. P. 30–49.
9. Yu.S. Linchuk *Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable* // Methods of Functional Analysis and Topology. 2006. V. 12, № 4. P. 384–388.
10. M. Pommies *Sur les zéros des reste successifs des séries de Taylor* // Acad. Sci. Univ. Toulouse. 1960. V. 250, № 7. P. 1168–1170.
11. M. Pommies *Sur les restes successifs des séries de Taylor* // C. R. Acad. Sci. 1960. V. 250, № 15. P. 2669–2671.
12. M. Pommies *Sur les restes et les dérivées des séries de Taylor* // C. R. Acad. Sci. 1960. V. 251, № 17. P. 1707–1709.
13. M. Pommies *Sur les différences divisées successives et les restes des séries de Newton généralisées* // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 1964. V. 28. P. 101–110.

Ольга Александровна Иванова,
Южный федеральный университет,
институт математики,
механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: *ivolga@sfedu.ru*

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет,
институт математики,
механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: *melih@math.rsu.ru*