

ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ВЕЛИЧИНЫ НИЖНЕГО ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $\rho \in (0, 1)$ С НУЛЯМИ ЗАДАННЫХ УСРЕДНЕННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

*Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Герновского*

Аннотация. Найдены точные двусторонние оценки величины нижнего типа при порядке $\rho \in (0, 1)$ целых функций, корни которых имеют заданные верхнюю и нижнюю усредненные плотности и распределены либо произвольно в комплексной плоскости, либо на одном луче. Проведен анализ полученных результатов и сравнение их с известными фактами для обычного типа целой функции.

Ключевые слова: тип и нижний тип целой функции, верхняя и нижняя усредненные плотности последовательности нулей.

Mathematics Subject Classification: 30D15

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование зависимости роста целой функции от распределения ее нулей на комплексной плоскости имеет важное значение как в самой теории целых функций, так и во многих ее приложениях (теория интерполяции и аппроксимации экспонентами, проблема нахождения радиусов полноты систем экспонент и общих функциональных систем, спектральная теория операторов, теория вероятностей, негармонический анализ, вопросы аналитического продолжения сумм степенных рядов и рядов Дирихле). Достаточно полно эта зависимость была изучена уже к середине прошлого века в случае «регулярно» растущих функций с «правильно» распределенными нулями (см. работы Б. Я. Левина [1], А. Пфлюгера [2], [3]). Здесь асимптотические формулы для целой функции и ее нулей взаимно определяют друг друга. При отсутствии подобной регулярности асимптотические законы перестают действовать, и на первый план выходят задачи определения точных границ изменения характеристик роста функции в зависимости от границ скорости изменения нулей. Классическими характеристиками роста целых функций являются тип и нижний тип, а скорость изменения нулей измеряется плотностями их распределения. Приведем точные определения.

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности и выписанная в порядке неубывания модулей. Пусть далее $n_{\Lambda}(r) = \sum_{|\lambda_n| \leq r} 1$ — считающая функция (с учетом кратностей) этой последовательности, а $N_{\Lambda}(r) := \int_0^r \frac{n_{\Lambda}(t)}{t} dt$

G.G. BRAICHEV, THE EXACT BOUNDS OF LOWER TYPE MAGNITUDE FOR ENTIRE FUNCTION OF ORDER $\rho \in (0, 1)$ WITH ZEROS OF PRESCRIBED AVERAGE DENSITIES.

© БРАЙЧЕВ Г.Г. 2015.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00281).

Поступила 22 октября 2015 г.

— ее интегральная, или усредненная, считающая функция. Без ущерба для общности мы предполагаем, что $0 \notin \Lambda$.

Зададим $\rho > 0$. Верхняя и нижняя плотности при показателе ρ (ρ -плотности) последовательности Λ определяются равенствами соответственно

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Верхняя и нижняя усредненные ρ -плотности последовательности Λ определяются аналогичными равенствами

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Типом целой функции $f(z)$ при порядке ρ (коротко, ρ -типом) называют величину

$$\sigma_\rho(f) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Замена в этом равенстве верхнего предела на нижний приводит к определению нижнего ρ -типа целой функции, который будем обозначать $\underline{\sigma}_\rho(f)$. Хорошо известны следующие точные оценки (см., например, [1, гл. 4, §1], [4]):

$$\frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho e} \leq \sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \overline{\Delta}_\rho(\Lambda), \quad (1)$$

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda). \quad (2)$$

Оценки сверху в (1), (2) справедливы при $\rho \in (0, 1)$, причем достигаются в случае, когда все нули функции расположены на одном луче, и для них в определении ρ -плотностей существуют обычные пределы (такие последовательности называют измеримыми). Оценки же снизу действуют при любом $\rho > 0$ и достигаются на довольно сложно устроенной последовательности комплексных чисел с равномерно распределенными на $[0, 2\pi]$ аргументами.

Увеличивается ли нижняя граница для ρ -типа целой функции при учете не только верхней, но и нижней ρ -плотности ее нулей? Положительный ответ на этот вопрос вытекает из общего неравенства, приведенного в книге [5, с. 16]:

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho} \exp \left\{ \frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)} - 1 \right\}. \quad (3)$$

Долгое время считалось, что оценка (3) точна, но только недавно А. Ю. Попов [6, теорема 2.1] построил пример, обеспечивающий в (3) равенство и показывающий к тому же, что нижняя оценка (2) не может быть улучшена за счет учета нижней усредненной ρ -плотности нулей. Сказанное позволяет представить ответы к следующим экстремальным задачам.

Зафиксируем числа $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$. Тогда справедливы равенства

$$s_{\mathbb{C}}(\beta; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \} = \frac{\beta}{\rho e}, \quad (4)$$

$$s_{\mathbb{C}}^*(\beta^*; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \} = \beta^*, \quad (5)$$

$$s_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha \} = \frac{\beta}{\rho e} e^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (6)$$

$$s_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^* \} = \beta^*. \quad (7)$$

Как отмечалось выше, оценки сверху в (1), (2) достигаются для целых функций с измеримыми нулями, расположенными на одном луче. Насколько уточняются оценки снизу в (1) — (3), если корни целой функции также лежат на одном луче? Именно для фиксированных чисел $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ требуется вычислить величины

$$s_{\mathbb{R}_+}(\beta; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \bar{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \}, \quad (8)$$

$$s_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \bar{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \}, \quad (9)$$

$$s_{\mathbb{R}_+}^*(\beta^*; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \}, \quad (10)$$

$$s_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*, \bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \}. \quad (11)$$

Экстремальные задачи (8) — (11) решены совсем недавно.

Теорема А (А. Ю. Попов [7]). При любых $\rho \in (0, 1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$s_{\mathbb{R}_+}(\beta; \rho) = \beta C(\rho),$$

где $C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho}$. Нижняя грань $s_{\mathbb{R}_+}(\beta; \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

По поводу задачи (8) см. также [8], [9].

Теорема В (В. Б. Шерстюков [10]). Для произвольного $\rho \in (0, 1)$ и любых чисел $\beta > 0$ и $\alpha \in [0, \beta]$ имеет место равенство

$$s_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Нижняя грань $s_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta; \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \alpha$ и $\bar{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \beta$.

Переход от обычных плотностей к усредненным потребовал привлечения результатов тауберова типа, что вызвало появление корней некоторого трансцендентного уравнения (см. [11]).

Теорема С (Г. Г. Брайчев [12], [13]).

I. При фиксированных $\rho \in (0, 1)$ и $\beta^* > 0$ экстремальная величина (10) находится по формуле

$$s_{\mathbb{R}_+}^*(\beta^*; \rho) = C(\rho)\rho\beta^*,$$

где функция $C(\rho)$ определена в теореме А.

II. При фиксированных $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ экстремальная величина (11) вычисляется по формуле

$$s_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \rho \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (12)$$

где $a_1 = a_1(\alpha^*, \beta^*)$ и $a_2 = a_2(\alpha^*, \beta^*)$, $a_1 \leq 1 \leq a_2$, — корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \alpha^* / \beta^*. \quad (13)$$

Величина $s_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho)$ достигается для некоторой целой функции с нулями $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}$ такими, что $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\bar{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

По поводу задач (10), (11) см. также [14]–[17]. Обратим внимание на то, что в отличие от случая общего расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$, учет нижней усредненной ρ -плотности существенно изменяет величину минимально возможного ρ -типа целых функций, когда $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$.

Подводя итог, можно сказать, что влияние основных плотностных характеристик последовательности нулей Λ_f из \mathbb{C} или из \mathbb{R}_+ целой функции $f(z)$ на величину ее типа полностью изучено. С другой стороны, как показано в статье В. С. Азарина [18] (см. также обзор [19]), целая функция с измеримой последовательностью нулей может не иметь совершенно регулярного роста модуля, т. е. величины ее типа и нижнего типа могут не совпадать. Для полноценного описания поведения даже таких функций $f(z)$ с известной плотностью нулей требуется знать точный диапазон изменения не только типа $\sigma_\rho(f)$, но и нижнего типа $\underline{\sigma}_\rho(f)$. Исследованию экстремальных задач, включающих нижний индикатор и нижний тип целых функций при заданном диапазоне изменения плотностных характеристик нулей, посвящены работы А. А. Гольдберга [20], [21], А. А. Кондратюка [22], В. С. Азарина [23]. Отметим также результаты И. Ф. Красичкова-Терновского, связанные с оценками снизу для целых функций конечного порядка через близкую усредненную характеристику распределения нулей — индекс концентрации (см., например, [24]). Однако, самым естественным задачам, связанным с нижним типом при фиксированных значениях плотностей, уделялось гораздо меньше внимания. Недостаток же фактов общей теории побуждает к поиску частных ответов в каждой конкретной ситуации. Подтверждение этому можно найти в известной монографии А. Ф. Леонтьева [25, гл. VI, § 2, с. 405–409].

Работа посвящена нахождению точных двусторонних оценок нижнего типа целой функции с положительными или произвольно расположенными на плоскости нулями заданных усредненных плотностей. Приведем вначале известное соотношение

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \geq \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho}, \quad (14)$$

которое вытекает непосредственно из формулы Иенсена и неравенств, связывающих обычные и усредненные плотности. Некоторые оценки предварительного характера для нижнего ρ -типа функции $f(z)$ с $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$ даны в работе [17]. Оценки сверху нижнего ρ -типа через нижние ρ -плотности, подобные верхним оценкам из (1), (2), в математической литературе вообще отсутствуют. В работе [26] найдено объяснение этому факту. Именно, доказана принципиальная невозможность оценки сверху нижнего типа только через нижнюю плотность. Из нашей теоремы 5 также следует, что нельзя оценить сверху нижний ρ -тип только через нижнюю усредненную ρ -плотность. Однако, оценки нижнего ρ -типа сверху, учитывающие обе ρ -плотности, возможны, и в [26] доказан такой точный результат, утверждающий дополнительно, что наибольшая возможная величина нижнего ρ -типа не зависит от расположения нулей целой функции на плоскости.

Теорема D (Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова [26]). *Для произвольного порядка $\rho \in (0, 1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ ($\alpha \leq \beta$) справедливы равенства*

I.

$$\begin{aligned} & \sup \{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \} = \\ & = \sup \{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \} =: \underline{S}(\alpha, \beta; \rho). \end{aligned}$$

II.

$$\underline{S}(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho} - \sup_{a>0} \int_a^{a(\beta/\alpha)^{1/\rho}} \frac{\beta\tau^{-\rho} - \alpha a^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Верхняя грань $\underline{S}(\alpha, \beta; \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\tilde{\Lambda}$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \beta$.

В настоящей работе мы завершаем полное описание роста целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ при нерегулярном поведении ее нулей, заполняя вакуум в информации об оценках нижнего ρ -типа. Точнее, мы находим неуплощаемые оценки нижнего ρ -типа и снизу и сверху через усредненные ρ -плотности корней, решая экстремальные задачи в двух принципиальных случаях: корни функции лежат на одном луче; корни функции произвольно распределены на плоскости. Речь идет о следующих экстремальных задачах.

Пусть заданы числа $\rho > 0$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$. Требуется вычислить экстремальные величины:

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*; \rho) := \inf \{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^* \}, \quad (15)$$

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf \left\{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^* \right\}, \quad (16)$$

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*; \rho) := \inf \{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^* \}, \quad (17)$$

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \inf \left\{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^* \right\}, \quad (18)$$

$$\underline{S}_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \sup \left\{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^* \right\}, \quad (19)$$

$$\underline{S}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \sup \left\{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^* \right\}. \quad (20)$$

В § 2 мы решаем экстремальные задачи (15)–(18). Из полученных нами результатов следует, что наименьшие возможные значения нижнего ρ -типа в каждом из указанных случаев расположения нулей на плоскости не зависят от верхней усредненной ρ -плотности. Этот вывод непосредственно вытекает из теорем 1, 2.

Теорема 1. Пусть $\rho > 0$. Для любых фиксированных чисел $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$ справедливы равенства

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*; \rho) = \underline{s}_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \alpha^*.$$

При любом значении $\beta^* \geq \alpha^*$ существует последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{C}$ с усредненными ρ -плотностями $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$, на которой нижние грани достигаются.

Теорема 2. Пусть $\rho \in (0, 1)$. Для любых фиксированных чисел $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$ справедливы равенства

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*; \rho) = \underline{s}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha^*.$$

При любом значении $\beta^* \geq \alpha^*$ существует возрастающая последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ с усредненными ρ -плотностями $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$, на которой нижние грани достигаются.

В § 3 решаются экстремальные задачи (19), (20), из которых следует, что наибольший возможный нижний ρ -тип целой функции, как и в случае обычных ρ -плотностей, не зависит от расположения нулей на плоскости, но зависит от обеих усредненных ρ -плотностей. Здесь доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Для любого $\rho \in (0, 1)$ и любых фиксированных чисел $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$ справедливы равенства

$$\underline{S}_{\mathbb{C}}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \underline{S}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \rho \beta^* \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \sup_{b>0} \Phi(b) \right),$$

где

$$\Phi(b) = \int_{ba_2^{-\frac{1}{\rho}}}^b \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_b^{ba_1^{-\frac{1}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = \rho \int_{ba_2^{-\frac{1}{\rho}}}^{ba_1^{-\frac{1}{\rho}}} \tau^{-\rho-1} \ln \frac{\tau + 1}{b + 1} d\tau,$$

и a_1, a_2 — корни уравнения $a \ln \frac{e}{a} = \alpha^* / \beta^*$ ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$). Верхние грани достигаются на некоторой возрастающей последовательности $\tilde{\Lambda}$, у которой $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

В последнем параграфе анализируется экстремальная величина из теоремы 3, даются простые двусторонние оценки этой величины. Обосновывается также вывод о невозможности получения оценки сверху нижнего ρ -типа функции только через нижнюю усредненную ρ -плотность ее корней.

2. Оценки снизу нижнего ρ -типа целой функции

Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho > 0$, $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$ — фиксированные числа, а $f(z)$ — целая функция порядка ρ с произвольно расположенными на комплексной плоскости нулями $\Lambda_f = \Lambda$ усредненных ρ -плотностей $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^*$. Из классической формулы Иенсена вытекает неравенство

$$\ln \max_{|z|=r} |f(z)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi = N_\Lambda(r),$$

которое после деления на r^ρ и перехода к нижнему пределу при $r \rightarrow +\infty$ приводит к оценке

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \geq \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*. \quad (21)$$

Для завершения доказательства теоремы надо при любых значениях параметров $\rho > 0$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ построить такую целую функцию $\tilde{f}(z)$, нижний ρ -тип которой удовлетворял бы равенству $\underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) = \alpha^*$.

Если $\alpha^* = 0$, то, применяя известное неравенство $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)/\rho \leq \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^* = 0$, имеем $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$. Но, как показано в работе [26], каждая целая функция с нулевой нижней ρ -плотностью корней имеет нулевой нижний ρ -тип.

Пусть теперь $\alpha^* > 0$. Из теоремы 2.1 работы А. Ю. Попова [6] извлекаем, что для любых $\rho > 0$ и $k \in (0, 1]$ существует целая функция $f_0(z)$ с нулевым множеством Λ_0 , удовлетворяющая условиям

$$\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_0) = \frac{k}{\rho}, \quad \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_0) = \frac{e^{k-1}}{\rho}.$$

Кроме того, в доказательстве этой теоремы показано (см. [6, формула (2.23)]), что для неограниченного множества значений r_s выполняется соотношение

$$\frac{\ln \max_{|z|=r_s} |f_0(z)|}{r_s^\rho} = \frac{k}{\rho} + o(1), \quad r_s \rightarrow +\infty.$$

Отсюда с учетом (21) следует равенство $\underline{\sigma}_\rho(f_0) = \frac{k}{\rho}$.

Пользуясь тем, что функция $\frac{e^{x-1}}{x}$ на промежутке $(0, 1]$ убывает от $+\infty$ до 1, найдем $k \in (0, 1]$ из условия $\frac{e^{k-1}}{k} = \frac{\beta^*}{\alpha^*}$. Для числа $q = \frac{\alpha^* \rho}{k}$ рассмотрим функцию $\tilde{f}(z) = f_0(q^{1/\rho} z)$. Ее нулевое множество $\tilde{\Lambda} = q^{-1/\rho} \Lambda_0$ имеет усредненную считающую функцию $N_{\tilde{\Lambda}}(r) = N_{\Lambda_0}(q^{1/\rho} r)$. Поэтому выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) &= q \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_0) = q \frac{k}{\rho} = \alpha^*, \\ \overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) &= q \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_0) = q \frac{e^{k-1}}{\rho} = q \frac{k}{\rho} \frac{e^{k-1}}{k} = \alpha^* \frac{\beta^*}{\alpha^*} = \beta^*.\end{aligned}$$

Нетрудно подсчитать и нижний ρ -тип функции $\tilde{f}(z)$:

$$\underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) = q \underline{\sigma}_\rho(f_0) = q \frac{k}{\rho} = \alpha^*.$$

Подводя итог, заключаем, что функция $\tilde{f}(z)$ обладает характеристиками роста

$$\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*, \quad \overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*, \quad \underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) = \alpha^*,$$

т. е. является экстремальной в задачах (15), (16). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Зададим числа $\rho \in (0, 1)$, $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$. Пусть целая функция $f(z)$ имеет нижний ρ -тип $\underline{\sigma}_\rho(f)$ и положительные корни $\Lambda_f = \Lambda$ с усредненными ρ -плотностями $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^*$.

Докажем сначала неравенство

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \geq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha^*. \quad (22)$$

Будем опираться на следующее представление, полученное в [15]:

$$r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt, \quad (23)$$

где обозначено $\varphi_r(t) := \frac{N_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из определения усредненных ρ -плотностей последовательности Λ следует, что $\varphi_r(t)$ ограничена и можно найти число $c > 0$ так, чтобы для всех значений $t \geq \frac{c}{r}$ выполнялось неравенство $\varphi_r(t) \geq \alpha_\varepsilon^* := \frac{\alpha^*}{1+\varepsilon}$. Интеграл в правой части (23) преобразуем и оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt &\geq \alpha_\varepsilon^* \int_0^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_0^{c/r} (\varphi_r(t) - \alpha_\varepsilon^*) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \\ &= \alpha_\varepsilon^* \int_0^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + o(1) = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha_\varepsilon^* + o(1), \quad r \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Мы воспользовались известным равенством (см. [29, раздел 2.29, № 24, с. 311])

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho}.$$

Таким образом, из (23) и доказанных неравенств получаем

$$r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)| \geq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha_\varepsilon^* + o(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Переходя здесь к нижнему пределу при $r \rightarrow +\infty$, а затем устремив ε к нулю, приходим к неравенству (22).

Покажем теперь, что существует функция $\tilde{f}(z)$ с положительными нулями $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}$, реализующая равенство в (22). Для этого при любых $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ достаточно построить однозначно определяющую последовательность нулей $\tilde{\Lambda}$ усредненную считающую функцию $N_{\tilde{\Lambda}}(r)$ так, чтобы

$$\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*, \quad \overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*, \quad \underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha^*.$$

В работе [16] сконструирован пример целой функции с нулями заданных усредненных ρ -плотностей, расположенными в угле раствора 2θ , имеющей наименьший возможный ρ -тип. При $\theta = 0$ нули такой функции лежат на луче. Покажем, что в этом случае она реализует не только наименьший возможный ρ -тип, но одновременно и наименьший возможный нижний ρ -тип. Опишем принцип построения усредненной считающей функции $N_{\tilde{\Lambda}}(r)$ последовательности нулей $\tilde{\Lambda}$ из работы [16, §3] (иной подход к построению подобных примеров использован ранее в [12], [15]).

Пусть ξ_n — некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$\xi_n = o(\xi_{n+1}), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (24)$$

и a_1, a_2 — корни уравнения $a \ln \frac{e}{a} = \alpha^*/\beta^*$ ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$). Величина $N_{\tilde{\Lambda}}(t)$ на каждом отрезке $[\xi_n a_2^{-1/\rho}, \xi_n a_1^{-1/\rho}]$ определяется формулами

$$N_{\tilde{\Lambda}}(t) = \beta^* \xi_n^\rho + \rho \beta^* \xi_n^\rho \ln \frac{t}{\xi_n}, \quad t \in [\xi_n a_2^{-1/\rho}, \xi_n a_1^{-1/\rho}], \quad n \in \mathbb{N},$$

а вне этих отрезков — как непрерывная функция, достаточно быстро приближающаяся к функции $y = \alpha^* t^\rho$, $t > 0$, и удовлетворяющая оценке

$$N_{\tilde{\Lambda}}(t) \leq \alpha^* t^\rho, \quad t \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\xi_n a_2^{-1/\rho}, \xi_n a_1^{-1/\rho}].$$

Обозначим

$$\varphi(a) = \int_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau, \quad a > 0.$$

Нетрудно показывается, что функция $\varphi(a)$ обладает свойствами

$$\varphi(0+) = \varphi(+\infty) = 0. \quad (25)$$

В [16, §3] получено соотношение

$$\tilde{\sigma}(r) := r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |\tilde{f}(z)| \leq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \varphi\left(\frac{r}{\xi_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{\xi_{n+1}}\right) \right) + o(1),$$

справедливое для $r \in [\xi_n, \xi_{n+1}]$, $n \rightarrow \infty$. В отличие от оценки работы [16], мы полагаем здесь $r = r_n = \sqrt{\xi_n \xi_{n+1}}$, что теперь дает

$$\tilde{\sigma}(r_n) \leq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \varphi\left(\sqrt{\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}}\right) + \varphi\left(\sqrt{\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}}\right) \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Привлекая свойства (24), (25), получаем

$$\underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}(r_n) \leq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha^*.$$

Это вместе с неравенством (22), справедливым для любой целой функции $f(z)$ с положительными нулями $\Lambda_f = \Lambda$ усредненных ρ -плотностей $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^*$, приводит к требуемому результату

$$\underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \alpha^*.$$

Теорема 2 доказана.

3. ОЦЕНКИ СВЕРХУ НИЖНЕГО ρ -ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Доказательство теоремы 3. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Пусть заданы числа $\rho \in (0, 1)$, $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$. Неравенство

$$\underline{S}_\mathbb{C}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) \geq \underline{S}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho), \text{ или}$$

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^* \right\} \geq \\ & \geq \sup \left\{ \underline{\sigma}_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^* \right\} \end{aligned}$$

очевидно, поскольку множество функций, по которому берется первый супремум, шире множества функций в определении второго. Проверим верность противоположного неравенства. Каждая целая функция $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$, нулевое множество которой совпадает с $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty = \Lambda_f \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, представляется бесконечным произведением

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $|\Lambda| = (|\lambda_n|)_{n=1}^\infty$ и $f_+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{|\lambda_n|} \right)$. Тогда

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z}{\lambda_n} \right| \leq \max_{|z|=r} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_n|} \right) = \max_{|z|=r} |f_+(z)|.$$

Отсюда

$$\underline{\sigma}_\rho(f) = \varliminf_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \varliminf_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f_+(z)| = \underline{\sigma}_\rho(f_+),$$

причем

$$|\Lambda| \subset \mathbb{R}_+, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho^*(|\Lambda|), \quad \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \overline{\Delta}_\rho^*(|\Lambda|).$$

Поэтому

$$\underline{S}_\mathbb{C}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) \leq \underline{S}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho),$$

и требуемое равенство $\underline{S}_\mathbb{C}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \underline{S}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho)$ доказано. Первое утверждение теоремы сводит нахождение наибольшей возможной величины нижнего ρ -типа целой функции порядка меньше единицы по верхней и нижней усредненным ρ -плотностям ее корней, распределенных произвольно в \mathbb{C} , к случаю расположения их на одном луче. Общее значение этих экстремальных величин будем ради краткости обозначать

$$\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) := \underline{S}_\mathbb{C}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = \underline{S}_{\mathbb{R}_+}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho).$$

Для вычисления этой экстремальной величины докажем вначале, что при любых $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ нижний ρ -тип каждой целой функции $f(z)$ порядка меньше единицы с нулями $\Lambda_f = \Lambda$ усредненных ρ -плотностей $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \beta^*$ удовлетворяет неравенству

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \leq \rho\beta^* \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \sup_{b>0} \Phi(b) \right), \quad (26)$$

где

$$\Phi(b) = \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau,$$

а a_1 и a_2 — корни уравнения (13).

Рассмотрим три случая 1) $\alpha^* = 0$, 2) $\alpha^* = \beta^*$, 3) $\alpha^* \in (0, \beta^*)$.

В первом случае корнями уравнения (13) являются числа $a_1 = 0$, $a_2 = e$, и оценка (26) принимает вид

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_\rho(f) &\leq \rho\beta^* \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \sup_{b>0} \left\{ \int_{be^{-1/\rho}}^b \frac{\tau^{-\rho} - eb^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_b^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right\} \right) = \\ &= \rho\beta^* \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \sup_{b>0} \left\{ \int_{be^{-1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau - eb^{-\rho} \int_{be^{-1/\rho}}^b \frac{d\tau}{\tau + 1} \right\} \right) = \\ &= \rho\beta^* \inf_{b>0} \left(\int_0^{be^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + eb^{-\rho} \ln \frac{1+b}{1+be^{-1/\rho}} \right) \leq \\ &\leq \rho\beta^* \lim_{b \rightarrow +0} \left(\int_0^{be^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + eb^{-\rho} \ln \frac{1+b}{1+be^{-1/\rho}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $\alpha^* = 0$ требуется доказать, что $\underline{\sigma}_\rho(f) = 0$. Но импликация

$$\alpha^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma}_\rho(f) = 0$$

уже была доказана в теореме 1.

Рассмотрим второй случай $\alpha^* = \beta^*$, когда последовательность нулей целой функции измерима. Теперь оба корня a_1 и a_2 уравнения (13) совпадают с единицей, и интегралы в определении функции $\Phi(b)$ исчезают. Соотношение (26) сводится к неравенству

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \beta^*, \quad (27)$$

которое содержится в известной оценке (2). При этом, если последовательность Λ измерима с усредненной ρ -плотностью Δ_ρ^* и расположена на одном луче, то, как известно, выполняется равенство

$$\underline{\sigma}_\rho(f) = \sigma_\rho(f) = \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \Delta_\rho^*.$$

Таким образом, при $\alpha^* = \beta^*$ справедливость теоремы 3 проверена.

Стоит отметить также, что если измеримая последовательность нулей целой функции расположена произвольно на комплексной плоскости, то неравенство (27) может оказаться строгим. В этом нас убеждает пример функции $f_0(z)$ из теоремы 1, в котором при $\alpha^* = \beta^*$ имеем $k = 1$ и

$$\underline{\sigma}_\rho(f_0) = \sigma_\rho(f_0) = \beta^* < \beta^* \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}.$$

Осталось рассмотреть центральный случай теоремы, когда последовательность нулей $\Lambda_f = \Lambda$ с усредненной считающей функцией $N_\Lambda(r) = N(r)$ такова, что $0 < \alpha^* < \beta^*$. Из определения усредненных ρ -плотностей Λ вытекает существование для произвольного $\varepsilon > 0$ такого числа $c > 0$, что для всех значений $r \geq c$ выполняются неравенства

$$\alpha^*(1 - \varepsilon) r^\rho < N(r) < \beta^*(1 + \varepsilon) r^\rho,$$

а для некоторой последовательности $r_k \nearrow +\infty$ имеем

$$N(r_k) < \alpha^*(1 + \varepsilon) r_k^\rho.$$

Нам удобней перейти к считающим функциям $n_1(x) := n(e^x)$ и $N_1(x) := N(e^x)$. Очевидно, $N_1(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\alpha^*(1 - \varepsilon) e^{\rho x} < N_1(x) < \beta^*(1 + \varepsilon) e^{\rho x}, \quad x > \ln c, \quad (28)$$

$$N_1(x_k) < \alpha^*(1 + \varepsilon) e_k^{\rho x_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x_k = \ln r_k. \quad (29)$$

Для дальнейших оценок удобно обозначить $A = \alpha^*(1 + \varepsilon)$, $B = \beta^*(1 + \varepsilon)$, $y_A(x) = Ae^{\rho x}$, $y_B(x) = Be^{\rho x}$ и воспользоваться следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 1. Пусть $A < B$, и из точки $(x_0, Ae^{\rho x_0})$ проведены влево и вправо от нее касательные к графику функции $y_B(x)$. Тогда абсциссы левой и правой точек касания x_l и x_r задаются соответственно формулами

$$x_l = x_0 + \frac{1}{\rho} \ln a_1, \quad x_r = x_0 + \frac{1}{\rho} \ln a_2, \quad (30)$$

где a_1 и a_2 — корни уравнения (13).

Доказательство леммы. Для нахождения требуемых точек вычислим различными способами угловые коэффициенты касательных к графику G_B , проходящих через точку (x_0, e^{Ax_0}) . Имеем, например, для правой точки касания (для левой вычисления аналогичны)

$$\frac{Be^{\rho x_r} - Ae^{\rho x_0}}{x_r - x_0} = B \rho e^{\rho x_r}.$$

Разделим обе части этого равенства на $\frac{Be^{\rho x_r}}{x_r - x_0}$ и обозначим $y_r = x_r - x_0$. Получим $1 - \frac{A}{B} e^{-\rho y_r} = \rho y_r$, или $(1 - \rho y_r) e^{\rho y_r} = \frac{A}{B}$, что можно записать в виде

$$e^{\rho y_r} \ln \frac{e}{e^{\rho y_r}} = \frac{A}{B} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Отсюда, учитывая соотношение $y_r = x_r - x_0 > 0$, заключаем, что $e^{\rho y_r} = a_2$, т.е. $y_r = x_r - x_0 = \frac{1}{\rho} \ln a_2$, где $a_2 \in (1, e)$. Окончательно, $x_r = x_0 + \frac{1}{\rho} \ln a_2$, что и требовалось доказать.

Продолжим оценку усредненной считающей функции $N_1(x)$, выбрав в качестве x_0 любую из точек x_k , фигурирующих в (29). Учитывая соотношение (29), можем утверждать, что график $N_1(x)$ на отрезке $[x_0, x_r]$ не пересекает правую касательную, ибо в противном случае он пересекал бы и график функции $y_B(x) = Be^{\rho x}$, находясь согласно (28) ниже него. Записав уравнение рассматриваемой касательной в виде $y = Be^{\rho x_r} + \rho Be^{\rho x_r}(x - x_r)$, получим, что

$$N_1(x) \leq Be^{\rho x_r} + \rho Be^{\rho x_r}(x - x_r), \quad x \in [x_0, x_r].$$

Поскольку все сказанное выше справедливо и для касательной слева, то выполняется также и неравенство

$$N_1(x) \leq Be^{\rho x_l} + \rho Be^{\rho x_l}(x - x_l), \quad x \in [x_l, x_0].$$

Обозначим $y_0 = e^{x_0}$, $y_l = e^{x_l}$, $y_r = e^{x_r}$. В силу леммы имеем $y_l = y_0 a_1^{1/\rho}$, $y_r = y_0 a_2^{1/\rho}$. Возвращаясь к исходной считающей функции $N(y) = N_1(\ln y)$, запишем полученные для функции $N_1(x)$ неравенства в виде

$$N(y) \leq \begin{cases} By_l^\rho (1 + \rho(\ln y - \ln y_l)) = By_0^\rho a_1 \left(1 + \rho \ln \frac{y}{y_0 a_1^{1/\rho}}\right), & y \in [y_0 a_1^{1/\rho}, y_0], \\ By_0^\rho a_2 \left(1 + \rho \ln \frac{y}{y_0 a_2^{1/\rho}}\right), & y \in [y_0, y_0 a_2^{1/\rho}], \\ By^\rho, & y \notin [y_0 a_1^{1/\rho}, y_0 a_2^{1/\rho}], \quad y > c. \end{cases}$$

Напомним, что здесь $a_1 \leq 1 \leq a_2$ – суть корни уравнения (13), и что в качестве x_0 мы выбрали произвольную точку x_k из (29). Зафиксируем теперь числа $b > 0$, $k \in \mathbb{N}$ и положим в предыдущих неравенствах $y = r_k \tau$, $r_k = by_0 = be^{x_k}$. Тогда

$$N(r_k \tau) \leq \begin{cases} B \left(\frac{r_k}{b}\right)^\rho a_1 \left(1 + \ln \frac{(b\tau)^\rho}{a_1}\right), & \tau \in \left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b}, \frac{1}{b}\right], \\ B \left(\frac{r_k}{b}\right)^\rho a_2 \left(1 + \ln \frac{(b\tau)^\rho}{a_2}\right), & \tau \in \left[\frac{1}{b}, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right], \\ B(r_k \tau)^\rho, & \tau \notin \left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b}, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right], \quad \tau > \frac{c}{r_k}. \end{cases} \quad (31)$$

Учитывая, что a_1 и a_2 являются корнями уравнения (13), преобразуем выражение

$$a_i \left(1 + \ln \frac{(b\tau)^\rho}{a_i}\right) = a_i \ln \frac{e}{a_i} + a_i \ln (b\tau)^\rho = \frac{A}{B} + a_i \ln (b\tau)^\rho, \quad i = 1, 2.$$

Теперь для функции $\varphi_r(\tau) = \frac{N(r\tau)}{(r\tau)^\rho}$ из формулы (23) получаем при $\tau > \frac{c}{r_k}$ оценку

$$\varphi_{r_k}(\tau) \leq \psi(\tau) = \begin{cases} B(\tau b)^{-\rho} \left(\frac{A}{B} + a_1 \ln (b\tau)^\rho\right), & \tau \in \left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b}, \frac{1}{b}\right], \\ B(\tau b)^{-\rho} \left(\frac{A}{B} + a_2 \ln (b\tau)^\rho\right), & \tau \in \left[\frac{1}{b}, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right], \\ B, & \tau \notin \left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b}, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right]. \end{cases} \quad (32)$$

Опираясь на первую часть теоремы, считаем, что все нули функции положительны, и вновь используем представление (23), но не для всех $r > 0$, а только для значений $r = r_k$, $k = 1, 2, \dots$ (см. (31)). В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma(r_k) &= r_k^{-\rho} \ln \max_{|z|=r_k} |f(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_{r_k}(\tau) \frac{t^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau = \int_0^{+\infty} \psi(\tau) \frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau + \\ &+ \int_0^{\frac{c}{r_k}} (\varphi_{r_k}(\tau) - \psi(\tau)) \frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau + \int_{\frac{c}{r_k}}^{+\infty} (\varphi_{r_k}(\tau) - \psi(\tau)) \frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} (\psi(\tau) - B) \frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau + B \int_0^{+\infty} \frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau + O(1) \frac{c}{r_k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} + B \int_{b^{-1}a_1^{1/\rho}}^{b^{-1}} \frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} + a_1 \ln(b\tau)^\rho \right) - \tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau + \\
&+ B \int_{b^{-1}}^{b^{-1}a_2^{1/\rho}} \frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} + a_2 \ln(b\tau)^\rho \right) - \tau^\rho}{(1+\tau)^2} d\tau + o(1) =: B \left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} + I_1 + I_2 \right) + o(1).
\end{aligned}$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\sigma(r_k) \leq B \left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} + I_1 + I_2 \right) + o(1), \quad k \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Упростим интегралы I_1 и I_2 , интегрируя по частям. Для I_1 имеем

$$I_1 = \frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} + a_1 \ln(b\tau)^\rho \right) - \tau^\rho}{(1+\tau)^2} \Big|_{b^{-1}a_1^{1/\rho}}^{b^{-1}} + \rho \int_{b^{-1}a_1^{1/\rho}}^{b^{-1}} \frac{a_1 b^{-\rho} - \tau^\rho}{\tau(\tau+1)} d\tau.$$

В интеграле сделаем замену переменной $\tau = t^{-1}$, а вычисление подстановки приводит к выражению

$$-\frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} - 1 \right)}{b^{-1} + 1} + \frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} + a_1 \ln a_1 - a_1 \right)}{b^{-1} + 1} = -\frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} - 1 \right)}{b^{-1} + 1}.$$

В итоге получим

$$I_1 = -\frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} - 1 \right)}{b^{-1} + 1} + \rho \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{a_1 b^{-\rho} - t^{-\rho}}{t+1} dt. \quad (34)$$

Аналогичные вычисления интеграла I_2 дают

$$I_2 = \frac{b^{-\rho} \left(\frac{A}{B} - 1 \right)}{b^{-1} + 1} + \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{a_2 b^{-\rho} - t^{-\rho}}{t+1} dt. \quad (35)$$

Учитывая (33)–(35), при $k \rightarrow \infty$ можем записать

$$\sigma(r_k) \leq B\rho \left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} + \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{a_1 b^{-\rho} - t^{-\rho}}{t+1} dt + \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{a_2 b^{-\rho} - t^{-\rho}}{t+1} dt \right) + o(1).$$

Изменяя знаки в подынтегральных выражениях и переходя к нижнему пределу по $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \leq B\rho \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \left\{ \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{t^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{t+1} dt + \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{t^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{t+1} dt \right\} \right).$$

Оценка справедлива при любых $\varepsilon > 0$ и $b > 0$. Устремив ε к нулю, а затем взяв супремум по $b > 0$, получим окончательно

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \leq \beta^* \rho \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \sup_{b>0} \left\{ \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{t^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{t+1} dt + \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{t^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{t+1} dt \right\} \right).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, требуется для наперед заданных чисел $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ предъявить целую функцию $\tilde{f}(z)$, которая доставляет равенство в полученной оценке нижнего типа и имеет положительные нули $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}$ усредненных ρ -плотностей $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) \leq \beta^*$. Построим усредненную считающую функцию $N_{\tilde{\Lambda}}(r) =: N(r)$ такой экстремальной последовательности нулей. Расположим члены искомой последовательности в порядке возрастания:

$$\tilde{\Lambda} = (\lambda_n)_{n=1}^\infty, \quad 0 < \lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} < \lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_2} < \lambda_{n_2+1} = \dots \quad (36)$$

Для $r \in [\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})$ считающая функция $n_{\tilde{\Lambda}}(r) = n(r) = n_k$, а усредненная считающая функция $N(r)$ имеет вид

$$N(r) = N(\lambda_{n_k}) + n_k \ln \frac{r}{\lambda_{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нам вновь удобней перейти к экспоненциальному переменному в качестве аргумента. Рассмотрим функции

$$\omega(x) := n(e^x), \quad \Omega(x) := N(e^x).$$

График функции $\Omega(x) = \int_0^x \omega(t) dt$ представляет собой ломаную, каждое звено которой имеет линейное уравнение с натуральным угловым коэффициентом:

$$\Omega(x) = \Omega(\ln \lambda_{n_k}) + n_k(x - \ln \lambda_{n_k}), \quad x \in [\ln \lambda_{n_k}, \ln \lambda_{n_{k+1}}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, в отличие от предыдущего, обозначим $A = \alpha^*$, $B = \beta^*$ и рассмотрим функцию $y_B(x) = B e^{\rho x}$, $x > 0$. Проведем к графику G_B этой функции касательные l_j с угловыми коэффициентами, равными последовательным натуральным числам $j \in \mathbb{N}$. Абсциссы x_j точек касания нетрудно вычисляются:

$$x_j = \frac{1}{\rho} \ln \frac{j}{\rho B}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $y = \Omega_1(x)$ — уравнение ломаной, j -е звено которой является отрезком касательной l_j , содержащим точку касания $(x_j, B e^{\rho x_j})$. В силу выпуклости функции $y_B(x)$ график этой ломаной расположен ниже графика G_B . Кроме того, по лемме из книги [11, с. 126] на каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, $j \rightarrow \infty$, выполняется соотношение

$$0 \leq y_B(x) - \Omega_1(x) \leq \frac{1}{4}(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{4\rho} \ln \frac{j+1}{j} < \frac{1}{4\rho j} = O(e^{-\rho x}). \quad (37)$$

Таким образом,

$$0 \leq y_B(x) - \Omega_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega_1(x)}{e^{\rho x}} = B. \quad (38)$$

Модифицируем ломаную $y = \Omega_1(x)$. Для этого выберем какую-либо строго возрастающую последовательность натуральных чисел m_n , удовлетворяющую условию

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} \nearrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Для каждого $j = m_n$, $n \in \mathbb{N}$, мы продлим звено l_j ломаной $y = \Omega_1(x)$ до встречи с графиком G_A функции $y_A(x) = A e^{\rho x}$ в точке $(\xi_j, A e^{\rho \xi_j})$. Затем из этой точки проведем вправо касательную l'_j к G_B в точке $(\xi'_j, B e^{\rho \xi'_j})$. Согласно лемме 1 абсциссы указанных точек даются формулами

$$\xi_j = x_j - \frac{1}{\rho} \ln a_1, \quad \xi'_j = \xi_j + \frac{1}{\rho} \ln a_2 = x_j + \frac{1}{\rho} \ln \frac{a_2}{a_1}, \quad j = m_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

в которых a_1, a_2 — корни уравнения (13).

Обозначим отрезки $\left[x_{m_n}, x_{m_n} + \frac{1}{\rho} \ln \frac{a_2}{a_1} \right] =: I_n, n \in \mathbb{N}$. Если $\frac{a_2}{a_1} j \in \mathbb{N}$, то на каждом отрезке I_n считаем, что новая ломаная $y = \Omega(x)$ задается уравнениями описанных выше полукасательных ($j = m_n$):

$$\Omega(x) = B e^{\rho x_j} + \rho B e^{\rho x_j} (x - x_j) = B e^{\rho x_j} (1 - \rho(x - x_j)), \quad x \in [x_j, \xi_j], \quad (40)$$

$$\Omega(x) = B e^{\rho \xi'_j} + \rho B e^{\rho \xi'_j} (x - \xi'_j) = B e^{\rho \xi'_j} (1 - \rho(x - \xi'_j)), \quad x \in [\xi_j, \xi'_j]. \quad (41)$$

На множестве $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n =: J$ оставляем ломаную $y = \Omega_1(x)$ без изменений, т. е. полагаем $\Omega(x) = \Omega_1(x), x \in J$.

Если же $\frac{a_2}{a_1} j \notin \mathbb{N}$, то в этом случае правую касательную проводим с угловым коэффициентом $\left[\frac{a_2}{a_1} j \right]$ (квадратные скобки означают целую часть). Она пересечет левую касательную не в точке графика G_A , а в некоторой точке (обозначим ее $(\xi_j, \Omega(\xi_j))$), лежащей выше этого графика. Не очень сложные, но довольно кропотливые вычисления показывают, что выполняется условие

$$\frac{\Omega(\xi_j)}{e^{\rho \xi_j}} \rightarrow A, \quad j = m_n \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Кроме того, поскольку на множестве J мы положили $\Omega(x) = \Omega_1(x)$, то соотношение (38) выполняется для $x \in J$, т. е.

$$\lim_{J \ni x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = B. \quad (43)$$

Из условий (42), (43) заключаем, что справедливы предельные соотношения

$$\varliminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = A, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = B. \quad (44)$$

Формула $N(e^x) = \Omega(x)$ определяет усредненную считающую функцию последовательности $\tilde{\Lambda}$ вида (36) следующим образом: абсциссы вершин построенной ломаной (точнее, их логарифмы) задают члены последовательности, каждый из которых входит в $\tilde{\Lambda}$ с кратностью, равной разности угловых коэффициентов звеньев ломаной с общей вершиной. Докажем, что построенная последовательность является экстремальной. Действительно, условия (44) означают, что

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) &= \varliminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \varliminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = A, \\ \overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = B. \end{aligned}$$

Полагая в (40), (41), (37)

$$x = \ln t, \quad \zeta_n = e^{\xi_{m_n}} = \left(\frac{m_n}{\rho B a_1} \right)^{1/\rho}, \quad t_n^{(i)} = \zeta_n a_i^{1/\rho}, \quad n \in \mathbb{N},$$

получим

$$N(t) = B \zeta_n^\rho a_1 \left(1 + \rho \ln \frac{t}{\zeta_n a_1^{1/\rho}} \right) = B \zeta_n^\rho a_1 \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n} \right)^\rho, \quad t \in [t_n^{(1)}, \zeta_n], \quad (45)$$

$$N(t) = B \zeta_n^\rho a_2 \left(1 + \rho \ln \frac{t}{\zeta_n a_2^{1/\rho}} \right) = B \zeta_n^\rho a_2 \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n} \right)^\rho, \quad t \in [\zeta_n, t_n^{(2)}], \quad (46)$$

$$Bt^\rho \geq N(t) \geq Bt^\rho - O(t^{-\rho}), \quad t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}] =: T. \quad (47)$$

Для логарифма максимума модуля канонического произведения $\tilde{f}(z)$, построенного по последовательности $\tilde{\Lambda}$, опять воспользуемся представлением (23):

$$\sigma(r) = r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |\tilde{f}(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt, \quad (48)$$

где $\varphi_r(t) := \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(rt)}{(rt)^\rho}$. Согласно (45)–(47) имеем

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} Ba_1 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho, & t \in \left[\frac{t_n^{(1)}}{r}, \frac{\zeta_n}{r}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ Ba_2 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho, & t \in \left[\frac{\zeta_n}{r}, \frac{t_n^{(2)}}{r}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ B - O((tr)^{-2\rho}), & t \notin T = \bigcup_{n=1}^{\infty} [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}]. \end{cases} \quad (49)$$

Интеграл в правой части (48) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= B \int_0^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt - \int_0^{+\infty} (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \\ &= B \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} - \int_{\mathbb{R}_+ \setminus T} (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt - \\ &- \int_T (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = B \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} - (I_1(r) + I_2(r)). \end{aligned}$$

Интеграл $I_1(r)$ при $r \rightarrow +\infty$ оценивается просто:

$$I_1(r) = O(r^{-2\rho}) \int_{\mathbb{R}_+ \setminus T} \frac{dt}{t^\rho(1+t)^2} \leq O(r^{-2\rho}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\rho(1+t)^2} = O(r^{-2\rho}).$$

Вычисление интеграла $I_2(r)$ потребует значительно больших усилий. Используя первые две строки (49), имеем

$$\begin{aligned} I_2(r) &= \int_T (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \left(B - Ba_1 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho \right) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \left(B - Ba_2 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho \right) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = BS(r), \end{aligned}$$

т. е. $I_2(r) = B S(r)$, где обозначено $S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r)$ и

$$S_n(r) = \int_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)^2} dt.$$

Предварительным итогом преобразований интеграла в (48) является асимптотическое равенство

$$\sigma(r) = B \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} - \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) + o(1), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (50)$$

Наша ближайшая задача — оценить сумму в этой формуле. Интегрирование по частям каждого слагаемого дает:

$$\begin{aligned} S_n(r) = & - \frac{t^\rho - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)} \Bigg|_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} + \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)} dt - \\ & - \frac{t^\rho - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)} \Bigg|_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} + \rho \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)} dt + \\ & + \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)} dt + \rho \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)} dt. \end{aligned}$$

При вычислении подстановок мы учли, что a_1, a_2 — корни уравнения (13). Таким образом,

$$S_n(r) = \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)} dt + \rho \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)} dt. \quad (51)$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и оценим $S_n(r)$ для $r \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$. Пренебрегая отрицательными слагаемыми, получаем две оценки

$$\begin{aligned} S_n(r) & \leq \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho dt}{t(t+1)} \leq \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} t^{\rho-1} dt = \\ & = \left(\frac{t_n^{(2)}}{r}\right)^\rho - \left(\frac{t_n^{(1)}}{r}\right)^\rho \leq \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_j}\right)^\rho (a_2 - a_1), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} S_n(r) & \leq \rho \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho dt}{t(t+1)} \leq \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} t^{\rho-2} dt = \frac{\rho}{\rho-1} \left(\left(\frac{t_n^{(2)}}{r}\right)^{\rho-1} - \left(\frac{t_n^{(1)}}{r}\right)^{\rho-1} \right) \leq \\ & \leq \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_n}\right)^{1-\rho} (a_1^{1-1/\rho} - a_2^{1-1/\rho}). \end{aligned} \quad (53)$$

Из условия (39) следует, что

$$\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_j} = \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{1/\rho} \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty. \quad (54)$$

Отсюда нетрудно вывести (см. [16, § 3]), что выполняются равенства

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{j-1} \zeta_n^\rho}{\zeta_j^\rho} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=j+2}^{\infty} \zeta_n^{\rho-1}}{\zeta_{j+1}^{\rho-1}} = 0.$$

Теперь, с помощью (52) и (53) получаем, что равномерно по $r \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) &\leq (a_2 - a_1) \sum_{n=1}^{j-1} \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_j} \right)^\rho = (a_2 - a_1) \frac{\sum_{n=1}^{j-1} \zeta_n^\rho}{\zeta_j^\rho} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \\ \sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) &\leq \frac{\rho}{1-\rho} (a_1^{1-1/\rho} - a_2^{1-1/\rho}) \sum_{n=j+2}^{\infty} \left(\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_n} \right)^{1-\rho} \leq \\ &\leq \frac{\rho}{1-\rho} (a_1^{1-1/\rho} - a_2^{1-1/\rho}) \frac{\sum_{n=j+2}^{\infty} \zeta_n^{\rho-1}}{\zeta_{j+1}^{\rho-1}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (55)$$

Таким образом, мы установили, что для достаточно больших j главными слагаемыми в сумме

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) = \sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) + \sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) + [S_j(r) + S_{j+1}(r)]$$

служат слагаемые с индексами j и $j+1$. Точнее, равномерно по $r \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ справедливо равенство

$$S(r) = o(1) + [S_{j+1}(r) + S_{j+2}(r)], \quad j \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Преобразуем сумму в квадратных скобках. Для этого в формуле (51), выражающей $S_n(r)$, сделаем замену переменной $t = 1/\tau$:

$$\begin{aligned} S_n(r) &= \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r} \right)^\rho}{t(t+1)} dt + \rho \int_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r} \right)^\rho}{t(t+1)} dt = \\ &= \rho \int_{r/\zeta_n}^{a_1^{-1/\rho} r/\zeta_n} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 \left(\frac{r}{\zeta_n} \right)^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + \rho \int_{a_2^{-1/\rho} r/\zeta_n}^{r/\zeta_n} \frac{\tau^{-\rho} - a_2 \left(\frac{r}{\zeta_n} \right)^{-\rho}}{\tau+1} d\tau. \end{aligned}$$

Запишем полученное равенство в виде

$$S_n(r) = \rho \Phi \left(\frac{r}{\zeta_n} \right), \quad (58)$$

где функция

$$\Phi(b) = \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau+1} d\tau, \quad b > 0,$$

та же, что и в формуле (26). Представим ее в виде

$$\Phi(b) = \Phi_1(b) - \Phi_2(b), \quad \text{где} \quad \Phi_k(b) = \int_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_k b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Нам потребуются некоторые свойства функции $\Phi(b)$. Покажем сначала, что

$$\Phi(0+) = \Phi(+\infty) = 0. \quad (59)$$

Достаточно проверить, что каждая функция $\Phi_k(b)$, $k = 1, 2$, удовлетворяет этим условиям. Интегрирование по частям дает выражение

$$\Phi_k(b) = (a_k - 1) \frac{\ln(b+1)}{b^\rho} + \rho \int_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Убедимся, что каждое слагаемое здесь удовлетворяет (59). Действительно, величина $\frac{\ln(b+1)}{b^\rho}$ стремится к нулю как при $b \rightarrow 0+$, так и при $b \rightarrow +\infty$. Далее,

$$\int_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau \sim \int_b^{ba_k^{-1/\rho}} \tau^{-\rho} d\tau = O(b^{1-\rho}) \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 0+,$$

$$\int_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau \sim \int_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln \tau}{\tau^{\rho+1}} d\tau \leq \frac{1}{2b^\rho} (\ln^2 ba_k^{-1/\rho} - \ln^2 b) \rightarrow 0, \quad b \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, (59) выполнено. Поскольку $\Phi(b)$ допускает положительные значения при некоторых $b > 0$ (чтобы не прерывать нить доказательства, мы этот факт проверим в начале следующего параграфа), то можно утверждать, что непрерывная на \mathbb{R}_+ функция $\Phi(b)$ достигает своего максимума в некоторой точке b_0 , т. е.

$$\max_{b>0} \Phi(b) = \Phi(b_0) > 0. \quad (60)$$

Из (57), (58) следует равномерное по $r \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ соотношение

$$S(r) = S_j(r) + S_{j+1}(r) + o(1) = \rho \left[\Phi\left(\frac{r}{\zeta_j}\right) + \Phi\left(\frac{r}{\zeta_{j+1}}\right) \right] + o(1), \quad j \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Оценим $S(r)$ сверху. Пусть сначала $r \in [\zeta_j, \sqrt{\zeta_j \zeta_{j+1}}]$. Тогда согласно (60) имеем $\Phi\left(\frac{r}{\zeta_j}\right) \leq \Phi(b_0)$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$0 < \frac{\zeta_j}{\zeta_{j+1}} \leq \frac{r}{\zeta_{j+1}} \leq \sqrt{\frac{\zeta_j}{\zeta_{j+1}}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

то благодаря (59) находим, что

$$\max_{\zeta_j \leq r \leq \sqrt{\zeta_j \zeta_{j+1}}} \Phi\left(\frac{r}{\zeta_{j+1}}\right) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Пусть теперь $r \in [\sqrt{\zeta_j \zeta_{j+1}}, \zeta_{j+1}]$. Тогда $\Phi\left(\frac{r}{\zeta_{j+1}}\right) \leq \Phi(b_0)$. Так как

$$\frac{r}{\zeta_j} \geq \sqrt{\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_j}} \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty,$$

то снова в силу (59) имеем

$$\max_{\sqrt{\zeta_j \zeta_{j+1}} \leq r \leq \zeta_{j+1}} \Phi\left(\frac{r}{\zeta_j}\right) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

В обоих случаях получаем

$$S(r) \leq \rho \Phi(b_0) + o(1), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (62)$$

Более того, если $b_0 \geq 1$, то, полагая в (61) $r = p_j = b_0 \zeta_j$, получаем с учетом условий (59), что

$$S(p_j) = \rho \left[\Phi(b_0) + \Phi\left(\frac{b_0 \zeta_j}{\zeta_{j+1}}\right) \right] + o(1) = \rho \Phi(b_0) + o(1), \quad j \rightarrow \infty.$$

Если же $b_0 \leq 1$, то, полагая в (61) $r = p_j = b_0 \zeta_{j+1}$, опять в силу (59) получаем

$$S(p_j) = \rho \left[\Phi\left(\frac{b_0 \zeta_{j+1}}{\zeta_j}\right) + \Phi(b_0) \right] + o(1) = \rho \Phi(b_0) + o(1), \quad j \rightarrow \infty.$$

В обоих случаях выполняется

$$S(p_j) = \rho \Phi(b_0) + o(1), \quad j \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Из (62), (63) следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} S(r) = \rho \Phi(b_0).$$

Это, в свою очередь, с учетом (50) влечет

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \sigma(r) = B \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} - \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} S(r) = B \rho \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \Phi(b_0) \right).$$

Подводя итог, заключаем, что для функции $\tilde{f}(z)$ с построенным нулевым множеством $\tilde{\Lambda}$ согласно (48), (50), (57), (62), (63) выполняются равенства

$$\underline{\sigma}(\tilde{f}) = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \sigma(r) = B \rho \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \Phi(b_0) \right).$$

Все случаи рассмотрены. Функция $\tilde{f}(z)$ является экстремальной, так как доставляет равенство в (26). Для завершения доказательства укажем, что вторая форма записи функции $\Phi(b)$ получается из первой интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \Phi(b) &= \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = \\ &= \ln(1 + \tau) (\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}) \Big|_{ba_2^{-1/\rho}}^b + \rho \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{\ln(1 + \tau)}{\tau^{\rho+1}} d\tau + \\ &+ \ln(1 + \tau) (\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}) \Big|_b^{ba_1^{-1/\rho}} + \rho \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\ln(1 + \tau)}{\tau^{\rho+1}} d\tau = \\ &= \rho \int_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\ln(1 + \tau)}{\tau^{\rho+1}} d\tau + \ln(1 + b)(1 - a_2)b^{-\rho} + \ln(1 + b)(a_1 - 1)b^{-\rho} = \end{aligned}$$

$$= \rho \int_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\ln(1+\tau)}{\tau^{\rho+1}} d\tau - \ln(1+b)(a_2 - a_1)b^{-\rho} = \rho \int_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1) - \ln(b+1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau.$$

Теорема 3 доказана.

4. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ $\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho)$

Докажем сначала анонсированное в доказательстве теоремы 3 соотношение (60) в случае $\alpha^* < \beta^*$. Для этого оценим функцию $\Phi(b)$ при достаточно больших значениях аргумента, учитывая, что корни уравнения (13) связаны строгими неравенствами $a_1 < 1 < a_2$. Запишем $\Phi(b)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(b) &= \int_{ba_2^{-1/\rho}}^b \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = \\ &= \int_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau - a_2 b^{-\rho} \ln \frac{b+1}{1+ba_2^{-1/\rho}} - a_1 b^{-\rho} \ln \frac{1+ba_1^{-1/\rho}}{1+b}. \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\begin{aligned} \int_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau &> \int_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \tau^{-\rho-1} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) d\tau = \frac{\tau^{-\rho}}{-\rho} \Big|_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} + \frac{\tau^{-\rho-1}}{\rho+1} \Big|_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} = \\ &= \frac{b^{-\rho}}{\rho} (a_2 - a_1) - \frac{b^{-\rho-1}}{\rho+1} \left(a_2^{1+1/\rho} - a_1^{1+1/\rho}\right). \end{aligned}$$

Применяя неравенства $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, оценим оставшиеся слагаемые:

$$\begin{aligned} a_2 b^{-\rho} \ln \frac{1+b}{1+ba_2^{-1/\rho}} &= a_2 b^{-\rho} \ln \frac{b(1+1/b)}{ba_2^{-1/\rho} (1+1/ba_2^{-1/\rho})} < \\ &< a_2 b^{-\rho} \left[\ln a_2^{1/\rho} + \left(\frac{1}{b} - \frac{a_2^{1/\rho}}{b} + \frac{1}{2} \frac{a_2^{2/\rho}}{b^2} \right) \right] = \\ &= \frac{a_2 b^{-\rho}}{\rho} \ln a_2 + a_2 b^{-\rho-1} \left[\left(1 - a_2^{1/\rho}\right) + \frac{a_2^{2/\rho}}{2b} \right] \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$a_1 b^{-\rho} \ln \frac{1+ba_1^{-1/\rho}}{1+b} < -\frac{a_1 b^{-\rho}}{\rho} \ln a_1 + a_1 b^{-\rho-1} \left(a_1^{1/\rho} - 1 + \frac{1}{2b} \right).$$

Собирая полученные оценки, можем записать

$$\begin{aligned} \Phi(b) &> \frac{b^{-\rho}}{\rho} (a_2 - a_1 - a_2 \ln a_2 + a_1 \ln a_1) + \\ &+ b^{-\rho-1} \left[-\frac{\left(a_2^{1+1/\rho} - a_1^{1+1/\rho}\right)}{\rho+1} - \left(a_2 - a_2^{1+1/\rho} + \frac{a_2^{1+2/\rho}}{2b}\right) - \left(a_1^{1+1/\rho} - a_1 + \frac{a_1}{2b}\right) \right]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое исчезает, поскольку выражение в скобках равно

$$a_2 \ln \frac{e}{a_2} - a_1 \ln \frac{e}{a_1} = \frac{\alpha^*}{\beta^*} - \frac{\alpha^*}{\beta^*} = 0$$

в силу того, что a_1 и a_2 являются корнями уравнения (13). Таким образом, имеем

$$\Phi(b) > b^{-\rho-1} \left[\left(a_2^{1+1/\rho} - a_1^{1+1/\rho} \right) \frac{\rho}{\rho+1} - (a_2 - a_1) - \frac{1}{2b} \left(a_1 + a_2^{1+2/\rho} \right) \right],$$

или, обозначив $1 + 1/\rho = \nu$ ($\nu > 2$),

$$\Phi(b) > \frac{b^{-\rho-1}}{\nu} \left[a_2^\nu - a_1^\nu - \nu(a_2 - a_1) - O\left(\frac{1}{b}\right) \right], \quad b \rightarrow +\infty.$$

Докажем, что $\psi(\nu) = a_2^\nu - a_1^\nu - \nu(a_2 - a_1) > 0$ для всех $\nu \geq 1$. Имеем

$$\psi'(\nu) = a_2^\nu \ln a_2 - a_1^\nu \ln a_1 - (a_2 - a_1), \quad \psi''(\nu) = a_2^\nu \ln^2 a_2 - a_1^\nu \ln^2 a_1.$$

Функция $\psi''(\nu)$ является возрастающей, так как в ее задании первое слагаемое возрастает с ростом ν , а второе убывает. Тогда для $\nu \geq 1$ выполняется

$$\begin{aligned} \psi''(\nu) &\geq \psi''(1) = a_2 \ln^2 a_2 - a_1 \ln^2 a_1 = a_2(\ln^2 a_2 - 1) + a_2 - a_1(\ln^2 a_1 - 1) - a_1 = \\ &= (a_2 \ln a_2 - a_2)(\ln a_2 + 1) - (a_1 \ln a_1 - a_1)(\ln a_1 + 1) + a_2 - a_1 = -\frac{\alpha^*}{\beta^*} \ln \frac{a_2}{a_1} + a_2 - a_1. \end{aligned}$$

Здесь мы опять воспользовались тем, что a_1 и a_2 являются корнями уравнения (13). Применим теперь параметрическое представление корней этого уравнения, найденное в работе [31]:

$$a_1 = e s^{\frac{s}{1-s}}, \quad a_2 = s a_1 = s^{\frac{1}{1-s}}, \quad s > 1.$$

Тогда получим

$$\psi''(1) = a_2 - a_1 - a_1 \ln \frac{e}{a_1} \ln \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{s-1} [(s-1)^2 - s \ln^2 s] > 0.$$

Положительность выражения в квадратных скобках вытекает из его монотонного возрастания, которое нетрудно получить обычными методами анализа. Из доказанной положительности $\psi''(\nu)$ на $[1, +\infty)$ вытекает возрастание $\psi'(\nu)$ на этом промежутке. Следовательно,

$$\psi'(\nu) > \psi'(1) = a_2 \ln a_2 - a_1 \ln a_1 - (a_2 - a_1) = 0, \quad \nu > 1.$$

Отсюда, в свою очередь, следует возрастание самой функции $\psi(\nu)$, что дает для $\nu > 1$ неравенство

$$\psi(\nu) > \psi(1) = a_2 - a_1 - a_2 + a_1 = 0.$$

Тем самым, справедливость соотношения (60) доказана.

Приступим теперь к изучению величины $\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho)$ и получим сначала простые оценки интеграла, входящего в определение функции $\Phi(b)$. Поскольку на отрезке интегрирования $\tau \geq b$, то выполняется неравенство $-b^{-\rho} \leq -\tau^{-\rho}$, и, оценивая $\Phi(b)$, можем записать

$$\Phi(b) \leq \Phi_1(b) = \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \leq \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}(1 - a_1)}{\tau + 1} d\tau.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\Phi(b) \leq (1 - a_1) \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \quad (64)$$

Расширение промежутка интегрирования приводит к неравенству

$$\Phi(b) \leq (1 - a_1) \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = (1 - a_1) \frac{\pi}{\sin \pi \rho}, \quad b > 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) &= \beta^* \rho \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \sup_{b>0} \Phi(b) \right) \geq \\ &\geq \beta^* \rho \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - (1 - a_1) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \right) = a_1 \frac{\pi \rho \beta^*}{\sin \pi \rho}. \end{aligned}$$

Привлекая также (60), в итоге получаем двустороннюю оценку

$$a_1 \frac{\pi \rho \beta^*}{\sin \pi \rho} \leq \underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) \leq \frac{\pi \rho \beta^*}{\sin \pi \rho}. \quad (65)$$

Эта простая оценка характеризует $\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho)$, когда меньший корень a_1 уравнения (13) равен или близок к единице, т. е. когда β^* совпадает или мало отличается от α^* . Но она совершенно не информативна при малых значениях корня a_1 , когда β^* сильно превосходит α^* . Следующий результат устраняет этот недостаток.

Теорема 4. Для любых $\rho \in (0, 1)$, $\alpha^* > 0$, $\beta^* \geq \alpha^*$ справедливы неравенства

$$\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) \geq \beta^* \rho \left[\frac{\pi a_1}{\sin \pi \rho} + a_1^{1-\rho} (1 - a_1) A_\rho \right], \quad (66)$$

$$\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) \leq \beta^* \rho \left[\frac{\pi a_1}{\sin \pi \rho} + a_1^{1-\rho} (1 - a_1) \left(B_\rho \ln \frac{e}{a_1} + e \right) \right], \quad (67)$$

где $A_\rho = \min \{1/2; \rho\}$, а $B_\rho = (\rho(1 - \rho))^{-1}$.

Доказательство теоремы 4. Уточним (65), оценивая величину

$$S := \frac{\underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho)}{\beta^* \rho} - \frac{\pi a_1}{\sin \pi \rho}.$$

С помощью неравенства (64) получаем

$$\begin{aligned} S &= (1 - a_1) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{b>0} \Phi(b) \geq \\ &\geq (1 - a_1) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - (1 - a_1) \max_{b>0} \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau =: (1 - a_1) \min_{b>0} \eta(b). \end{aligned}$$

Функция $\eta(b) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \int_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$, как показано в теореме 4 работы [26], имеет оценку снизу (в наших обозначениях)

$$\eta(b) \geq A_\rho a_1^{1-\rho}, \quad A_\rho = \min \{1/2; \rho\}.$$

Применение этой оценки приводит при всех $\rho \in (0, 1)$ к неравенству

$$S \geq A_\rho a_1^{1-\rho} (1 - a_1),$$

из которого немедленно следует (66).

Несколько больших усилий требует оценка величины S сверху. При получении такой оценки мы, как и в работе [26], заменяем максимальное значение функции $\Phi(b)$ на ее значение в точке $b = a_1$:

$$\max_{b>0} \Phi(b) \geq \Phi(a_1) = \Phi_1(a_1) - \Phi_2(a_1).$$

Оценим каждое слагаемое.

$$\begin{aligned} \Phi_1(a_1) &= \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1^{1-\rho}}{\tau + 1} d\tau = \\ &= (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1 \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau - a_1^{1-\rho} \ln \frac{1 + a_1^{1-1/\rho}}{1 + a_1} \geq \\ &\geq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau - a_1^{1-\rho} (1 - a_1) \ln \frac{1 + a_1^{1-1/\rho}}{1 + a_1} \geq \\ &\geq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{1-\rho} (1 - a_1) \ln a_1^{1/\rho}. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что $\frac{1 + a_1^{1-1/\rho}}{1 + a_1} \leq a_1^{-1/\rho}$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\Phi_1(a_1) \geq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{1-\rho} (1 - a_1) \ln a_1^{1/\rho}. \quad (68)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Phi_2(a_1) &= \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_2 a_1^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = \\ &= (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1 \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau - a_2 a_1^{-\rho} \ln \frac{1 + a_1 a_2^{-1/\rho}}{1 + a_1} \leq \\ &\leq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{-\rho} (a_1 - a_2) \ln \frac{1 + a_1 a_2^{-1/\rho}}{1 + a_1} \leq \\ &\leq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{1-\rho} (a_2 - a_1). \end{aligned}$$

Мы использовали неравенство

$$\ln \frac{1 + a_1}{1 + a_1 a_2^{-1/\rho}} \leq \ln(1 + a_1) \leq a_1.$$

Окончательно имеем оценку

$$\Phi_2(a_1) \leq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{1-\rho}(a_2 - a_1). \quad (69)$$

Теперь, учитывая обе оценки (68) и (69), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(a_1) &= \Phi_1(a_1) - \Phi_2(a_1) \geq \\ &\geq (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{1-\rho}(1 - a_1) \ln a_1^{1/\rho} - (1 - a_1) \int_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau - a_1^{1-\rho}(a_2 - a_1) = \\ &= (1 - a_1) \int_{a_1 a_2^{-1/\rho}}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + a_1^{1-\rho}(1 - a_1) \ln a_1^{1/\rho} - a_1^{1-\rho}(a_2 - a_1). \end{aligned}$$

Вернемся к оценке S :

$$\begin{aligned} S &= (1 - a_1) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{b>0} \Phi(b) \leq (1 - a_1) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \Phi(a_1) = \\ &= (1 - a_1) \left[\int_0^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_{a_1^{1-1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right] - a_1^{1-\rho}(1 - a_1) \ln a_1^{1/\rho} + a_1^{1-\rho}(a_2 - a_1). \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках не превосходит

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \tau^{-\rho} d\tau + \int_{a_1^{1-1/\rho}}^{+\infty} \tau^{-\rho-1} d\tau &= \frac{(a_1 a_2^{-1/\rho})^{1-\rho}}{1-\rho} + \frac{(a_1^{1-1/\rho})^{-\rho}}{\rho} = \\ &= a_1^{1-\rho} \left(\frac{a_2^{1-1/\rho}}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \leq \frac{a_1^{1-\rho}}{\rho(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Не очень трудно показать (геометрически почти очевидно), что для корней a_1, a_2 уравнения (13) ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) выполняется условие

$$a_2 - a_1 \leq e(1 - a_1).$$

В итоге можем записать

$$\begin{aligned} S &\leq a_1^{1-\rho}(1 - a_1) \left(\frac{1}{\rho(1-\rho)} - \frac{1}{\rho} \ln a_1 + e \right) = \\ &= a_1^{1-\rho}(1 - a_1) \left(\frac{1 - (1-\rho) \ln a_1}{\rho(1-\rho)} + e \right) \leq a_1^{1-\rho}(1 - a_1) \left(\frac{\ln \frac{e}{a_1}}{\rho(1-\rho)} + e \right), \end{aligned}$$

что равносильно (67). Все утверждения теоремы 4 доказаны.

Если нижняя усредненная ρ -плотность корней α^* целой функции равна нулю, то, как мы заметили при доказательстве теоремы 1, ее нижний ρ -тип не зависит от верхней усредненной ρ -плотности β^* корней и равен нулю. Следовательно, и $\underline{S}^*(0, \beta^*; \rho) = 0$ при любом конечном β^* . Ситуация резко меняется, если $\alpha^* > 0$. В этом случае невозможно оценить сверху нижний ρ -тип целой функции только через нижнюю усредненную ρ -плотность ее корней, как это утверждает следующий результат, являющийся непосредственным следствием теоремы 4.

Теорема 5. Пусть $\rho \in (0, 1)$ и $\alpha^* > 0$. Справедливо утверждение

$$\sup_{\beta^* \geq \alpha^*} \underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) = +\infty.$$

Доказательство теоремы 5. Зафиксируем $\alpha^* > 0$. Если $\beta^* \rightarrow +\infty$, то меньший корень a_1 уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

стремится к нулю, а больший корень a_2 стремится к e . При этом, согласно (66), имеем

$$\begin{aligned} \underline{S}^*(\alpha^*, \beta^*; \rho) &\geq \beta^* \rho a_1^{1-\rho} (1 - a_1) A_\rho = \frac{\alpha^* \rho a_1^{1-\rho} (1 - a_1) A_\rho}{\alpha^* / \beta^*} = \\ &= \alpha^* \rho A_\rho (1 - a_1) \frac{a_1^{1-\rho}}{a_1 \ln \frac{e}{a_1}} = \alpha^* \rho A_\rho (1 - a_1) \frac{1}{a_1^\rho \ln \frac{e}{a_1}} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. М.: ГИТТЛ, 1956.
2. A. Pfluger *Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen*. I // *Comm. Math. Helv.* V. 11. 1938. P. 180–213.
3. A. Pfluger *Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen*. II // *Comm. Math. Helv.* V. 12. 1939. P. 25–69.
4. Хабибуллин Б.Н. *Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций*. II. *Целые функции* // Матем. сб. Т. 200. № 2. 2009. С. 129–158.
5. R.P. Boas *Entire functions*. New-York: Acad. Press, 1954.
6. Попов А.Ю. *Развитие теоремы Валлирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ -плотностью корней* // *СМФН*. Т. 49. 2013. С. 132–164.
7. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности* // *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. № 1. 2005. С. 31–36.
8. R.M. Redheffer *On even entire functions with zeros having a density* // *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 77. 1954. P. 32–61.
9. Попов А.Ю. *О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности* // *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. № 5. 1999. С. 48–52.
10. Браичев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями* // *Изв. РАН. Сер. матем.* Т. 75. № 1. 2011. С. 3–28.
11. Браичев Г.Г. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций*. М.: Прометей, 2005.
12. Браичев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей* // *Матем. сб.* Т. 203. № 7. 2012. С. 31–56.
13. Браичев Г.Г. *Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей* // *Докл. РАН*. Т. 445. № 6. 2012. С. 615–617.
14. G.G. Braichev, V.B. Sherstyukov *On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk* // *Asian-European Journal of Math.* V. 1. № 1. 2008. P. 15–26.
15. Браичев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями* // *Матем. заметки*. Т. 91. № 5. 2012. С. 674–690.
16. Браичев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с корнями заданных усредненных плотностей, расположенных на лучах или в угле* // *Матем. сб.* (принята к печати). 2015.

17. Браичев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Связь типов целой функции конечного порядка с плотностями ее нулей* // Сб. трудов XIV Международной конф. «Математика. Экономика. Образование», Абрау-Дюрсо. 2006. С. 52–55.
18. Азарин В.С. *О регулярности роста функционалов на целых функциях* // Теория функций, функциональный анализ и их прил., Харьков. Вып. 16. 1972. С. 109–137.
19. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. (Комплексный анализ. Одна переменная-1). М.: ВИНТИ. Т. 85. 1991. С. 5–185.
20. Гольдберг А.А. *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III* // Матем. сб. Т. 65(107). № 3. 1964. С. 414–453.
21. Гольдберг А.А. *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV* // Матем. сб. Т. 66(108). № 3. 1965. С. 411–457.
22. Кондратюк А.А. *Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями* // Сиб. матем. журн. Т. 11. № 5. 1970. С. 1084–1092.
23. Азарин В.С. *Об экстремальных задачах на целых функциях* // Теория функций, функциональный анализ и их прил., Харьков. Вып. 18. 1973. С. 18–50.
24. Красичков И.Ф. *Оценки снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. матем. журн. Т. 6. № 4. 1965. С. 840–861.
25. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976.
26. Браичев Г.Г., Шерстюкова О.В. *Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями фиксированных ρ -плотностей* // Матем. заметки. Т. 90. № 2. 2011. С. 199–215.
27. Шерстюков В.Б. *Минимальное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями заданных плотностей, лежащими в угле* // Тезисы докладов 17 международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов: Изд-во Саратовского ун-та. 2014. С. 309–310.
28. Браичев Г.Г. *Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах* // Матем. заметки. Т. 97. № 4. 2015. С. 503–515.
29. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. М.: Наука, 1981.
30. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels *Regular variation (Encyclopedia of mathematics and its applications; 27)*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
31. Браичев Г.Г. *Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями на луче* // Уфимск. матем. журн. Т. 4. № 1. 2012. С. 29–37.

Георгий Генрихович Браичев

Московский педагогический государственный университет,

ул. М. Пироговская, 1,

199296, Москва, Россия

E-mail: braichev@mail.ru