ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 100-113.

УДК 511.523, 511.527, 517.15

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О СОВЕРШЕННОМ КУБОИДЕ

Р.А. ШАРИПОВ

Аннотация. Задача о совершенном кубоиде — это одна из очень старых нерешённых задач в теории чисел. Различными приёмами её можно свести к нахождению решения некоторого одного диофантового уравнения высокой степени, удовлетворяющего определённым ограничениям в форме неравенств. Каждое такое диофантово уравнение называется характеристическим уравнением совершенного кубоида. В данной работе даётся изложение результатов, полученных путём применения асимптотических методов к одному из характеристических уравнений совершенного кубоида в случае второй гипотезы о кубоиде. Эти результаты сужают область изменения целочисленных параметров характеристического уравнения и, тем самым, делают более эффективным компьютерный поиск совершенных кубоидов, основанный на этом уравнении.

Ключевые слова: совершенный кубоид, диофантово уравнение, асимптотические методы.

1. Введение

Совершенный кубоид — прямоугольный параллелепипед, все ребра и диагонали на гранях, а также пространственная диагональ которого имеют целочисленную длину. Поиск совершенных кубоидов имеет давнюю историю [1–50]. Впервые задача упоминается в 1719 г., но ни одного кубоида до сих пор не найдено. Сама по себе цифра 1719 может не впечатлять. Любопытно сравнить её с некоторыми заметными историческими датами: основание Санкт-Петербурга (1703), Полтавская битва (1709), восстания башкир (1735–1740 и 1755), шкала температур Цельсия (1742), рождение Моцарта (1756) и Бетховена (1770), восстание Пугачёва (1773), создание государства США (1776), первый пароход (1783), Великая французская революция (1789), первый паровоз (1804), война с Наполеоном (1812), восстание декабристов (1825), открытие первой железной дороги в России (1837). В математике — это рождение Эйлера (1707), Лагранжа (1736), Фурье (1768), Гаусса (1777), Коши (1789), Лобачевского (1792), Абеля (1802), Галуа (1811). Как видим, в мире произошло много важных событий, существенно изменивших нашу жизнь, а задача о кубоиде была и остаётся нерешённой. Здесь мы рассмотрим один из подходов к этой трудной задаче, который, возможно, изменит ситуацию.

В работе [51] задача построения совершенного кубоида была сведена к одному диофантовому уравнению 12-й степени от переменных a, b, u и t:

$$\begin{gathered}
u^4\,a^4\,b^4+6\,a^4\,u^2\,b^4\,t^2-2\,u^4\,a^4\,b^2\,t^2-2\,u^4\,a^2\,b^4\,t^2+4\,u^2\,b^4\,a^2\,t^4+\\
+4\,a^4\,u^2\,b^2\,t^4-12\,u^4\,a^2\,b^2\,t^4+u^4\,a^4\,t^4+u^4\,b^4\,t^4+a^4\,b^4\,t^4+\\
+6\,a^4\,u^2\,t^6+6\,u^2\,b^4\,t^6-8\,a^2\,b^2\,u^2\,t^6-2\,u^4\,a^2\,t^6-2\,u^4\,b^2\,t^6-\\
-2\,a^4\,b^2\,t^6-2\,b^4\,a^2\,t^6+u^4\,t^8+b^4\,t^8+a^4\,t^8+4\,a^2\,u^2\,t^8+\\
+4\,b^2\,u^2\,t^8-12\,b^2\,a^2\,t^8+6\,u^2\,t^{10}-2\,a^2\,t^{10}-2\,b^2\,t^{10}+t^{12}=0.
\end{gathered}\tag{1.1}$$

R.A. Sharipov, Asymptotic approach to the perfect cuboid problem.

Поступила 12 июля 2015 г.

Точнее результат работы [51] формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Совершенный кубоид существует тогда и только тогда, когда диофантово уравнение* (1.1) *имеет решение, такое, что* a, b, u, t *— четыре положительных числа, удовлетворяющих неравенствам* $a < t$, $b < t$, $u < t$, $(a+t)\,(b+t) > 2\,t^2$.

Анализ уравнения (1.1) в [52] показал, что имеются два случая, когда полином в левой части уравнения (1.1) оказывается приводимым, и от него отщепляются несущественные множители, которые не дают совершенных кубоидов. В этих случаях степень уравнения (1.1) понижается до 8-й и 10-й соответственно. Применительно к этим случаям в [52] были сформулированы первая и вторая гипотезы о кубоиде. Для общего случая, когда редукции уравнения (1.1) не происходит, была сформулирована третья гипотеза о кубоиде.

Случай первой гипотезы о кубоиде получается при $a = b \neq u$. Этот случай оказался самым простым. Несмотря на то, что сама первая гипотеза о кубоиде осталась не доказанной, в работе [53] было установлено, что в этом случае совершенные кубоиды возникать не могут.

Случаи второй и третьей гипотез о кубоиде оказались более сложными. В этих случаях в работах [54] и [55] удалось лишь получить некоторые структурные теоремы о целочисленных решениях уравнения (1.1), а вопрос о существовании таких решений, приводящих к совершенным кубоидам, остался открытым. Вторая и третья гипотезы о кубоиде также остаются не доказанными и не опровергнутыми.

В данной работе рассматривается только случай второй гипотезы о кубоиде и суммируются результаты, полученные автором для этого случая в электронных публикациях [56–59]. 19-го мая 2015 г. большая часть этих результатов была доложена на общегородском семинаре по дифференциальным уравнениям математической физики имени А.М. Ильина. Автор признателен руководителю семинара Л.А. Калякину за возможность сделать доклад. Автор признателен другому руководителю семинара В.Ю. Новокшёнову и всем участникам за внимание и ценные замечания во время доклада. Автор также признателен Б.И. Сулейманову, указавшему на работы А.Д. Брюно по многогранникам Ньютона и их применениям в асимптотическом анализе.

Работы [60–72], выполненные по времени в промежутке между работами [51–55] и [56–59], развивают принципиально иной подход, основанный на дискретной S_3-симметрии в уравнениях совершенного кубоида и использующий технику мультисимметричных полиномов. Этот подход предполагается рассмотреть в отдельной публикации.

2. Случай второй гипотезы о кубоиде

Случай второй гипотезы о кубоиде возникает, когда параметры a, b, u в уравнении (1.1) связаны друг с другом одним из двух следующих соотношений:

$$b\,u = a^2, \qquad\qquad a\,u = b^2. \tag{2.1}$$

Первое из соотношений (2.1) разрешается подстановкой

$$a = p\,q, \qquad\qquad b = p^2, \qquad\qquad u = q^2. \tag{2.2}$$

Второе соотношение (2.1) разрешается подстановкой

$$a = p^2, \qquad\qquad b = p\,q, \qquad\qquad u = q^2. \tag{2.3}$$

После применения любой из подстановок (2.2) или (2.3) к уравнению (1.1) от него отделяется несущественный множитель, и его степень понижается с 12-й до 10-й. В результате любой из этих двух подстановок возникает одно и то же уравнение 10-й степени относительно трёх переменных p, q и t:

$$\begin{gathered} t^{10}+(2\,q^2+p^2)\,(3\,q^2-2\,p^2)\,t^8+(q^8+10\,p^2\,q^6+4\,p^4\,q^4-\\ -14\,p^6\,q^2+p^8)\,t^6-p^2\,q^2\,(q^8-14\,p^2\,q^6+4\,p^4\,q^4+10\,p^6\,q^2+\\ +p^8)\,t^4-p^6\,q^6\,(q^2+2\,p^2)\,(3\,p^2-2\,q^2)\,t^2-q^{10}\,p^{10}=0. \end{gathered}\tag{2.4}$$

Из теоремы 1.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Совершенный кубоид в случае второй гипотезы о кубоиде существует тогда и только тогда, когда диофантово уравнение* (2.4) *имеет решение, такое, что* p, q, t *— три положительных числа, удовлетворяющих неравенствам* $p\,q<t$, $p^2<t$, $q^2<t$, $(p\,q+t)\,(p^2+t)>2\,t^2$.

Сама вторая гипотеза о кубоиде формулируется так (см. [52]).

Гипотеза 2.1 (вторая гипотеза о кубоиде)**.** *Для любых двух взаимно простых положительных целых чисел* $p\neq q$ *полином 10-й степени в левой части уравнения* (2.4) *неприводим над полем рациональных чисел* $\mathbb{Q}$.

Гипотеза 2.1 приводится здесь справочно и в дальнейшем не рассматривается. Основные усилия направляются на изучение уравнения (2.4).

3. Мотивация асимптотического подхода

Компьютерный поиск совершенных кубоидов через уравнение (2.4) происходит итеративно. Например, так. При каждом фиксированном p проводим перебор по q и для каждого q решаем уравнение (2.4) по t. Теоретически, для исчерпывающего поиска, при каждом p мы должны перебрать все целые значения q от 1 до $+\infty$. На практике приходится заменять $+\infty$ каким-то конкретным большим числом $q_{\max}(p)$. Уравнение (2.4) замечательно тем, что выбор конечной верхней границы $q_{\max}(p)$ для него можно сделать обоснованным и равносильным бесконечному перебору. Корни полиномиальных уравнений от двух переменных по одной из переменных демонстрируют достаточно простую и просто вычислимую асимптотику при стремлении второй переменной к бесконечности. Используя такую асимптотику, при определённых обстоятельствах можно показать, что при q большем определённого значения $q_{\max}(p)$ уравнение (2.4) не имеет целочисленных корней, либо его целочисленные корни не удовлетворяют неравенствам из теоремы 2.1.

4. Асимптотика корней t_i при $q\to+\infty$

Обозначим через $Q_{pq}(t)$ полином в левой части уравнения (2.4). Этим обозначением мы выделяем переменную t как основную, а переменные p и q рассматриваем как параметры. Полином $Q_{pq}(t)$ является чётным по t. Поэтому вместе с каждым корнем t он имеет противоположный корень $-t$. Условие

$$\begin{cases} t>0, \ \text{ если }\ t \text{ — вещественный корень,}\\ \operatorname{Im}(t)>0, \ \text{ если }\ t \text{ — комплексный корень,}\end{cases}\tag{4.1}$$

выделяет группу из пяти корней t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 полинома $Q_{pq}(t)$. Остальные пять корней получаются сменой знака:

$$t_6=-t_1,\qquad t_7=-t_2,\qquad t_8=-t_3,\qquad t_9=-t_4,\qquad t_{10}=-t_5.$$

Асимптотики корней полиномиальных уравнений имеют степенной характер [73]. При фиксированном $p=\text{const}$ они записываются в виде рядов

$$t_i(p,q)=C_i\,q^{\,\alpha_i}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\beta_{is}\,q^{-s}\right)\ \text{ при }\ q\to+\infty.\tag{4.2}$$

Коэффициенты C_i в (4.2) должены быть отличны от нуля: $C_i \neq 0$. Эти коэффициенты и показатели степени α_i вычисляются графически при помощи многоугольника Ньютона, связанного с полиномом $Q_{pq}(t)$ (рис. 4.1). Запишем полином $Q_{pq}(t)$ формально в виде

$$Q_{pq}(t) = \sum_{m=0}^{10} \sum_{r=0}^{10} A_{m\,r}(p)\, q^r\, t^m. \tag{4.3}$$

Число слагаемых в формальной сумме (4.3) равно 121. Фактическое количество слагаемых в полиноме $Q_{pq}(t)$ значительно меньше. При построении многоугольника Ньютона выбираются ненулевые слагаемые из (4.3) и отмечаются в виде точек с координатами (m, r) на координатной плоскости. Поскольку координаты (m, r) целочисленны, эти точки попадают в узлы целочисленной решётки (рис. 4.1).

Определение 4.1. *Для любого полинома от двух переменных $P(t, q)$ выпуклая оболочка всех узлов целочисленной решётки на координатной плоскости, соответствующих его мономам, называется многоугольником Ньютона для полинома $P(t, q)$.*

Граница многоугольника Ньютона, изображённого на рис. 4.1, состоит из двух частей — верхней и нижней. На верхней части границы расположены узлы $A_{0\,10}$, $A_{2\,10}$ $A_{4\,10}$, $A_{6\,8}$ $A_{8\,4}$ и $A_{10\,0}$. Соответствующие этим узлам коэффициенты полинома $Q_{pq}(t)$ даются формулами

$$\begin{aligned} &A_{0\,10} = -p^{10}, && A_{2\,10} = 2\,p^6, && A_{4\,10} = -p^2, \\ &A_{6\,8} = 1, && A_{8\,4} = 6, && A_{10\,0} = 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

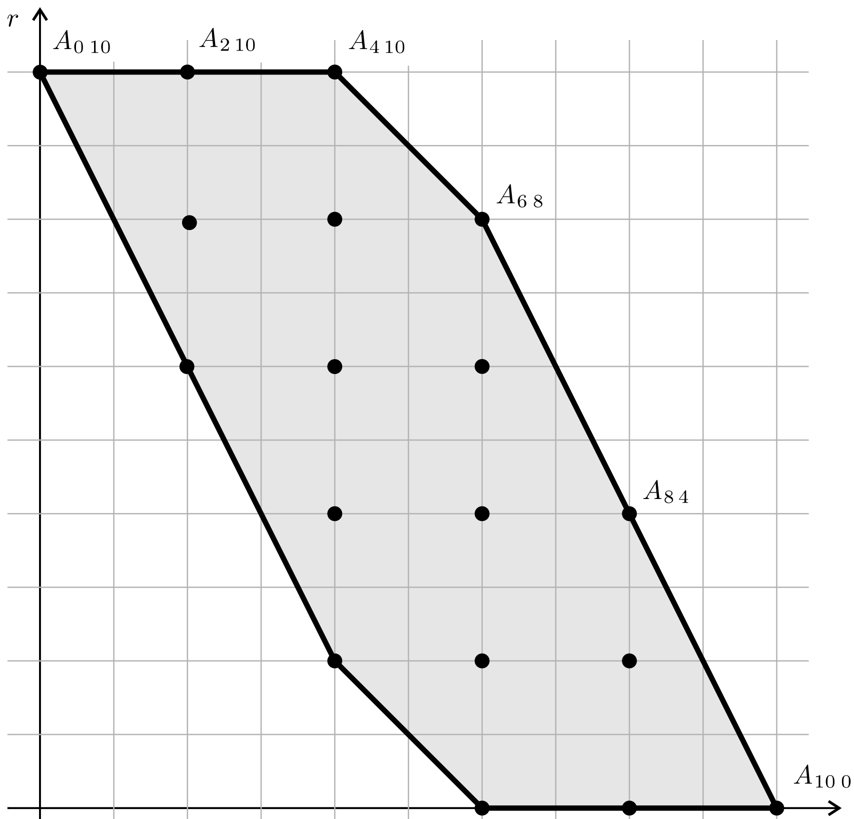

Рис. 4.1

Следующая теорема выражает давно известный факт. Её доказательство можно найти в работе [56].

Теорема 4.1. *Показатели степени α_i в асимптотических разложениях* (4.2) *вычисляются по формуле $\alpha_i = -k$, где k — угловой коэффициент наклона звеньев ломаной линии, образующей верхнюю часть границы многоугольника Ньютона на рис. 4.1.*

В нашем случае теорема 4.1 даёт следующие возможные значения для показателей степени α_i в асимптотических разложениях (4.2):

$$\alpha_i = 0, \qquad\qquad \alpha_i = 1, \qquad\qquad \alpha_i = 2. \tag{4.5}$$

Число корней, удовлетворяющих условию (4.1), больше трёх. Поэтому некоторые из корней t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 имеют одинаковые показатели роста при $q \to +\infty$.

Помимо α_i, каждый из корней t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 характеризуется своим коэффициентом C_i в разложениях (4.2). Эти коэффициенты также вычисляются по многоугольнику Ньютона.

Случай $\alpha_i = 0$ в (4.5) соответствует горизонтальному отрезку на верхней границе многоугольника Ньютона. На этом отрезке расположены три узла $A_{4\,10}$, $A_{2\,10}$, и $A_{0\,10}$. Поэтому соответствующее уравнение на C_i имеет вид

$$A_{4\,10}\,C_i^{\,4} + A_{2\,10}\,C_i^{\,2} + A_{0\,10} = 0. \tag{4.6}$$

С учётом (4.4) уравнение (4.6) имеет два вещественных корня

$$C_i = p^2, \qquad\qquad C_i = -p^2, \tag{4.7}$$

каждый из которых кратности 2. Условие (4.1) исключает корень $C_i = -p^2$ в (4.7), оставляя лишь один корень кратности 2. Ему отвечает разложение

$$t_i(p,q) = p^2\biggl(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{is}\,q^{-s}\biggr). \tag{4.8}$$

Случай $\alpha_i = 1$ в (4.5) соответствует короткому наклонному отрезку на верхней границе многоугольника Ньютона. Этот отрезок содержит два узла $A_{4\,10}$ и $A_{6\,8}$. Соответствующий коэффициент C_i в (4.2) определяется уравнением

$$A_{6\,8}\,C_i^{\,6} + A_{4\,10}\,C_i^{\,4} = 0. \tag{4.9}$$

С учётом (4.4) и $C_i \neq 0$ уравнение (4.9) имеет два простых вещественных корня

$$C_i = p, \qquad\qquad C_i = -p. \tag{4.10}$$

Условие (4.1) исключает корень $C_i = -p$ в (4.10), оставляя лишь один корень $C_i = p$. Этому корню соответствует разложение

$$t_i(p,q) = p\,q\biggl(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{is}\,q^{-s}\biggr). \tag{4.11}$$

Случай $\alpha_i = 2$ в (4.5) соответствует длинному наклонному отрезку на верхней границе многоугольника Ньютона. Этот отрезок содержит три узла $A_{6\,8}$, $A_{8\,4}$ и $A_{10\,0}$. Поэтому соответствующее уравнение на C_i имеет вид

$$A_{10\,0}\,C_i^{\,10} + A_{8\,4}\,C_i^{\,8} + A_{6\,8}\,C_i^{\,6} = 0. \tag{4.12}$$

С учётом (4.4) и $C_i \neq 0$ уравнение (4.12) имеет четыре комплексных корня:

$$C_i = (\sqrt{2} + 1)\,\mathfrak{i}, \qquad\qquad C_i = (\sqrt{2} - 1)\,\mathfrak{i}, \tag{4.13}$$

$$C_i = -(\sqrt{2} + 1)\,\mathfrak{i}, \qquad\qquad C_i = -(\sqrt{2} - 1)\,\mathfrak{i}. \tag{4.14}$$

Здесь $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$. Корни (4.14) исключаются условием (4.1). Остаётся два корня (4.13), которые дают следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} t_i(p,q) &= (\sqrt{2}+1)\,\mathfrak{i}\,q^2\biggl(1+\sum_{s=1}^{\infty}\beta_{is}\,q^{-s}\biggr),\\ t_i(p,q) &= (\sqrt{2}-1)\,\mathfrak{i}\,q^2\biggl(1+\sum_{s=1}^{\infty}\beta_{is}\,q^{-s}\biggr). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Формулы (4.8), (4.11), (4.15) суммируются следующей теоремой.

Теорема 4.2. *Для достаточно больших значений q, т. е. при $q > q_{min}$, уравнение* 10*-й степени* (2.4) *имеет пять корней кратности* 1*, удовлетворяющих условию* (4.1)*. Три из них t_1, t_2, t_3 вещественны. Их асимптотики при $q \to +\infty$ даются формулами*

$$t_1 \sim p^2, \qquad t_2 \sim p^2, \qquad t_3 \sim p\,q. \tag{4.16}$$

Остальные два корня уравнения (2.4) *комплексны. Асимптотики этих корней при $q \to +\infty$ описываются формулами*

$$t_4 \sim (\sqrt{2}+1)\,\mathfrak{i}\,q^2, \qquad t_5 \sim (\sqrt{2}-1)\,\mathfrak{i}\,q^2. \tag{4.17}$$

5. Асимптотические оценки для вещественных корней

Асимптотические разложения (4.8), (4.11), (4.15) и формулы (4.16), (4.17) описывают предельное поведение корней уравнения (2.4) при $q \to +\infty$. Они не дают конкретной информации о локализации корней при конечных q. Для этого требуются асимптотические оценки, т. е. оценки остаточных членов для конечных сумм асимптотических рядов.

Согласно формулам (4.16) корни t_1 и t_2 не растут при $q \to +\infty$. Поэтому асимптотические ряды (4.8) для них можно оборвать сразу после главного члена и записать формулу (4.8) в виде следующих сумм

$$t_1 = p^2 + R_1(p,q), \qquad t_2 = p^2 + R_2(p,q). \tag{5.1}$$

Наша следующая цель — получить оценки вида

$$|R_i(p,q)| < \frac{C(p)}{q}, \ \text{ где } \ i = 1,\,2. \tag{5.2}$$

Для достижения этой цели мы делаем подстановку

$$t = p^2 + \frac{c}{q} \tag{5.3}$$

в уравнение (2.4). В полученное уравнение мы делаем ещё одну подстановку

$$q = \frac{1}{z}. \tag{5.4}$$

После двух подстановок (5.3) и (5.4) и после удаления знаменателей уравнение (2.4) превращается в полиномиальное уравнение в новых переменных c и z. Особенностью этого уравнения является то, что оно записывается в виде

$$16\,p^{12} + f(c,p,z) = 4\,p^6\,c^2. \tag{5.5}$$

Здесь $f(c,p,z)$ — это полином, даваемый явной формулой. Но формула для $f(c,p,z)$ громоздка. Она выписана в машинно-читаемом формате и помещена в дополнительный файл (ancillary file) `strategy_formulas.txt`, прилагаемый к электронной публикации [56]. Ссылка для скачивания этого файла имеется на странице http://arXiv.org/abs/1504.07161.

Полином $f(c,p,z)$ зануляется при $z = 0$. Поэтому его значения достаточно малы при малых z. Пусть $q \geqslant 59\,p$ и пусть параметр c пробегает интервал

$$-5\,p^3 < c < 0. \tag{5.6}$$

Из $q \geqslant 59\,p$ и из (5.4) вытекает оценка $|z| \leqslant 1/59\,p^{-1}$. Используя эту оценку и используя неравенства (5.6), прямыми вычислениями можно вывести следующую оценку:

$$|f(c,p,z)| < 15\,p^{12}. \tag{5.7}$$

При фиксированных p и z оценка (5.7) означает, что левая часть уравнения (5.5) — это непрерывная функция от c, принимающая значения в пределах от p^{12} до $31\,p^{12}$, когда c пробегает интервал (5.6). Правая часть уравнения (5.5) — это тоже непрерывная функция от c. Она монотонно убывает от $100\,p^{12}$ до 0 на интервале (5.6). По этой причине где-то на интервале (5.6) имеется по меньшей мере один корень уравнения (5.5).

Параметр c связан с переменной t формулой (5.3). Неравенства (5.5) для c означают, что выполнены следующие неравенства для t:

$$p^2 - \frac{5\,p^3}{q} < t < p^2. \tag{5.8}$$

Неравенства (5.8) и приведённые рассуждения дают следующую теорему.

Теорема 5.1. *Для каждого $q \geqslant 59\,p$ имеется по крайней мере один вещественный корень уравнения* (2.4)*, удовлетворяющий неравенствам* (5.8)*.*

Приведённые выше рассуждения можно повторить для случая, когда параметр c пробегает интервал, зеркально-симметричный интервалу (5.6):

$$0 < c < 5\,p^3. \tag{5.9}$$

В этом случае из (5.9) и (5.3) вытекают неравенства

$$p^2 < t < p^2 + \frac{5\,p^3}{q} \tag{5.10}$$

для переменной t, и мы получаем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Для каждого $q \geqslant 59\,p$ имеется по крайней мере один вещественный корень уравнения* (2.4)*, удовлетворяющий неравенствам* (5.10)*.*

Теоремы 5.1 и 5.2 дают асимптотические оценки вида (5.2) с $C(p) = 5\,p^3$ для остаточных членов $R_1(p,q)$ и $R_2(p,q)$ в формулах (5.1).

Согласно формулам (4.16) корень t_3 является растущим при $q \to +\infty$. Для него мы записываем асимптотическую формулу с остаточным членом

$$t_3 = p\,q - \frac{16\,p^3}{q} + R_3(p,q) \tag{5.11}$$

и ищем оценку для остаточного члена $R_3(p,q)$ в форме

$$|R_3(p,q)| < \frac{C(p)}{q^2}. \tag{5.12}$$

Далее записываем неравенства

$$p\,q - \frac{16\,p^3}{q} - \frac{5\,p^4}{q^2} < t < p\,q - \frac{16\,p^3}{q} + \frac{5\,p^4}{q^2} \tag{5.13}$$

и формулируем следующую теорему.

Теорема 5.3. *Для каждого $q \geqslant 59\,p$ имеется по крайней мере один вещественный корень уравнения* (2.4)*, удовлетворяющий неравенствам* (5.13)*.*

Доказательство теоремы 5.3 можно найти в [56]. Оно мало чем отличается от доказательства теорем 5.1 и 5.2, приведённого выше.

Неравенства (5.13) доказывают оценку (5.12) с $C(p) = 5\,p^4$ для остаточного члена $R_3(p,q)$ в асимптотической формуле (5.11).

6. Асимптотические оценки для комплексных корней

Комплексность корней t_4 и t_5 вытекает из формул (4.15). Для комплексного корня t_4 записывается асимптотическая формула

$$t_4 = (\sqrt{2}+1)\,\mathrm{i}\,q^2 + (\sqrt{2}-2)\,\mathrm{i}\,p^2 + R_4(p,q), \text{ где } \mathrm{i} = \sqrt{-1}. \tag{6.1}$$

Для остаточного члена $R_4(p,q)$ ищется оценка вида

$$|R_4(p,q)| < \frac{C(p)}{q}. \tag{6.2}$$

Далее записываются неравенства

$$(\sqrt{2}+1)\,q^2 + (\sqrt{2}-2)\,p^2 - \frac{5\,p^3}{q} < \operatorname{Im} t < (\sqrt{2}+1)\,q^2 + (\sqrt{2}-2)\,p^2 + \frac{5\,p^3}{q} \tag{6.3}$$

и формулируется следующая теорема.

Теорема 6.1. *Для каждого $q \geqslant 59\,p$ имеется по крайней мере один чисто мнимый корень уравнения* (2.4)*, удовлетворяющий неравенствам* (6.3)*.*

Неравенства (6.3) доказывают оценку (6.2) с $C(p) = 5\,p^3$ для остаточного члена в асимптотической формуле (6.1).

Сама теорема 6.1 аналогична рассмотренным выше теоремам 5.1, 5.2, 5.3. Её доказательство содержится в работе [56].

Комплексный корень t_5 уравнения (2.4) аналогичен корню t_4. Для комплексного корня t_5 записывается асимптотическая формула

$$t_4 = (\sqrt{2}-1)\,\mathrm{i}\,q^2 + (\sqrt{2}+2)\,\mathrm{i}\,p^2 + R_5(p,q), \text{ где } \mathrm{i} = \sqrt{-1}. \tag{6.4}$$

Для остаточного члена $R_5(p,q)$ ищется оценка вида

$$|R_5(p,q)| < \frac{C(p)}{q}. \tag{6.5}$$

Далее записываются неравенства

$$(\sqrt{2}-1)\,q^2 + (\sqrt{2}+2)\,p^2 - \frac{5\,p^3}{q} < \operatorname{Im} t < (\sqrt{2}-1)\,q^2 + (\sqrt{2}+2)\,p^2 + \frac{5\,p^3}{q} \tag{6.6}$$

и формулируется следующая теорема.

Теорема 6.2. *Для каждого $q \geqslant 59\,p$ имеется по крайней мере один чисто мнимый корень уравнения* (2.4)*, удовлетворяющий неравенствам* (6.6)*.*

Неравенства (6.6) доказывают оценку (6.5) с $C(p) = 5\,p^3$ для остаточного члена в асимптотической формуле (6.4). А доказательство неравенства (6.6) и теоремы 6.2 можно найти в работе [56].

7. Асимптотические интервалы

Неравенства (5.8), (5.10), (5.13), (6.3), (6.6) задают пять открытых интервалов. Первые три из них на вещественной оси. Остальные два на мнимой оси. В работе [56] доказывается несколько чисто технических результатов относительно асимптотических интервалов (5.8), (5.10), (5.13), (6.3), (6.6). Главный вывод из этих технических результатов состоит в том, что при $q \geqslant 59\,p$ асимптотические интервалы не пересекаются друг с другом. Первые три из них лежат в положительной части вещественной оси, а остальные два — в положительной части мнимой оси. Этот вывод в сочетании с теоремами 5.1, 5.2, 5.3, 6.1, 6.2 приводит к следующему результату.

Теорема 7.1. *При $q \geqslant 59\,p$ пять корней t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 уравнения* (2.4)*, удовлетворяющих условиям* (4.1)*, являются простыми. Они лежат в пяти попарно не пересекающихся интервалах* (5.8), (5.10), (5.13), (6.3), (6.6) *по одному в каждом интервале.*

8. Целочисленные точки асимптотических интервалов

Глядя на формулы (5.8), (5.10), (5.13), (6.3), (6.6), легко видеть, что длина асимптотических интервалов стремится к нулю при $q \to +\infty$. Естественным образом это уменьшает возможность попадания целочисленных точек в эти интервалы. В работе [56] доказаны следующие теоремы.

Теорема 8.1. *При $q \geqslant 59\,p$ и при $q > 5\,p^3$ асимптотические интервалы* (5.8) *и* (5.10) *не содержат целочисленных точек.*

Теорема 8.2. *При $q \geqslant 59\,p$ и при $q^2 > 10\,p^4$ асимптотический интервал* (5.13) *содержит не более одной целочисленной точки.*

Теорема 8.3. *При $q \geqslant 59\,p$ и при $q \geqslant 16\,p^3 + 5\,p/16$ асимптотический интервал* (5.13) *не содержит целочисленных точек.*

Заметим, что согласно теореме 2.1 не всякое целочисленное решение уравнения (2.4) порождает совершенный кубоид. Дополнительно должны выполняться неравенства:

$$p\,q < t, \qquad p^2 < t, \qquad q^2 < t, \qquad (p\,q + t)\,(p^2 + t) > 2\,t^2. \tag{8.1}$$

Попадание корней уравнения (2.4) при $q \geqslant 59\,p$ в асимптотические интервалы (5.8), (5.10), (5.13), (6.3), (6.6) даёт новые неравенства для них. Путём сравнения неравенств (8.1) с неравенствами (5.8), (5.10), (5.13) в [56] было показано, что при $q \geqslant 59\,p$ целочисленные точки вещественных асимптотических интервалов не удовлетворяют неравенствам (8.1). Отсюда был выведен следующий центральный результат работы [56].

Теорема 8.4. *При $q \geqslant 59\,p$ диофантово уравнение* (2.4) *не имеет решений, порождающих совершенные кубоиды.*

При каждом фиксированном значении p теорема 8.4 даёт верхнюю границу $q_{\max}(p) = 59\,p$, вплоть до которой следует производить численный поиск совершенных кубоидов в случае второй гипотезы о кубоиде.

9. Реверсные асимптотики

В работе [57] параметры p и q уравнения (2.4) меняются ролями. В этой работе параметр q удерживается неизменным, а параметр p устремляется к бесконечности. Асимптотики, полученные при этих условиях, были названы реверсными. Значительная часть результатов работы [56] была перенесена на случай реверсных асимптотик. А именно, были найдены асимптотические разложения с асимптотическими оценками, а затем и асимптотические интервалы для корней t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 уравнения (2.4), удовлетворяющих условиям

(4.1). Эти асимптотические интервалы задаются следующими неравенствами:

$$p\,q + \frac{16\,q^3}{p} - \frac{5\,q^4}{p^2} < t < p\,q + \frac{16\,q^3}{p} + \frac{5\,q^4}{p^2}, \tag{9.1}$$

$$p^2 - 2\,q\,p - 2\,q^2 - \frac{9\,q^3}{p} < t < p^2 - 2\,q\,p - 2\,q^2, \tag{9.2}$$

$$p^2 + 2\,q\,p - 2\,q^2 < t < p^2 + 2\,q\,p - 2\,q^2 + \frac{9\,q^3}{p}, \tag{9.3}$$

$$(\sqrt{2}+1)\,q^2 - \frac{5\,q^3}{p^2} < \operatorname{Im} t < (\sqrt{2}+1)\,q^2 + \frac{5\,q^3}{p^2}, \tag{9.4}$$

$$(\sqrt{2}-1)\,q^2 - \frac{5\,q^3}{p^2} < \operatorname{Im} t < (\sqrt{2}-1)\,q^2 + \frac{5\,q^3}{p^2}. \tag{9.5}$$

Аналогом теоремы 7.1 здесь является следующая теорема, доказанная в [57].

Теорема 9.1. *При $p \geqslant 59\,q$ пять корней t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 уравнения* (2.4), *удовлетворяющих условиям* (4.1), *являются простыми. Они лежат в пяти попарно не пересекающихся интервалах* (9.1), (9.2), (9.3), (9.4), (9.5) *по одному в каждом интервале.*

Легко видеть, что длины асимптотических интервалов стремятся к нулю при $p \to +\infty$. Отталкиваясь от этого факта, в [57] были сформулированы следующие три теоремы.

Теорема 9.2. *При $p \geqslant 59\,q$ и при $p > 9\,q^3$ асимптотические интервалы* (9.2) *и* (9.3) *не содержат целочисленных точек.*

Теорема 9.3. *При $p \geqslant 59\,q$ и при $p^2 > 10\,q^4$ асимптотический интервал* (9.1) *содержит не более одной целочисленной точки.*

Теорема 9.4. *При $p \geqslant 59\,q$ и при $p \geqslant 16\,q^3 + 5\,q/16$ асимптотический интервал* (9.1) *не содержит целочисленных точек.*

Теоремы 9.2, 9.3, 9.4 являются аналогами теорем 8.1, 8.2, 8.3. Их доказательство почти дословно повторяло бы доказательство теорем 8.1, 8.2, 8.3, содержащееся в [56]. Поэтому оно не приведено в [57] и не приводится здесь.

Несмотря на значительное сходство, параллель между работами [56] и [57] не является полной. Аналога теоремы 8.4 в [57] доказать не удалось. Вместо этого был получен более слабый результат, выраженный следующей теоремой.

Теорема 9.5. *При одновременном выполнении условия $p \geqslant 59\,q$ и условия $p > 9\,q^3$ диофантово уравнение* (2.4) *не имеет решений, порождающих совершенные кубоиды.*

Суммируя результаты теорем 8.4 и 9.5, в [57] были определены три области в положительном квадранте координатной плоскости $p\,q$:

1. **Линейная область**, заданная линейными неравенствами

$$\frac{q}{59} < p, \qquad\qquad p < 59\,q; \tag{9.6}$$

2. **Нелинейная область**, заданная нелинейными неравенствами

$$59\,q \leqslant p, \qquad\qquad p \leqslant 9\,q^3; \tag{9.7}$$

3. **Область, свободная от кубоидов**, которая включает в себя все, что не вошло в первые две области.

10. Асимптотики при одновременном стремлении p и q к бесконечности

В работах [58] и [59] рассматривались асимптотики корней уравнения (2.4) при одновременном стремлении p и q к бесконечности. При этом основной результат работы [58] строится на асимптотиках, когда

$$p - q = \text{const}\,.$$

Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 10.1. *Если положительные целочисленные параметры p и q уравнения* (2.4) *удовлетворяют неравенствам*

$$q - \frac{q}{97} \leqslant p, \qquad\qquad p \leqslant q + \min\Bigl(\frac{q}{97}, \sqrt[3]{\frac{q}{74}}\Bigr), \tag{10.1}$$

то уравнение (2.4) *не имеет решений, порождающих совершенные кубоиды.*

Основной результат работы [59] строится на асимптотиках, когда

$$p - B\,q^3 = \text{const} \quad \text{и} \quad B = 1,\,2,\,\ldots,\,9.$$

Здесь вместо (10.1) возникают неравенства

$$B\,q^3 - \frac{q^3}{3600^3} \leqslant p \leqslant B\,q^3 + \frac{q^3}{3600^3}, \tag{10.2}$$

$$B\,q^3 - 2\,q < p < B\,q^3 + 2\,q, \tag{10.3}$$

и формулируются следующие теоремы.

Теорема 10.2. *Для всех $B = 1,\,2,\,\ldots,\,9$, кроме $B = 5$, если выполнены неравенства* (10.2)*, то уравнение* (2.4) *не имеет решений, порождающих совершенные кубоиды.*

Теорема 10.3. *При $B = 5$, если одновременно выполнены неравенства* (10.2) *и* (10.3)*, то диофантово уравнение* (2.4) *не имеет решений, порождающих совершенные кубоиды.*

Результаты, выраженные теоремой 10.1 и теоремами 10.2, 10.3, носят очень ограниченный характер. Через (10.1), (10.2) и (10.3) они выделяют небольшие подобласти внутри рассмотренных выше линейной и нелинейной областей, заданных неравенствами (9.6) и (9.7), и гарантируют отсутствие совершенных кубоидов в выделенных подобластях.

11. Дальнейшие перспективы

Пока задача о совершенном кубоиде остаётся нерешённой, никто не может сказать, на каком из путей будет найдено её решение. Что касается асимптотического подхода к задаче в случае второй гипотезы о кубоиде, автор считает перспективным рассмотрение обратимых преобразований параметров вида

$$\tilde{p} = \tilde{p}(p, q), \qquad\qquad \tilde{q} = \tilde{q}(p, q),$$

см. [74], с последующим изучением асимптотик при $\tilde{q} \to +\infty$ и $\tilde{p} = \text{const}$. Возможно также рассмотрение асимптотик при независимом стремлении p и q к бесконечности с привлечением техники многогранников Ньютона, развивавшейся в многочисленных работах Брюно, Арнольда, Бернштейна, Варченко, Волевича, Гиндикина, Кушнеренко, Хованского, Солеева и других. Этот подход является более сложным, поскольку требует определённых затрат времени на изучение указанной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Halcke P., *Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect*, N. Sauer, Hamburg, Germany, 1719.
2. Saunderson N., *Elements of algebra*, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1740.
3. Euler L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Kayserliche Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg, 1771.
4. Pocklington H. C., *Some Diophantine impossibilities* // Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 17, 1912, P. 108–121.
5. Dickson L. E., *History of the theory of numbers*, Vol. 2: *Diophantine analysis*, Dover, New York, 2005.
6. Kraitchik M., *On certain rational cuboids* // Scripta Math., Vol. 11, 1945, P. 317–326.
7. Kraitchik M., *Théorie des Nombres,* Tome 3*, Analyse Diophantine et application aux cuboides rationelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1947.
8. Kraitchik M., *Sur les cuboides rationelles* // Proc. Int. Congr. Math., 1954, Vol. 2, Amsterdam, P. 33–34
9. Bromhead T. B., *On square sums of squares* // Math. Gazette, 1960, Vol. 44, № 349, P. 219–220.
10. Lal M., Blundon W. J., *Solutions of the Diophantine equations* $x^2 + y^2 = l^2$*,* $y^2 + z^2 = m^2$*,* $z^2 + x^2 = n^2$ // Math. Comp., 1966, Vol. 20, P. 144–147.
11. Spohn W. G., *On the integral cuboid* // Amer. Math. Monthly, 1972, Vol. 79, № 1, P. 57-59.
12. Spohn W. G., *On the derived cuboid* // Canad. Math. Bull., 1974, Vol. 17, № 4, P. 575-577.
13. Chein E. Z., *On the derived cuboid of an Eulerian triple* // Canad. Math. Bull., 1977, Vol. 20, № 4, P. 509–510.
14. Leech J., *The rational cuboid revisited* // Amer. Math. Monthly, 1977, Vol. 84, № 7, P. 518– 533; см. также *Erratum* // Amer. Math. Monthly, 1978, Vol. 85, P. 472.
15. Leech J., *Five tables relating to rational cuboids* // Math. Comp., 1978, Vol. 32, P. 657–659.
16. Spohn W. G., *Table of integral cuboids and their generators* // Math. Comp., 1979, Vol. 33, P. 428–429.
17. Lagrange J., *Sur le dérivé du cuboide Eulérien* // Canad. Math. Bull., 1979, Vol. 22, № 2, P. 239–241.
18. Leech J., *A remark on rational cuboids* // Canad. Math. Bull., 1981, Vol. 24, № 3, P. 377–378.
19. Korec I., *Nonexistence of small perfect rational cuboid* // Acta Math. Univ. Comen., 1983, Vol. 42/43, P. 73–86.
20. Korec I., *Nonexistence of small perfect rational cuboid II* // Acta Math. Univ. Comen., 1984, Vol. 44/45, P. 39–48.
21. Wells D. G., *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*, Penguin publishers, London, 1986.
22. Bremner A., Guy R. K., *A dozen difficult Diophantine dilemmas* // Amer. Math. Monthly, 1988, Vol. 95, № 1, P. 31–36.
23. Bremner A., *The rational cuboid and a quartic surface* // Rocky Mountain J. Math., 1988, Vol. 18, № 1, P. 105–121.
24. Colman W. J. A., *On certain semiperfect cuboids* // Fibonacci Quart., 1988, Vol. 26, № 1, P. 54–57; см. также *Some observations on the classical cuboid and its parametric solutions* // Fibonacci Quart., 1988, Vol. 26, № 4, P. 338–343.
25. Korec I., *Lower bounds for perfect rational cuboids* // Math. Slovaca, 1992, Vol. 42, № 5, P. 565–582.
26. Guy R. K.*Is there a perfect cuboid? Four squares whose sums in pairs are square. Four squares whose differences are square*, в книге *Unsolved Problems in Number Theory*, 2-nd ed., P. 173–181, Springer-Verlag, New York, 1994.
27. Rathbun R. L., Granlund T., *The integer cuboid table with body, edge, and face type of solutions* // Math. Comp., 1994, Vol. 62, P. 441–442.
28. Rathbun R. L., Granlund T., *The classical rational cuboid table of Maurice Kraitchik* // Math. Comp., 1994, Vol. 62, P. 442–443.

29. Colman W. J. A., *A perfect cuboid in Gaussian integers* // Fibonacci Quart., 1994, Vol. 32, №3, P. 266–268.
30. Peterson B. E., Jordan J. H., *Integer hexahedra equivalent to perfect boxes* // Amer. Math. Monthly, 1995, Vol. 102, №1, P. 41–45.
31. Van Luijk R., *On perfect cuboids*, Doctoraalscriptie, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2000.
32. Luca F., *Perfect cuboids and perfect square triangles* // Math. Magazine, 2000, Vol. 73, №5, P. 400–401.
33. Rathbun R. L., *The rational cuboid table of Maurice Kraitchik*, e-print **arXiv:math.HO/0111229** в электронном архиве http://arXiv.org.
34. Narumiya N., Shiga H., *On Certain Rational Cuboid Problems* // Nihonkai Math. Journal, 2001, Vol. 12, №1, P. 75–88.
35. Hartshorne R., Van Luijk R., *Non-Euclidean Pythagorean triples, a problem of Euler, and rational points on K3 surfaces*, e-print **arXiv:math.NT/0606700** в электронном архиве http://arXiv.org.
36. Waldschmidt M., *Open diophantine problems*, e-print **arXiv:math.NT/0312440** в электронном архиве http://arXiv.org.
37. Ionascu E. J., Luca F., Stanica P., *Heron triangles with two fixed sides*, e-print **arXiv: math.NT/0608185** в электронном архиве http://arXiv.org.
38. Ortan A., Quenneville-Belair V., *Euler's brick*, Delta Epsilon, McGill Undergraduate Mathematics Journal, 2006, Vol. 1, P. 30–33.
39. Knill O., *Hunting for Perfect Euler Bricks*, Harvard College Math. Review, 2008, Vol. 2, №2, P. 102.
40. Sloan N. J. A., *Sequences A031173* (http://oeis.org/A031173)*, A031174* (http://oeis.org /A03 1174)*, and A031175* (http://oeis.org/A031175), On-line encyclopedia of integer sequences, OEIS Foundation Inc., Portland, USA.
41. Roberts T. S., *Some constraints on the existence of a perfect cuboid*, Australian mathematical society gazette, 2010, Vol. 37, №1, P. 29–31.
42. Stoll M., Testa D., *The surface parametrizing cuboids*, e-print **arXiv:1009.0388** в электронном архиве http://arXiv.org.
43. Sawyer J., Reiter C. A., *Perfect parallelepipeds exist* // Math. Comp., 2011, Vol. 80, P. 1037–1040.
44. Meskhishvili M., *Perfect cuboid and congruent number equation solutions*, e-print **arXiv: 1211.6548** в электронном архиве http://arXiv.org.
45. Beauville A., *A tale of two surfaces*, e-print **arXiv:1303.1910** в электронном архиве http://arXiv.org.
46. Freitag E., Manni R. S., *Parametrization of the box variety by theta functions*, e-print **arXiv:1303.6495** в электронном архиве http://arXiv.org.
47. Sokolowsky B. D, VanHooft R. M., Reiter C. A., *An infinite family of perfect parallelepipeds* // Math. Comp., 2014, Vol. 83, P. 2441–2454.
48. Meskhishvili M., *Parametric solutions for a nearly-perfect cuboid*, e-print **arXiv:1502.02 375** в электронном архиве http://arXiv.org.
49. Kitchen S., *On the existence of perfect cuboids*, OURE publication, Missouri University of Science and Technology, 2015.
50. Wyss W., *On perfect cuboids*, e-print **arXiv:1506.02215** в электронном архиве http: //arXiv.org.
51. Sharipov R. A., *A note on a perfect Euler cuboid*, e-print **arXiv:1104.1716** в электронном архиве http://arXiv.org.
52. Шарипов Р. А., *Неприводимые полиномы в задаче о совершенном кубоиде* // Уфимский математический журнал. 2012. Том 4, №1. С. 153–160, см. также e-print **ar Xiv:1108.5348** в электронном архиве http://arXiv.org.
53. Sharipov R. A., *A note on the first cuboid conjecture*, e-print **arXiv:1109.2534** в электронном архиве http://arXiv.org.
54. Sharipov R. A., *A note on the second cuboid conjecture. Part I*, e-print **arXiv:1201.1229** в электронном архиве http://arXiv.org.

55. Sharipov R. A., *A note on the third cuboid conjecture. Part I*, e-print **arXiv:1203.2567** в электронном архиве http://arXiv.org.
56. Masharov A. A., Sharipov R. A., *A strategy of numeric search for perfect cuboids in the case of the second cuboid conjecture*, e-print **arXiv:1504.07161** в электронном архиве http://arXiv.org.
57. Sharipov R. A., *Reverse asymptotic estimates for roots of the cuboid characteristic equation in the case of the second cuboid conjecture*, e-print **arXiv:1505.00724** в электронном архиве http://arXiv.org.
58. Sharipov R. A., *Asymptotic estimates for roots of the cuboid characteristic equation in the linear region*, e-print **arXiv:1505.02745** в электронном архиве http://arXiv.org.
59. Sharipov R. A., *Asymptotic estimates for roots of the cuboid characteristic equation in the nonlinear region*, e-print **arXiv:1506.04705** в электронном архиве http://arXiv.org.
60. Sharipov R. A., *Perfect cuboids and multisymmetric polynomials*, e-print **arXiv:1205.3135** в электронном архиве http://arXiv.org.
61. Sharipov R. A., *On an ideal of multisymmetric polynomials associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1206.6769** в электронном архиве http://arXiv.org.
62. Sharipov R. A., *On the equivalence of cuboid equations and their factor equations*, e-print **arXiv:1207.2102** в электронном архиве http://arXiv.org.
63. Sharipov R. A., *A biquadratic Diophantine equation associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1207.4081** в электронном архиве http://arXiv.org.
64. Ramsden J. R., *A general rational solution of an equation associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1207.5339** в электронном архиве http://arXiv.org.
65. Ramsden J. R., Sharipov R. A.,*Inverse problems associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1207.6764** в электронном архиве http://arXiv.org.
66. Sharipov R. A., *On a pair of cubic equations associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1208.0308** в электронном архиве http://arXiv.org.
67. Sharipov R. A., *On two elliptic curves associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv: 1208.1227** в электронном архиве http://arXiv.org.
68. Ramsden J. R., Sharipov R. A.,*On singularities of the inverse problems associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1208.1859** в электронном архиве http://arXiv.org.
69. Ramsden J. R., Sharipov R. A.,*On two algebraic parametrizations for rational solutions of the cuboid equations*, e-print **arXiv:1208.2587** в электронном архиве http://arXiv.org.
70. Sharipov R. A., *A note on solutions of the cuboid factor equations*, e-print **arXiv:1209.0723** в электронном архиве http://arXiv.org.
71. Sharipov R. A., *A note on rational and elliptic curves associated with the cuboid factor equations*, e-print **arXiv:1209.5706** в электронном архиве http://arXiv.org.
72. Ramsden J. R., Sharipov R. A.,*Two and three descent for elliptic curves associated with perfect cuboids*, e-print **arXiv:1303.0765** в электронном архиве http://arXiv.org.
73. Кащенко И. С. *Асимптотические разложения решений уравнений*, Издание ЯрГУ, Ярославль, 2011.
74. Sharipov R. A., *A note on invertible quadratic transformations of the real plane*, e-print **arXiv:1507.01861** в электронном архиве http://arXiv.org.

Руслан Абдулович Шарипов,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `r-sharipov@mail.ru`