ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 2 (2015). С. 66-72.

УДК 517.53

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В СМЫСЛЕ Е.М. ДЫНЬКИНА

Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Вводится понятие сильной регуляризации положительных последовательностей. Доказан критерий существования регулярной в смысле Е.М. Дынькина миноранты неквазианалитичности для данной последовательности в терминах наименьшей вогнутой мажоранты логарифма ее функции следа. Доказательство опирается на свойства преобразования Лежандра.

Ключевые слова: класс Карлемана, регулярные последовательности, преобразование Лежандра.

Mathematics Subject Classification: 30D60

1. Введение

При изучении классов Карлемана $C_\gamma(M_n)$ на произвольных континуумах γ комплексной плоскости особую роль играют в определенном смысле правильные последовательности $\{M_n\}$ — многие утверждения доказаны именно для таких последовательностей. Оказывается, если γ — дуга ограниченного наклона, то, как и в случае отрезка $I=[0,1]$, в теоремах типа Банга последовательность чисел $M_n>0$ может быть произвольной [1].

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Некоторые из чисел M_n могут быть равны $+\infty$, но предполагается, что существует бесконечное число конечных M_n. Классом Карлемана на дуге $\gamma\subset\mathbb{C}$ называется множество

$$C_\gamma(M_n)=\{f\in C^\infty(\gamma):\sup_{z\in\gamma}\left|f^{(n)}(z)\right|\leqslant K_f^n M_n,\quad n=0,1,2,\dots\}.$$

Здесь для любого $a\in\gamma$ производная $f'(a)$ понимается как предел

$$f'(a)=\lim_{z\in\gamma,z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

Высшие производные $f^{(n)}(a)$ $(n=2,3,\dots)$ определяются по индукции.

Определение 1. *Класс $C_\gamma(M_n)$ называется квазианалитическим, если из того, что $f\in C_\gamma(M_n)$ и $f^{(n)}(c)=0$ при всех $n\geq 0$ в некоторой точке c дуги γ, следует, что $f(z)\equiv 0$.*

Необходимые и достаточные условия квазианалитичности класса $C_I(M_n)$ (Карлемана, Островского и Мандельбройта-Банга) приведены в теореме Данжуа-Карлемана [2, гл. IV, 1.III]. Из этой теоремы следует, что если $\varliminf_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}}<\infty$, то класс $C_I(M_n)$ является квазианалитическим. Потому в подобных утверждениях обычно считают, что $M_n^{\frac{1}{n}}\to\infty$ при $n\to\infty$.

R.A. Gaisin, Regularization of sequences in sense of E.M. Dyn'kin.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-01-01661).

Поступила 1 января 2015 г.

Критерий квазианалитичности Островского формулируется в терминах функции следа

$$T(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}, \qquad r > 0.$$

Функция следа определена и конечна на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, а функция $\ln T(e^x)$, как верхняя огибающая линейных функций, является выпуклой функцией на $\mathbb{R}$. Тем самым, функция следа $T(r)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Последовательность

$$M_n^c = \sup_{r>0} \frac{r^n}{T(r)}$$

называется выпуклой регуляризацией последовательности $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ посредством логарифмов. Она обладает свойствами [2]:

$$1)\ M_n^c \leqslant M_n\ (n \geq 0); \quad 2)\ (M_n^c)^{\frac{1}{n}} \to \infty, n \to \infty; \quad 3)\ M_n^c \leqslant \sqrt{M_{n-1}^c M_{n+1}^c}\ (n \geq 1).$$

Кроме того, функции следа $T(r)$, $T_c(r)$ последовательностей $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{M_n^c\}_{n=0}^{\infty}$ совпадают, и

$$M_n^c = \sup_{r>0} \frac{r^n}{T_c(r)}.$$

Последовательность $\{M_n\}$ будем называть регулярной в смысле Е.М. Дынькина, если для чисел $m_n = \frac{M_n}{n!}$ выполняются свойства [3]:

а) $m_n^2 \leqslant m_{n-1}m_{n+1} \qquad (n \geq 1)$;

б) $\sup\limits_{n\geq 1} \left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$;

в) $m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Согласно теореме Данжуа-Карлемана класс $C_I(M_n)$ является квазианалитическим тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных условий [2], [4]:

$$\text{г)} \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty; \qquad \text{д)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty.$$

Для регулярной последовательности $\{M_n\}$, как показал Е.М.Дынькин [3], условие д) (следовательно, и условие г)) равносильно билогарифмическому условию Левинсона

$$\int_0^d \ln\ln h(r) dr = +\infty, \tag{1}$$

где

$$h(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{m_n r^n}\ (r > 0), \tag{2}$$

а величина $d > 0$ выбрана таким образом,что $h(d) \geq e$. Ясно, что $h(r)$ — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \infty$, и

$$m_n = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n h(r)} \qquad (n \geq 0).$$

Отметим, что введение регулярных последовательностей было вызвано тем, что «аналог теории регуляризации для общих множеств, отличных от отрезка (согласно которой каждый класс Карлемана совпадал бы с регуляризованным классом), отсутствует» [3].

Пусть γ — дуга, заданная уравнением $y = g(x)$ ($|x| \leqslant a$) и удовлетворяющая условию Липшица

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = q_\gamma < \infty,$$

то есть γ — дуга ограниченного наклона [5].

В [5] показано, что если $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, то класс $C_\gamma(M_n)$ квазианалитичен тогда и только тогда, когда для ассоциированного веса h, заданного формулой (2), выполняется условие (1). Таким образом, в данном случае для регулярного класса $C_\gamma(M_n)$ теорема Данжуа-Карлемана остается в силе.

В общей ситуации класс Карлемана $C_\gamma(M_n)$ (γ — континуум в $\mathbb{C}$) может и не быть регулярным (то есть последовательность $\{M_n\}$ не является регулярной). Поскольку в теории приближений особый интерес представляют неквазианалитические классы Карлемана, то в связи с сказанным выше [3] важно выяснить, при каких условиях на M_n существует регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что: 1) $M_n^* \leqslant M_n$; 2) $\{M_n^*\}$ удовлетворяет критерию неквазианалитичности соответствующих классов Карлемана. В данной статье будет доказан критерий существования такой последовательности $\{M_n^*\}$.

2. Критерий существования регулярной миноранты неквазианалитичности

Последовательность $\{M_n\}$ ($M_n > 0$) называется слабо регулярной, если числа $m_n = \frac{M_n}{n!}$ удовлетворяют условиям а), в) определения регулярной последовательности [6]. Любую ее регулярную миноранту (если она существует) будем называть регуляризацией по Е.М. Дынькину. Очевидно, при $m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ существует слабо регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что $M_n^* \leqslant M_n$ ($n \geq 0$), причем $M_{n_i}^* = M_{n_i}$ для некоторой последовательности индексов n_i, $n_i \to \infty$ (n_i — основные индексы, получающиеся при выпуклой регуляризации последовательности $\{m_n\}$ посредством логарифмов). Если же последовательность $\{M_n^*\}$ окажется регулярной, ее назовем сильной регуляризацией последовательности $\{M_n\}$.

В [6] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $M_n > 0$, $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$. Для того чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что*

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $r = r(t)$, $tr(t) \downarrow 0$, $t^2 r(t) \uparrow$ при $t \to \infty$ такая, что

$$1)\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant r(n)\ (n \geq 1); \qquad\qquad 2) \int_1^\infty r(t)dt < \infty.$$

Оказывается, теорему 1 можно переформулировать и по-другому, а именно в терминах функции следа последовательности $\{M_n\}$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $M_n > 0$, $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$. Для того чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что*

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{\omega_T(r)}{r^2}dr < \infty.$$

Здесь $\omega_T = \omega_T(r)$ *— наименьшая вогнутая мажоранта функции* $\ln T(r)$*,где*

$$T(r) = \max_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы основано на свойствах преобразования Лежандра. Поэтому вкратце остановимся на них.

Пусть $M(x)$ — любая непрерывная возрастающая на $[0,\infty)$ функция, $M(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Тогда функция

$$m(y) = \sup_{x>0}(M(x) - xy),$$

определенная при $y > 0$, называется преобразованием Лежандра функции $M(x)$. Если $M(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то $m(y) \to \infty$ при $y \to 0$. Функция $m(y)$, как верхняя огибающая убывающих по $y > 0$ функций, также убывающая функция. Положим

$$M^*(x) = \inf_{y>0}(m(y) + yx).$$

Ясно, что M^* — наименьшая вогнутая возрастающая мажоранта функции M: $M(x) \leqslant M^*(x)$. Отметим, что если функция M вогнута, то $M(x)/x \downarrow$ при $x \geq a$. С другой стороны, если $0 < M(x) \uparrow$, $M(x)/x \downarrow$ при $x > 0$, то $M^*(x) < 2M(x)$ где M^* — наименьшая вогнутая мажоранта M [7; гл.VII, §D, с.326].

Теорема 3 (7; гл. VII, §D, с. 333)**.** *Пусть* $M(x)$ *— возрастающая вогнутая на* $[0,\infty)$ *функция,* $m(y)$ *— преобразование Лежандра функции* $M(x)$*,* $a > 0$ *такое, что* $m(a) = 1$*. Тогда интегралы*

$$\int_0^a \ln m(y)dy, \qquad \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2}dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Приступим к доказательству теоремы 2.

Н е о б х о д и м о с т ь. Из равенств

$$\frac{z^n}{M_n} = \frac{n!}{M_n}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\delta} \frac{e^{zt}}{t^{n+1}}dt \qquad (\delta > 0)$$

и условий $M_n^* \leqslant M_n$, $\left(\frac{M_n^*}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$ имеем:

$$\frac{r^n}{M_n} \leqslant \frac{n!}{M_n^*\delta^n}\ e^{\delta r} \leqslant H^*(\delta)\ e^{\delta r} \qquad (|z| = r), \tag{3}$$

где

$$H^*(\delta) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{M_n^*\delta^n}.$$

Далее, из (3) следует, что

$$T(r) \leqslant \exp\left[\inf_{\delta>0}(\ln H^*(\delta) + \delta r)\right] = \exp(\omega^*(r)).$$

Ясно, что ω^* — неотрицательная, неограниченно возрастающая и вогнутая функция на $[0,\infty)$. Очевидно, $\ln H^*(\delta)+\delta r \geq \omega^*(r)$. Следовательно,

$$\ln H^*(\delta) \geq \sup_{r>0}(\omega^*(r)-\delta r) \equiv m(\delta).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

то [3]

$$\int_0^d \ln\ln H^*(\delta)d\delta < \infty,$$

и тем более

$$\int_0^d \ln m(\delta)d\delta < \infty,$$

где $d>0$ такое, что $m(d)=1$. Но тогда по теореме 3 возрастающая функция ω^* принадлежит классу сходимости Ω, то есть

$$\tfrac{\omega^*(r)}{r} \downarrow 0 \text{ при } r\to\infty, \qquad \int_1^{\infty} \tfrac{\omega^*(r)}{r^2}dr < \infty.$$

Так как $\omega_T(r) \leqslant \omega^*(r)$, то функция ω_T также принадлежит Ω.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega_T(r)}{r^2}dr < \infty.$$

Тогда

$$I(\delta)=\delta\int_0^{\infty} T(r)e^{-\delta r}dr \leqslant \delta\int_0^{\infty} \exp(\omega_T(r)-\delta r)dr = \delta M(\delta) = H(\delta).$$

Так как, очевидно,

$$\frac{r^n}{M_n} \leqslant T(r) \qquad (n \geq 0),$$

то

$$\delta\ \frac{1}{M_n}\ \int_0^{\infty} r^n e^{-\delta r}dr \leqslant I(\delta) \leqslant H(\delta).$$

Отсюда для любого $n \geq 0$

$$\frac{n!}{M_n\delta^n} \leqslant H(\delta) \qquad (\delta>0), \tag{4}$$

в частности, $M_n' \leqslant M_n$, где

$$M_n' = \sup_{\delta>0} \frac{n!}{H(\delta)\delta^n} \qquad (n \geq 0).$$

Поскольку оценки (4) верны для любого $n \geq 0$, то при $\delta \to 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\ln\frac{1}{\delta}}{\ln H(\delta)} = 0.$$

Следовательно, $\frac{\ln H(e^{-x})}{x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$, и тогда $M_n' = n!\ e^{c_n}$, где

$$c_n = \sup_{x>0}(nx - \ln H(e^{-x})).$$

Воспользуемся теперь свойствами преобразования Юнга-Фенхеля-Лежандра [8, ч.II, гл.1, §5, предложение 1]: *если функция φ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, и $\frac{\varphi(y)}{y} \to +\infty$ при $y \to +\infty$, то сопряженная по Юнгу к φ функция*

$$\psi(x) = \sup_{y>0}(xy - \varphi(y))$$

является выпуклой на $\mathbb{R}_+$ функцией, также удовлетворяющей условию:

$$\frac{\psi(x)}{x} \to +\infty \quad \textit{при} \quad x \to +\infty.$$

Таким образом, видим, что последовательность $\{c_n\}$ — выпуклая, $\frac{c_n}{n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\frac{c_n}{n} \uparrow$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\left(\frac{M_n'}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$$

при $n \to \infty$, и последовательность $\{M_n'\}$, $M_n' \leqslant M_n$, является слабо регулярной.

Так как $H(\delta) = \delta M(\delta)$, то

$$M_n' \geq \frac{n!}{M(\delta)\delta^{n+1}} \qquad (n \geq 0).$$

Отсюда

$$h(\delta) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{M_n'\delta^{n+1}} \leqslant M(\delta). \tag{5}$$

Вспоминая теперь определение функции M, имеем

$$M(\delta) \leqslant \exp\left(\sup_{r>0}(\omega_T(r) - \frac{\delta}{2}r)\right) \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\delta}{2}r} dr = \frac{2}{\delta} e^{m(\frac{\delta}{2})},$$

где $m(\delta)$ — преобразование Лежандра функции $\omega_T(r)$.

Пусть $c > 0$ такое, что $h(c) = e$. Так как $h(\delta) \leqslant M(\delta)$, то $M(\delta) \geq e$ при $0 < \delta \leqslant c$. Имеем: $\ln M(\delta) \leqslant \ln\frac{2}{\delta} + m(\frac{\delta}{2}) \quad (0 < \delta \leqslant c)$. Отсюда, пользуясь оценкой

$$\ln^+(a+b) \leqslant \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2,$$

где $\ln^+ x = \max(0, \ln x)$, получаем, что при $0 < \delta \leqslant q \leqslant c$

$$0 \leqslant \ln\ln M(\delta) < \ln m(\frac{\delta}{2}) + \ln\ln\frac{2}{\delta} + \ln 2.$$

Но по теореме 3 интеграл $\int\limits_0^q \ln m(\delta)d\delta$ сходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^\infty \frac{\omega_T(r)}{r^2}dr$. А поскольку $\int\limits_0^q \ln\ln\frac{2}{\delta}d\delta < \infty$, то

$$\int\limits_0^q \ln\ln h(\delta)d\delta \leqslant \int\limits_0^q \ln\ln M(\delta)d\delta < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{M_n'}{M_{n+1}'} < \infty. \tag{6}$$

Действительно, поскольку последовательность $\left\{\frac{M_n'}{n!}\right\}$ логарифмически выпукла, то из (5) заключаем, что

$$\sup_{\delta>0}\frac{n!}{h(\delta)\delta^{n+1}} = M_n' < \infty \qquad (n \geq 0).$$

Сходимость ряда (6) вытекает теперь из теоремы 7 работы [5]. Но тогда существует функция $R = R(t)$, $0 < R(t) \downarrow 0$, $tR(t) \downarrow 0$, $t^2R(t) \uparrow$ при $t \to \infty$, такая, что [6]

$$1)\frac{1}{(M_n')^{\frac{1}{n}}} < R(n); \qquad 2)\int\limits_1^\infty R(t)dt < \infty.$$

Следовательно, согласно теореме 1, существует регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, $M_n^* \leqslant M_n'$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty.$$

Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайсин Р.А. *Оценка промежуточных производных и теоремы типа Банга. I* // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 23–48.
2. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* М.: ИЛ, 1955. 268 с.
3. Дынькин Е.М. *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала* // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ (Труды VII Зимней школы. Дрогобыч) М.: АН СССР. Центральный экономико-математический институт, 1976. С. 40–73.
4. Мандельбройт С. *Квазианалитические классы функций.* М.–Л.: 1937. 108 с.
5. Гайсин А.М., Кинзябулатов И.Г. *Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения* // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 7. С. 41–62.
6. Гайсин Р.А. *Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для областей общего вида* // Уфимский матем. журнал. 2013. Т. 5. № 3. С. 28–40.
7. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge University Press, 1988 (1998).
8. Брайчев Г.Г. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.* М.: Прометей, 2005. 232 с.

Рашит Ахтярович Гайсин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru