ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 2 (2015). С. 35-56.

ОЦЕНКА НАЧАЛЬНЫХ МАСШТАБОВ ДЛЯ ВОЛНОВОДОВ С НЕКОТОРЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Д.И. БОРИСОВ, Р.Х. КАРИМОВ, Т.Ф. ШАРАПОВ

Аннотация. В работе рассмотрены три примера сингулярных случайных возмущений в многомерных моделях волноводов. Эти возмущения описываются большим потенциалом, сосредоточенным на множестве малой меры, финитным быстро осциллирующим потенциалом и дельта-потенциалом. Во всех случаях доказана оценка начальных масштабов.

Ключевые слова: случайный оператор, оценки начальных масштабов, возмущение, малый параметр, спектральная локализация.

Mathematics Subject Classification: 35P15, 35C20, 35B25, 60H25, 82B44

1. Введение

Одним из подходов к описанию волновых процессов в неупорядоченных средах являются случайные гамильтонианы – эллиптические операторы в неограниченных областях, зависящие от счётного числа независимых одинаково распределённых случайных величин. Исследования таких операторов ведутся достаточно интенсивно. Одним из изучаемых вопросов является спектральная локализация. Последняя означает, что весь спектр рассматриваемого оператора, либо часть спектра чисто точечные с вероятностью один. Есть много работ, где подобное свойство спектра изучалось для многочисленных частных примеров, см., например, [11]–[39], а также литературу в этих работах. Одним из известных способов доказательства спектральной локализации является многомасштабный анализ (multiscale analysis), [11], [12]. Его основу составляет определённая индукция, базой которой является оценка начальных масштабов (initial length scale estimate).

В статье [3] был предложен общий подход к доказательству оценок начальных масштабов для операторов с малыми случайными возмущениями. Возмущения описывались абстрактными симметричными операторами, малыми относительно исходного невозмущённого оператора. При минимальных условиях на возмущения были доказаны оценки начальных масштабов на нижнем краю спектра. Такой общий подход позволил рассмотреть разнообразные примеры, как известные, так и новые.

Настоящая статья является продолжением работы [3]. Мы рассматриваем три примера случайных возмущений. Каждое из них не является регулярным, то есть малым относительно исходного невозмущённого оператора. Более того, эти возмущения в определённом смысле являются сингулярными. Вместе с тем показано, что все результаты [3] об оценке начальных масштабов удаётся перенести на рассматриваемые возмущения. Это и является основным результатом настоящей статьи.

D.I. Borisov, R.Kh. Karimov, T.F. Sharapov, Initial length scale estimate for waveguides with some random singular potentials.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00078).

Поступила 19 февраля 2015 г.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x=(x',x_{n+1})$, $x'=(x_1,\ldots,x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{R}^n$, соответственно, $n\geqslant 1$. Через Π обозначим бесконечный многомерный слой ширины $d>0$:

$$\Pi:=\{x:\,0<x_{n+1}<d\}.$$

В слое Π рассматривается оператор

$$\mathcal{H}^0:=-\Delta+V_0, \tag{2.1}$$

где $V_0=V_0(x_{n+1})$ – измеримый ограниченный потенциал. В качестве краевого условия на $\partial\Pi$ выбирается условие Дирихле или Неймана:

$$\mathcal{B}u=0 \tag{2.2}$$

на $\partial\Pi$, где $\mathcal{B}u=u$ или $\mathcal{B}u=\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}$. Не исключается ситуация, когда на верхней и нижней границе $\partial\Pi$ задаются краевые условия разного типа.

Оператор $\mathcal{H}^0$ рассматривается как неограниченный в пространстве $L_2(\Pi)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^0):=\{u\in H^2(\Pi):\ \text{выполнено условие (2.2) на } \partial\Pi\}$.

Опишем теперь случайные возмущения. Пусть Γ – периодическая решётка в $\mathbb{R}^n$ с ячейкой периодичности $\square'$ и $\square:=\{x:\ x'\in\square',\,0<x_{n+1}<d\}$. Через $W^{\mathrm{l}}=W^{\mathrm{l}}(x')$ обозначим непрерывную финитную функцию в $\mathbb{R}^n$, а через $W^{\mathrm{s}}=W^{\mathrm{s}}(x,\xi)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1})$ – функцию в $\mathbb{R}^{2n+2}$, 1-периодичную по каждой из переменной ξ_i, $i=1,\ldots,n$, имеющую нулевое среднее:

$$\int\limits_{(0,1)^{n+1}} W^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi=0\quad \text{для всех}\quad x\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.3}$$

и финитную по x:

$$\operatorname{supp}W^{\mathrm{s}}(\cdot,\xi)\subseteq M\subset\square\quad\text{для всех}\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+1}, \tag{2.4}$$

где M – некоторое фиксированное множество. Будем предполагать следующую гладкость для функции W^{s}:

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}W^{\mathrm{s}}}{\partial x^\alpha\partial\xi^\beta}\in C(\mathbb{R}^{2n+2}),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\quad |\alpha|\leqslant 3,\quad |\beta|\leqslant 1. \tag{2.5}$$

Через $W=W(x)$ обозначим непрерывную финитную функцию с носителем в $\square$:

$$\operatorname{supp}W\Subset\square.$$

Пусть $S\Subset\square$ – замкнутое многообразие класса C^3 коразмерности 1, ν – нормаль к S, внешняя по отношению к области, ограниченной многообразием S, $W^{\mathrm{dlt}}\in C^3(S)$ – некоторая вещественная неотрицательная функция на S.

Через ε обозначим малый положительный параметр. Положим:

$$\begin{aligned}
&W^{\mathrm{loc}}(x',\varepsilon):=\varepsilon^{-a}W^{\mathrm{l}}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right), && \varepsilon>0,\\
&W^{\mathrm{osc}}(x,\varepsilon):=\varepsilon^{-a}W^{\mathrm{s}}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{2-2a}W(x), && \varepsilon>0,\\
&W^{\mathrm{loc}}(x',0):=0,\qquad W^{\mathrm{osc}}(x',0):=0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $0\leqslant a<1$ – некоторое заданное число.

Пусть $\omega=(\omega_k)_{k\in\Gamma}$ – последовательность независимых одинаково распределённых нетривиальных случайных величин со значениями в отрезке $[0,1]$; соответствующую вероятностную меру обозначим через μ. Будем считать, что эта мера также задана на отрезке $[0,1]$. Через $\mathbb{P}:=\bigotimes_{k\in\Gamma}\mu$ обозначим произведение мер на пространстве $\Omega:=\times_{k\in\Gamma}[0,1]$. Элементами последнего пространства являются последовательности $(\omega_k)_{k\in\Gamma}$. Через $\mathbb{E}(\cdot)$ обозначим математическое ожидание случайной величины по вероятности $\mathbb{P}$.

Первые два типа случайных возмущения описываются операторами:

$$\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega) := \mathcal{H}^0 + \sum_{k\in\Gamma} W^{\mathrm{loc}}(\cdot - k, \varepsilon\omega_k), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega) := \mathcal{H}^0 + \sum_{k\in\Gamma} W^{\mathrm{osc}}(\cdot - k, x_{n+1}, \varepsilon\omega_k). \tag{2.8}$$

Третий тип возмущения соответствует оператору с малым дельта-взаимодействием:

$$\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega) := \mathcal{H}^0 + \sum_{k\in\Gamma} \varepsilon\omega_k W^{\mathrm{dlt}}(\cdot - k)\delta(\cdot - S_k), \tag{2.9}$$

где S_k – сдвиг многообразия S на k, а именно, $S_k := \{x : (x' - k, x_{n+1}) \in S\}$. Во всех трёх случаях краевое условие на $\partial\Pi$ описывается равенством (2.2). Запись (2.9) является формальной для обозначения оператора в $L_2(\Pi)$, соответствующего квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{dlt}}(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Pi)} + \sum_{k\in\Gamma} \varepsilon\omega_k \big(W^{\mathrm{dlt}}(\cdot - k)u, v\big)_{L_2(S_k)} \quad \text{в} \quad L_2(\Pi). \tag{2.10}$$

Область определения этой формы – множество функций из $H^1(\Pi)$, имеющих нулевой след на той части границы $\partial\Pi$, где задано условие Дирихле. Ещё одно эквивалентное описание оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)$ – это оператор $-\Delta + V_0$ в Π, с краевым условием (2.2) на $\partial\Pi$ и краевым условием

$$[u]_{S_k} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_{S_k} = bu\big|_{S_k}, \quad k \in \Gamma, \tag{2.11}$$

где $[v]_{S_k} = v\big|_{S_k+0} - v\big|_{S_k-0}$ – скачок функции v на S_k, равный разности значений на внешней и внутренней сторонах S_k.

Основная цель настоящей работы – получение оценок начальных масштабов для операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)$.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся дополнительные вспомогательные обозначения. Для $\alpha \in \Gamma$, $N \in \mathbb{N}$ символом $\Pi_{\alpha,N}$ обозначим кусок слоя Π:

$$\Pi_{\alpha,N} := \left\{x : \ x' = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \ a_i \in (0, N), \ 0 < x_{n+1} < d\right\}.$$

Здесь e_i, $i = 1, \ldots, n$ – базис решётки Γ, то есть

$$\Gamma := \left\{x : \ x' = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \ a_i \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Обозначим ещё

$$\Gamma_{\alpha,N} := \left\{x' \in \Gamma : \ x' = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \ a_i = 0, 1, \ldots, N-1\right\}.$$

Отметим, что

$$\overline{\Pi_{\alpha,N}} := \bigcup_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \overline{\square_k}.$$

Через $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega)$ обозначим операторы, которые вводятся так же, как и $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)$, но на множестве $\Pi_{\alpha,N}$ и с дополнительным краевым условием Неймана на боковой поверхности. А именно, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ – это операторы

$$-\Delta + V_0 + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} W^{\mathrm{loc}}(\cdot - k, \varepsilon\omega_k) \quad \text{и} \quad -\Delta + V_0 + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} W^{\mathrm{osc}}(\cdot - k, x_{n+1}, \varepsilon\omega_k)$$

в Π с краевым условием (2.2) на верхней и нижней границах и краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Pi_{\alpha,N} \setminus \partial\Pi, \tag{2.12}$$

где ν – внешняя нормаль к границе. Оператор $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega)$ вводится (формальным) равенством

$$\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega) := -\Delta + V_0 + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \varepsilon\omega_k W^{\mathrm{dlt}}(\cdot - k)\delta(\cdot - S_k)$$

в $\Pi_{\alpha,N}$ с краевым условием (2.2) на верхней и нижней границах и краевым условием (2.12). Строго его вновь можно определить с помощью квадратичной формы, аналогичной (2.10) либо с помощью краевых условий (2.11) при $k \in \Gamma_{\alpha,N}$.

Пусть $\lambda^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)$, $\sharp = \mathrm{loc}, \mathrm{osc}, \mathrm{dlt}$ – минимальное собственное значение операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega)$, а Λ_0 – минимальное собственное значение оператора

$$-\frac{d^2}{dx_{n+1}^2} + V_0 \quad \text{на} \quad (0,d)$$

с краевым условием (2.2) на концах отрезка. Собственную функцию, соответствующую Λ_0, обозначим через $\psi_0 = \psi_0(x_{n+1})$ и будем считать её нормированной в $L_2(0,d)$.

Наш первый результат даёт важную нижнюю детерминистическую оценку разности $\lambda^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_0$.

Теорема 2.1. *Пусть $n = 1$, начало координат лежит в $\square'$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} W^1(\zeta)\,d\zeta > 0. \tag{2.13}$$

Тогда существуют положительные константы c_1, c_2, N_1, такие что для

$$N \geqslant N_1 \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon < \frac{c_1}{N^{\frac{8}{1-a}}} \tag{2.14}$$

выполнена оценка

$$\lambda^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_0 \geqslant \frac{c_2\varepsilon^{1-a}}{N} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \omega_k^{1-a}. \tag{2.15}$$

Через $W^{\mathrm{s}}_* = W^{\mathrm{s}}_*(x,\xi)$ обозначим решение уравнения

$$\Delta_\xi W^{\mathrm{s}}_*(x,\xi) = W^{\mathrm{s}}(x,\xi), \quad \xi \in (0,1)^{n+1}, \tag{2.16}$$

с периодическими краевыми условиями, удовлетворяющее условию ортогональности:

$$\int\limits_{(0,1)^{n+1}} W^{\mathrm{s}}_*(x,\xi)\,d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.17}$$

В силу равенства (2.3) такая задача для W^{s}_* однозначно разрешима. Кроме того, из (2.5) вытекает, что функция W^{s}_* имеет по меньшей мере ту же гладкость, что и W^{s}.

Теорема 2.2. *Пусть $n \geqslant 1$,*

$$\int\limits_{\square} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx - \int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W^{\mathrm{s}}_*(x,\xi)|^2\,d\xi > 0. \tag{2.18}$$

Тогда существуют положительные константы c_1, c_2, N_1, такие что для

$$N \geqslant N_1 \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon < \frac{c_1}{N^{\frac{4}{1-a}}} \tag{2.19}$$

выполнена оценка

$$\lambda_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega) - \Lambda_0 \geqslant \frac{c_2\varepsilon^{2-2a}}{N^n} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \omega_k^{2-2a}. \tag{2.20}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $n \geqslant 1$,

$$\int\limits_S W^{\mathrm{dlt}}(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dS > 0. \tag{2.21}$$

Тогда существуют положительные константы c_1, c_2, N_1, *такие что для*

$$N \geqslant N_1 \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon < \frac{c_1}{N^8} \tag{2.22}$$

выполнена оценка

$$\lambda_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega) - \Lambda_0 \geqslant \frac{c_2\varepsilon}{N^n} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \omega_k. \tag{2.23}$$

Наш следующий детерминистический результат описывает оценки Комба-Томаса (Combes-Thomas) для рассматриваемых операторов. Обозначим: $\chi_B = \chi_B(x)$ – характеристическая функция множества $B \subseteq \Pi$, $\|\cdot\|_{X\to Y}$ – норма оператора, действующего из банахового пространства X в банаховое пространство Y, $\sigma(\cdot)$ – спектр оператора.

Теорема 2.4. *Пусть* $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, *такие что* $B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \subset \Pi_{\alpha,N}$, *и выполнено предположение теоремы 2.1. Тогда существует* $N_2 \in \mathbb{N}$, *такое что для* $N \geqslant N_2$ *верна оценка*

$$\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\mathrm{e}^{-C_2\delta\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)},$$

где $\delta := \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega))) > 0$, C_1, C_2 *– положительные константы, не зависящие от* ε, α, N, δ, β_1, β_2, m_1, m_2, λ.

Теорема 2.5. *Пусть* $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, *такие что* $B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \subset \Pi_{\alpha,N}$, *и выполнено предположение теоремы 2.2. Тогда существует* $N_2 \in \mathbb{N}$, *такое что для* $N \geqslant N_2$ *верна оценка*

$$\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\mathrm{e}^{-C_2\delta\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)},$$

где $\delta := \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega))) > 0$, C_1, C_2 *– положительные константы, не зависящие от* ε, α, N, δ, β_1, β_2, m_1, m_2, λ.

Теорема 2.6. *Пусть* $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, *такие что* $B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \subset \Pi_{\alpha,N}$, *и выполнено предположение теоремы 2.3. Тогда существует* $N_2 \in \mathbb{N}$, *такое что для* $N \geqslant N_2$ *верна оценка*

$$\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\mathrm{e}^{-C_2\delta\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)},$$

где $\delta := \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega))) > 0$, C_1, C_2 *– положительные константы, не зависящие от* ε, α, N, δ, β_1, β_2, m_1, m_2, λ.

Наш первый вероятностный результат описывается в следующих трёх теоремах.

Теорема 2.7. *Пусть* $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 17$ *и выполнены условия теоремы 2.1. Тогда интервал*

$$I_N := \left[\frac{c_3}{\left(\mathbb{E}(\omega_k^{\frac{1-a}{2}})\right)^{\frac{2}{1-a}} N^{\frac{8}{1-a}}}, \frac{c_1}{N^{\frac{8}{\gamma(1-a)}}}\right], \quad c_3 := \frac{2^{\frac{2}{1-a}}}{c_2^{\frac{1}{1-a}}},$$

непуст для $N \geqslant N_1$, где N_1, c_1, c_2 – из теоремы 2.1. Для $N \geqslant N_1$ и $\varepsilon \in I_N$ справедлива оценка

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega:\ \lambda^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_0 \leqslant N^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant N^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \mathrm{e}^{-c_4 N^{\frac{1}{\gamma}}},$$

где константа $c_4 > 0$ зависит только от вероятностной меры μ.

Теорема 2.8. *Пусть $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 17$ и выполнены условия теоремы 2.2. Тогда интервал*

$$I_N := \left[\frac{c_3}{\left(\mathbb{E}(\omega_k^{1-a})\right)^{\frac{1}{1-a}} N^{\frac{1}{4(1-a)}}}, \frac{c_1}{N^{\frac{4}{\gamma(1-a)}}}\right], \quad c_3 := \frac{2^{\frac{1}{1-a}}}{c_2^{\frac{1}{2(1-a)}}},$$

непуст для $N \geqslant N_1$, где N_1, c_1, c_2 – из теоремы 2.2. Для $N \geqslant N_1$ и $\varepsilon \in I_N$ справедлива оценка

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega:\ \lambda^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_0 \leqslant N^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant N^{n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \mathrm{e}^{-c_4 N^{\frac{n}{\gamma}}},$$

где константа $c_4 > 0$ зависит только от вероятностной меры μ.

Теорема 2.9. *Пусть $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 17$ и выполнены условия теоремы 2.3. Тогда интервал*

$$I_N := \left[\frac{c_3}{\left(\mathbb{E}(\omega_k^{\frac{1}{2}})\right)^{2} N^{\frac{1}{2}}}, \frac{c_1}{N^{\frac{8}{\gamma}}}\right], \quad c_3 := \frac{4}{c_2},$$

непуст для $N \geqslant N_1$, где N_1, c_1, c_2 – из теоремы 2.3. Для $N \geqslant N_1$ и $\varepsilon \in I_N$ справедлива оценка

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega:\ \lambda^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_0 \leqslant N^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant N^{n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \mathrm{e}^{-c_4 N^{\frac{n}{\gamma}}},$$

где константа $c_4 > 0$ зависит только от вероятностной меры μ.

Следующие три теоремы – это оценки начальных масштабов для операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$, $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega)$.

Теорема 2.10. *Пусть $\alpha \in \Gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 17$, $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in I_N$, где I_N – из теоремы 2.7, и выполнено предположение теоремы 2.1. Выберем $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_{\alpha,N}$, $m_1, m_2 > 0$ так, что $B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \subset \Pi_{\alpha,N}$. Тогда существует константа $c_5 > 0$, не зависящая от ε, α, N, β_1, β_2, m_1, m_2, такая что справедливо неравенство,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigg(\omega \in \Omega:\ &\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant 2\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\frac{c_5\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)}{\sqrt{N}}}\\ &\forall\, \lambda \leqslant \Lambda_0 + \frac{1}{2\sqrt{N}}\Bigg) \geqslant 1 - N^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\mathrm{e}^{-c_4 N^{\frac{1}{\gamma}}}\end{aligned}$$

для $N \geqslant \max\{N_1^{\gamma}, N_2\}$, где N_1 – из теоремы 2.1, N_2 – из теоремы 2.4, c_4 – из теоремы 2.7.

Теорема 2.11. *Пусть $\alpha \in \Gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 17$, $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in I_N$, где I_N – из теоремы 2.8, и выполнено предположение теоремы 2.2. Выберем $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_{\alpha,N}$, $m_1, m_2 > 0$ так, что $B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \subset \Pi_{\alpha,N}$. Тогда существует константа $c_5 > 0$, не зависящая от ε, α, N, β_1, β_2, m_1, m_2, такая что справедливо неравенство,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigg(\omega \in \Omega:\ &\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant 2\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\frac{c_5\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)}{\sqrt{N}}}\\ &\forall\, \lambda \leqslant \Lambda_0 + \frac{1}{2\sqrt{N}}\Bigg) \geqslant 1 - N^{n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\mathrm{e}^{-c_4 N^{\frac{n}{\gamma}}}\end{aligned}$$

для $N \geqslant \max\{N_1^{\gamma}, N_2\}$, где N_1 – из теоремы 2.2, N_2 – из теоремы 2.5, c_4 – из теоремы 2.8.

Теорема 2.12. *Пусть $\alpha\in\Gamma$, $\gamma\in\mathbb{N}$, $\gamma\geqslant 17$, $N\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in I_N$, где I_N – из теоремы 2.9, и выполнено предположение теоремы 2.3. Выберем $\beta_1,\beta_2\in\Gamma_{\alpha,N}$, $m_1,m_2>0$ так, что $B_1:=\Pi_{\beta_1,m_1}\subset\Pi_{\alpha,N}$, $B_2:=\Pi_{\beta_2,m_2}\subset\Pi_{\alpha,N}$. Тогда существует константа $c_5>0$, не зависящая от ε, α, N, β_1, β_2, m_1, m_2, такая что справедливо неравенство,*

$$\mathbb{P}\Bigg(\omega\in\Omega:\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}_{\alpha,N}(\omega)-\lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})}\leqslant 2\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\frac{c_5\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)}{\sqrt{N}}}$$
$$\forall\,\lambda\leqslant\Lambda_0+\frac{1}{2\sqrt{N}}\Bigg)\geqslant 1-N^{n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\mathrm{e}^{-c_4N^{\frac{n}{\gamma}}}$$

для $N\geqslant\max\{N_1^\gamma,N_2\}$, где N_1 – из теоремы 2.3, N_2 – из теоремы 2.6, c_4 – из теоремы 2.9.

Теоремы 2.1–2.12 являются адаптацией основных результатов [3] к операторам $\mathcal{H}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}$, $\sharp=\mathrm{loc},\mathrm{osc},\mathrm{dlt}$. Они показывают, как общий подход работы [3] можно перенести для случайных возмущений, не являющихся малыми относительно исходного оператора, то есть для нерегулярных возмущений. В первых двух примерах из-за наличия обратной степени ε в определении потенциалов W^{loc} и W^{osc}, возмущения являются сингулярными. В частности, потенциал W^{osc} является одним из классических примеров возмущения в теории усреднения [6]. Наличие дельта-взаимодействия меняет область определения оператора по сравнению с исходным и является сингулярным с этой точки зрения. Вместе с тем, как показано в настоящей работе, эти возмущения можно свести к регулярным и применить затем подход работы [3]. Основная идея здесь состоит в использовании оператора $\mathcal{V}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)$, $\sharp=\mathrm{loc},\mathrm{osc},\mathrm{dlt}$, см. равенства (4.7), (5.4), (6.1). Сохраняя спектр, этот оператор переводит исходное возмущение к регулярному, к которому затем удаётся применить подход работы [3].

Отметим, что в детерминистическом случае операторы с большими потенциалами, локализованными на множестве малой меры, уже изучались, см., например, [9], [10], что и послужило мотивацией для рассмотрения случайных возмущений на основе таких потенциалов.

В [3, Ex. 7] было показано, что вместо слоя Π, случайные операторы вида (3.4) с $V_0=0$ можно рассматривать в многомерном пространстве, основные результаты при этом остаются в силе. То же верно и для наших операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_\sharp(\omega)$, $\sharp=\mathrm{loc},\mathrm{osc},\mathrm{dlt}$ – для их аналогов в многомерных пространствах остаются верны теоремы 2.1–2.12.

3. Предварительные сведения

Доказательства теорем 2.1–2.12 основаны на общем подходе, разработанном в работе [3]. Поэтому опишем основные результаты и методику этой работы.

Начнём с постановки задачи. Пусть $\mathcal{L}(t)$, $t\in[0,t_0]$ – семейство линейных операторов из $H^2(\square)$ в $L_2(\square)$, описываемое формулой

$$\mathcal{L}(t):=t\mathcal{L}_1+t^2\mathcal{L}_2+t^3\mathcal{L}_3(t),\tag{3.1}$$

где $\mathcal{L}_i: H^2(\square)\to L_2(\square)$, $i=1,2,3$ – ограниченные симметричные операторы, причём оператор $\mathcal{L}_3(t)$ предполагается ограниченным равномерно по t. В [3] операторы $\mathcal{L}(t)$, $\mathcal{L}_3(t)$ считались заданными при $t\in[-t_0,t_0]$. В нашем случае нам достаточно считать их заданными лишь при $t\in[0,t_0]$. Для того чтобы формально удовлетворить предположениям работы [3], при $-t_0\leqslant t<0$ положим $\mathcal{L}(t):=\mathcal{L}(-t)$, $\mathcal{L}_3(t):=\mathcal{L}_3(-t)$, так что в итоге операторы $\mathcal{L}(t)$, $\mathcal{L}_3(t)$ оказываются заданными при $t\in[-t_0,t_0]$.

Операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ можно продолжить до операторов, действующих из $H^2(\Pi)$ в $L_2(\Pi)$, следующим образом. Для функции $u\in H^2(\Pi)$ её сужение на $\square$ попадает в $H^2(\square)$. Поэтому действие операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ корректно определено на этом сужении, и результат является элементом $L_2(\square)$. Продолжим затем этот элемент нулём в $\Pi\setminus\square$. Полученная функция и есть действие требуемого продолжения операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ на исходную функцию u. Всюду далее эти операторы считаем продолженными указанным образом. Отметим также, что операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, рассматриваемые как операторы в $L_2(\Pi)$, являются, вообще говоря, неограниченными.

Пусть $\mathcal{H}_\square$ – оператор $-\Delta+V_0$ в $\square$ с краевым условием (2.2) на $\partial\Pi\cap\partial\square$ и краевым условием Неймана на $\partial\square\setminus\partial\Pi$.

Относительно операторов $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ в [3] было сделано два основных предположения:

A1. Выполнено равенство:
$$(\mathcal{L}_1\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}=0.$$

A2. Пусть U – решение краевой задачи:
$$(\mathcal{H}_\square-\Lambda_0)U=\mathcal{L}_1\psi_0, \tag{3.2}$$
ортогональное ψ_0 в $L_2(\square)$. Предположим, что
$$(\mathcal{L}_2\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}-(U,\mathcal{L}_1\psi_0)_{L_2(\square)}>0. \tag{3.3}$$

Через $\mathcal{S}(k)$ обозначим оператор сдвига, действующий по правилу:
$$(\mathcal{S}(k)u)(x)=u(x'-k,x_{n+1}).$$

Введём оператор:
$$\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega):=-\Delta+V_0+\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\mathcal{S}(k)\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)\mathcal{S}(-k) \tag{3.4}$$
в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ с краевым условием (2.2) на верхней и нижней границах и краевым условием (2.12). Через $\lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ обозначим минимальное собственное значение оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$.

При условиях (A1), (A2) в [3] были доказаны следующие четыре теоремы.

Теорема 3.1. *Существуют положительные константы c_1, c_2, N_1, такие что для*
$$N\geqslant N_1\quad \textit{и}\quad 0<\varepsilon<\frac{c_1}{N^4}$$
выполнена оценка
$$\lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\Lambda_0\geqslant\frac{c_2\varepsilon^2}{N^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\omega_k^2.$$

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha,\beta_1,\beta_2\in\Gamma$, $m_1,m_2\in\mathbb{N}$, такие что $B_1:=\Pi_{\beta_1,m_1}\subset\Pi_{\alpha,N}$, $B_2:=\Pi_{\beta_2,m_2}\subset\Pi_{\alpha,N}$. Тогда существует $N_2\in\mathbb{N}$, такое что для $N\geqslant N_2$ верна оценка*
$$\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})}\leqslant\frac{C_1}{\delta}\mathrm{e}^{-C_2\delta\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)},$$
где $\delta:=\mathrm{dist}(\lambda,\sigma(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)))>0$, C_1, C_2 – положительные константы, не зависящие от ε, α, N, δ, β_1, β_2, m_1, m_2, λ.

Теорема 3.3. *Пусть $\gamma\in\mathbb{N}$, $\gamma\geqslant17$. Тогда интервал*
$$I_N:=\left[\frac{c_3}{\mathbb{E}(|\omega_k|)N^{\frac14}},\frac{c_1}{N^{\frac4\gamma}}\right],\quad c_3:=\frac{2}{\sqrt{c_2}},$$
непуст для $N\geqslant N_1$, где N_1, c_1, c_2 – из теоремы 3.1. Для $N\geqslant N_1$ и $\varepsilon\in I_N$ справедлива оценка
$$\mathbb{P}\left(\omega\in\Omega:\ \lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\Lambda_0\leqslant N^{-\frac12}\right)\leqslant N^{n\left(1-\frac1\gamma\right)}\mathrm{e}^{-c_4N^{\frac{n}{\gamma}}},$$
где константа $c_4>0$ зависит только от вероятностной меры μ.

Теорема 3.4. *Пусть $\alpha \in \Gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 17$, $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in I_N$. Выберем $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_{\alpha,N}$, $m_1, m_2 > 0$ так, что $B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \subset \Pi_{\alpha,N}$. Тогда существует константа $c_5 > 0$, не зависящая от ε, α, N, β_1, β_2, m_1, m_2, такая что справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}\Bigg(\omega \in \Omega : \|\chi_{B_1}(\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})\to L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant 2\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\frac{c_5\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)}{\sqrt{N}}}$$
$$\forall\,\lambda \leqslant \Lambda_0 + \frac{1}{2\sqrt{N}}\Bigg) \geqslant 1 - N^{n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\mathrm{e}^{-c_4 N^{\frac{n}{\gamma}}}$$

для $N \geqslant \max\{N_1^{\gamma}, N_2\}$, где N_1, N_2 – из теорем 3.1, 3.2, c_4 – из теоремы 3.3.

В [3, Зам. 2.9] также было отмечено, что операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ можно считать зависящими от t. Мы считаем, что $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(t)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(t)$, $t \in [0, t_0]$. А при $t \in [-t_0, 0)$ доопределяем их следующим образом: $\mathcal{L}_1(t) = \mathcal{L}_1(-t)$, $\mathcal{L}_2(t) = \mathcal{L}_2(-t)$. Эти операторы следует предполагать равномерно ограниченными при $t \in [0, t_0]$ как операторы из $H^2(\square)$ в $L_2(\square)$. Предположение (A1) должно быть выполнено для всех $t \in [0, t_0]$, а оценку (3.3) в предположении (A2) необходимо заменить на следующую:

$$(\mathcal{L}_2(t)\psi_0, \psi_0)_{L_2(\square)} - (U, \mathcal{L}_1(t)\psi_0)_{L_2(\square)} \geqslant c_0 > 0, \quad t \in [0, t_0] \tag{3.5}$$

где c_0 – некоторая константа, не зависящая от t.

Отметим следующие особенности доказательств теорем 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.

Теорема 3.1 по существу использует факт малости оператора $\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)$ при малых ε. При этом симметричность этого оператора фактически в доказательстве не использовалась; требовалась лишь вещественность собственного значения $\lambda^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$. Исключением было лишь доказательство вспомогательной оценки

$$\Lambda_0 \leqslant \lambda^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega) \leqslant \Lambda_0 + CN^{-2} \tag{3.6}$$

для заданной константы C. При наличии этой оценки и упомянутой вещественности собственного значения $\lambda^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$ утверждение теоремы 3.1 остаётся верным и для несимметричных операторов $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, зависящих, возможно, от t.

Теорема 3.2 не требует малости оператора $\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)$, зато использует его симметричность. Также необходимо наличие самосопряжённости оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$. Аналогичная ситуация и с теоремами 3.3, 3.4 – нужна лишь симметричность оператора $\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)$ и самосопряжённость $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$, а также справедливость теоремы 3.1. Операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ при этом вновь могут зависеть от t.

Опишем теперь схему доказательств теорем 2.1–2.12. Как видно из определения операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)$, $\sharp = \mathrm{loc}, \mathrm{osc}, \mathrm{dlt}$, случайные возмущения в этих операторах нельзя представить в виде (3.1), что не даёт возможности прямого применения результатов работы [3]. Поэтому для каждого из операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)$ мы строим специальный ограниченный и ограниченно обратимый оператор $\mathcal{V}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)$ в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$, такой что оператор $\big(\mathcal{V}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)\big)^{-1}\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)\mathcal{V}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)$ уже представляется в виде (3.4). При этом приходится вводить новый малый параметр и новые случайные переменные. Операторы $\mathcal{L}_i$, вообще говоря, оказываются несимметричными. Но как было сказано выше, это не является серьёзным препятствием для доказательства теоремы 3.1: необходимо лишь убедиться в вещественности собственного значения $\lambda^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)$ и проверить оценку (3.6). Ясно, что спектры операторов $\big(\mathcal{V}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)\big)^{-1}\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)\mathcal{V}^{\varepsilon,\sharp}_{\alpha,N}(\omega)$ и $\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)$ совпадают – в силу самосопряжённости последнего оператора, это гарантирует вещественность собственного значения $\lambda^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)$. Оценку (3.6) далее удаётся доказать независимым образом, что в итоге и приводит к утверждению теоремы 3.1 для наших конкретных операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\alpha,N}_{\sharp}(\omega)$. Формулировка же последней теоремы для этих операторов как раз и есть теоремы 2.1, 2.2, 2.3.

Далее мы возвращаемся к исходным операторам $\mathcal{H}_{\sharp}^{\varepsilon,\alpha,N}(\omega)$, случайные возмущения в которых уже не малые, но зато симметричные. И как было сказано выше, этого факта и наличия уже доказанных теорем 2.1, 2.2, 2.3 достаточно для выполнения общих теорем 3.2, 3.3, 3.4 Эти теоремы в применении к нашим операторам являются как раз теоремами 2.4–2.12.

4. Случайный локализованный потенциал

Настоящий параграф посвящён исследованию оператора $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$ и доказательству теорем 2.1, 2.4, 2.7, 2.10.

Начнём с доказательства теоремы 2.1. Вначале отметим, что в силу самосопряжённости оператора $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$ его минимальное собственное значение вещественно. Далее преобразуем оператор $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$ к виду (3.4). Напомним, что мы рассматриваем случай $n=1$.

Пусть $W_*^1=W_*^1(\xi)$ – решения уравнения

$$\frac{d^2W_*^1}{d\xi^2}=W^1,\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{4.1}$$

определяемое формулой

$$W_*^1(\xi)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi-\zeta|W^1(\zeta)\,dz. \tag{4.2}$$

Отметим, что вне носителя функции W^1 функция W_*^1 линейна:

$$W_*^1(\xi)=\frac{1}{2}\xi\int\limits_{\mathbb{R}}W^1(\zeta)\,d\zeta-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\zeta W^1(\zeta)\,dz \tag{4.3}$$

справа от носителя W^1 и

$$W_*^1(\xi)=-\frac{1}{2}\xi\int\limits_{\mathbb{R}}W^1(\zeta)\,d\zeta+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\zeta W^1(\zeta)\,dz \tag{4.4}$$

слева от носителя W^1. Положим:

$$Q_{\mathrm{loc}}(x,\varepsilon,\omega):=1+\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(\varepsilon\omega_k)^{2-a}W_*^{\mathrm{loc}}(x_1-k,\varepsilon\omega_k)\chi(x_1), \tag{4.5}$$

где функция W_*^{loc} вводится равенствами

$$W_*^{\mathrm{loc}}(x_1,\varepsilon):=W_*^1\Big(\frac{x_1}{\varepsilon}\Big),\quad \varepsilon>0,\qquad W_*^{\mathrm{loc}}(x_1,0):=0.$$

Через $\chi=\chi(x_1)$ обозначена бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице в окрестности нуля и единице вне большей окрестности. Размер большой окрестности считаем достаточно малой, так что она полностью лежит в $\square'$ – напомним, что по предположению нуль является внутренней точкой $\square'$. С учётом равенств и наличия срезающей функции χ, второе слагаемое правой части (4.5) есть величина порядка $O(\varepsilon^{1-a})$:

$$\begin{aligned}&\Big|(\varepsilon\omega_k)^{2-a}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}W_*^{\mathrm{loc}}(x_1-k,\varepsilon\omega_k)\chi(x_1-k)\Big|\leqslant C\varepsilon^{1-a},\\ &\Big|(\varepsilon\omega_k)^{2-a}\frac{d}{dx_1}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}W_*^{\mathrm{loc}}(x_1-k,\varepsilon\omega_k)\chi(x_1-k)\Big|\leqslant C\varepsilon^{1-a},\end{aligned} \tag{4.6}$$

где константа C не зависит от ε, x_1 и ω. Поэтому оператор умножения на функцию $Q_{\mathrm{loc}}(x,\varepsilon,\omega)$ является ограниченным и ограниченно обратимым в $L_2(\Pi)$. Обозначим такой оператор через $\mathcal{V}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$. Так как функция $Q_{\mathrm{loc}}(\cdot,\varepsilon,\omega)$ принадлежит $C^2(\overline{\Pi})$, не зависит от x_{n+1} и тождественно равна единице в окрестности боковой границы $\Pi_{\alpha,N}$, то оператор

$\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$ переводит область определения оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$ в себя. Прямыми вычислениями с учётом уравнения (4.1) несложно проверить, что

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)\big)^{-1}\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega) = -\Delta + V_0 + \\ + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\varepsilon\omega_k)^{1-a}\left(A_{1,\mathrm{loc}}(x_1-k,\varepsilon\omega_k)\frac{d}{dx_1} + A_{0,\mathrm{loc}}(x_1-k,\varepsilon\omega_k)\right),\end{aligned} \tag{4.7}$$

где оператор в правой части рассматривается в $\Pi_{\alpha,N}$ с теми же краевыми условиями, что и $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$. Коэффициенты $A^{\varepsilon\omega_k}_{0,\mathrm{loc}}(x_1-k)$, $A^{\varepsilon\omega_k}_{1,\mathrm{loc}}(x_1-k)$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned}A_{1,\mathrm{loc}}(x_1,\varepsilon) :=& -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^{2-a}W^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)\chi(x_1)}\frac{d}{dx_1}W^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)\chi(x_1),\\ A_{0,\mathrm{loc}}(x_1,\varepsilon) :=& -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^{2-a}W^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)\chi(x_1)}\left(2\frac{dW^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)}{dx_1}\frac{d\chi}{dx_1}(x_1)+\right.\\ &\left.+W^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)\frac{d^2\chi}{dx_1^2}(x_1)\right)+\\ &+\frac{\varepsilon^{1-a}}{1+\varepsilon^{2-a}W^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)\chi(x_1)}\chi(x_1)W^{\mathrm{loc}}_*(x_1,\varepsilon)W^{\mathrm{loc}}(x_1,\varepsilon).\end{aligned}$$

Из этих формул и оценок (4.6) следует, что коэффициенты $A_{0,\mathrm{loc}}(x_1,\varepsilon\omega_k)$, $A_{1,\mathrm{loc}}(x_1,\varepsilon\omega_k)$ ограничены равномерно по x_1, ε, ω. Поэтому оператор в правой части равенства (4.7) можно представить в виде (3.4), если в качестве нового малого параметра следует взять $\varepsilon^{\frac{1-a}{2}}$, в качестве новых случайных переменных – $\omega_k^{\frac{1-a}{2}}$ а в (3.1) положить

$$\mathcal{L}_1 := 0,\quad \mathcal{L}_2 := 3,\quad \mathcal{L}_2 := K_{1,\mathrm{loc}}(x_1,t)\frac{d}{dx_1} + K_{0,\mathrm{loc}}(x_1,t), \tag{4.8}$$

где коэффициенты $K_{1,\mathrm{loc}}$, $K_{0,\mathrm{loc}}$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}K_{1,\mathrm{loc}}(x_1,t) :=& -\frac{t^{\frac{1}{1-a}}}{1+t^{\frac{2-a}{1-a}}W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)}\frac{d}{dx_1}W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)\chi(x_1),\\ K_{0,\mathrm{loc}}(x_1,t) :=& -\frac{t^{\frac{1}{1-a}}}{1+t^{\frac{2-a}{1-a}}W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)}\left(2\frac{d\chi}{dx_1}(x_1)\frac{d}{dx_1}W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)\right.\\ &\left.+\frac{d^2\chi}{dx_1^2}(x_1)W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)\right)\\ &+\frac{1}{1+t^{\frac{2-a}{1-a}}W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)}\chi(x_1)W^{\mathrm{l}}_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)W^{\mathrm{l}}\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right),\end{aligned} \tag{4.9}$$

при $t>0$ и

$$K_{1,\mathrm{loc}}(x_1,0) := 0,\quad K_{0,\mathrm{loc}}(x_1,0) := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} W^{\mathrm{l}}(\zeta)\,d\zeta. \tag{4.10}$$

Выбор значений для коэффициентов $K_{1,\mathrm{loc}}(x_1,0)$, $K_{0,\mathrm{loc}}(x_1,0)$ произволен, так как $\mathcal{L}(0)=0$. Указанный выше выбор этих значений будет пояснён ниже, см. замечание 4.1.

Докажем, что для оператора $\mathcal{L}(t)$, определённого формулами (3.1), (4.8), выполнены предположения (A1), (A2). Первое из них выполнено, так как $\mathcal{L}_1 = 0$. Для проверки второго предположения вначале заметим, что в нашем случае решение уравнения (3.2) нулевое: $U=0$. Поэтому для проверки неравенства (3.5) достаточно лишь оценить снизу скалярное произведение $(\mathcal{L}_2(t)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}$. Так как коэффициенты A_1, A_0 вещественны, то тоже верно и для данного скалярного произведения. Далее, непосредственно из формул (4.9), оценок (4.6), равенств (4.4), (4.5), а также того факта, что при малых t носители функций $W^1\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)$ и $1-\chi(x_1)$ не пересекаются, получаем:

$$
\begin{aligned}
&K_{1,\mathrm{loc}}(x_1,t)\frac{d}{dx_1}\psi_0(x_{n+1})=0,\\
&(K_{0,\mathrm{loc}}\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}=\int\limits_{\square'}K_{0,\mathrm{loc}}(x_1,t)\,dx_1=\int\limits_{\mathbb{R}}A_0(x_1,t)\,dx_1=\\
&\qquad=t^{\frac{1}{1-a}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx_1}\big(1-\chi(x_1)\big)W^1_*\left(\frac{x_1}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)dx_1+O(t^{\frac{1}{1-a}})=\\
&\qquad=\int\limits_{\mathbb{R}}W^1(\zeta)\,d\zeta+O(t^{\frac{1}{1-a}}).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Из этих соотношений, предположения (2.13) и определения (4.8) оператора $\mathcal{L}_2$ вытекает требуемая оценка (3.5) с $c_0=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}W^1(\zeta)\,d\zeta$.

Замечание 4.1. Выбор значения $A_0(x_1,0)$ обеспечивает выполнение оценки (3.5) при $t=0$ с указанной выше константой c_0.

С учётом сказанного в предыдущем параграфе для завершения доказательства теоремы 2.1 остаётся лишь проверить оценки (3.6). В силу принципа минимакса для исходного самосопряжённого оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$ с пробной функцией ψ_0 имеем:

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)\leqslant&\frac{\|\nabla\psi_0\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}+(V_0\psi_0,\psi_0)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\|\psi_0\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}+\\
&+\frac{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\big(W^{\mathrm{loc}}(\cdot-k,\varepsilon\omega_k)\psi_0,\psi_0\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\|\psi_0\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}\leqslant\\
\leqslant&\Lambda_0+\frac{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\big(W^{\mathrm{loc}}(\cdot-k,\varepsilon\omega_k)\psi_0,\psi_0\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\|\psi_0\|^2_{L_2(\square)}}\leqslant\\
\leqslant&\Lambda_0+\frac{\sum\limits_{\substack{k\in\Gamma_{\alpha,N}\\ \varepsilon\omega_k\neq0}}(\varepsilon\omega_k)^{-a}\left(W^1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon\omega_k}\right)\psi_0,\psi_0\right)_{L_2(\square)}}{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\|\psi_0\|^2_{L_2(\square)}}\leqslant\\
\leqslant&\Lambda_0+\frac{\varepsilon^{1-a}}{|\square'|}\int\limits_{\mathbb{R}}W^1(\zeta)\,d\zeta\leqslant\Lambda_0+\frac{C}{N^8},
\end{aligned}
$$

и при достаточно большом N_1 (см. (2.14)) приходим к правой оценке в (3.6).

Для доказательства левой оценки в (3.6) в области $\Pi_{\alpha,N}$ рассмотрим боковые границы $\partial\square_k\setminus\partial\Pi$ множеств $\square_k$ для всех $k\in\Gamma_{\alpha,N}$, и на этих поверхностях введём краевые условия Неймана. Тогда в силу принципа минимакса собственное значение $\lambda^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)$ оценивается снизу через наименьшее из минимальных собственных значений операторов $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{k,1}(\omega_k)$, $k\in\Gamma_{\alpha,N}$, на ячейках $\square_k$:

$$
\lambda^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)\geqslant\min_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\lambda^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{k,1}(\omega_k).
$$

Минимальное собственное значение $\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega_k)$ оператора $\mathcal{H}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega_k)$ является также и минимальным собственным значением оператора $\big(\mathcal{V}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}\big)^{-1}\mathcal{H}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega_k)\mathcal{V}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}$. Согласно (4.7) с $\alpha = k$, $N = 1$, этот оператор является малым регулярным возмущением оператора $-\Delta + V_0$ в $\square_k$ с краевым условием (2.2) на $\partial\square_k \cap \partial\Pi$ и краевым условием Неймана на $\partial\square_k \setminus \partial\Pi$. Поэтому согласно общей теории регулярных возмущений для $\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega_k)$ справедлива асимптотика:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega_k) =& \Lambda_0 + \frac{(\varepsilon\omega_k)^{1-a}}{|\square'|}\left(\left(A_{1,\mathrm{loc}}(\,\cdot\,,\varepsilon\omega_k)\frac{d}{dx_1} + A_{0,\mathrm{loc}}(\,\cdot\,,\varepsilon\omega_k)\right)\psi_0,\psi_0\right)_{L_2(\square)} + \\
&+ O((\varepsilon\omega_k)^{2-2a}).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Из формул (4.9) с $t = (\varepsilon\omega_k)^{\frac{1-a}{2}}$ следует, что

$$
\left(\left(A_{1,\mathrm{loc}}(\,\cdot\,,\varepsilon\omega_k)\frac{d}{dx_1} + A_{0,\mathrm{loc}}(\,\cdot\,,\varepsilon\omega_k)\right)\psi_0,\psi_0\right)_{L_2(\square)} = \int\limits_{\mathbb{R}} W^{\mathrm{l}}(\zeta)\,d\zeta + O(\varepsilon\omega_k),
$$

а потому асимптотика (4.12) принимает вид:

$$
\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega_k) = \Lambda_0 + \frac{(\varepsilon\omega_k)^{1-a}}{|\square'|}\int\limits_{\mathbb{R}} W^{\mathrm{l}}(\zeta)\,d\zeta + O((\varepsilon\omega_k)^{2-2a}).
$$

И теперь в силу предположения (2.13) приходим к левой оценке в (3.6). Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теорем 3.2, 3.3, 3.4 для оператора $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$ переносятся из [3] без изменений, и это приводит нас к теоремам 2.4, 2.7, 2.10.

Замечание 4.2. Отметим, что оператор $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$ со случайным локализованным потенциалом мы рассматриваем только в полосе, предполагая $n = 1$. В многомерном случае также можно построить преобразование $\mathcal{V}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}(\omega)$, для которого будет верна формула (4.7). Такое преобразование следует строить в виде (4.5), а функцию W_*^{l} вводить как решение уравнения

$$
\Delta_\xi W_*^{\mathrm{l}} = W^{\mathrm{l}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,
$$

определяемое формулой

$$
W_*^{\mathrm{l}}(\xi) := -\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(\xi - \zeta)W^{\mathrm{l}}(z)\,dz,
$$

где E – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Вместе с тем, после перехода к преобразованному оператору предположение (A2) не выполняется, а именно, нарушается оценка (3.5). Это и является причиной введения упомянутого ограничения на размерность слоя Π.

5. Случайный быстро осциллирующий потенциал

В данном параграфе мы рассматриваем оператор $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)$ и доказываем теоремы 2.2, 2.5, 2.8, 2.11. Схема доказательств описана в третьем параграфе и в целом та же, что в предыдущем параграфе: основное внимание уделяется доказательству теоремы 3.1 для оператора $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)$, то есть фактически основной акцент делается на доказательстве теоремы 2.2. Доказательство теорем 3.2, 3.3, 3.4 затем без изменений переносится из [3] и в применении к оператору $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)$, это даёт утверждения теорем 2.5, 2.8, 2.11. Поэтому далее мы доказываем только теорему 2.2.

В силу самосопряжённости оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ его минимальное собственное значение $\lambda^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ вещественно. Построим теперь оператор $\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$, преобразующий оператор $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ к виду (3.4). Положим:

$$Q_{\mathrm{osc}}(x,\varepsilon,\omega) := 1 + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\varepsilon\omega_k)^{2-a} W^{\mathrm{osc}}_*(x'-k, x_{n+1}, \varepsilon\omega_k), \tag{5.1}$$

где функция W^{osc}_* определяется равенствами:

$$W^{\mathrm{osc}}_*(x,\varepsilon) := W^{\mathrm{s}}_*\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon>0, \qquad W^{\mathrm{s}}(x,0) := 0. \tag{5.2}$$

Через $\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ обозначим оператор умножения на функцию $Q_{\mathrm{osc}}(x,\varepsilon,\omega)$. В силу гладкости W^{s}, функция Q_{osc} дважды непрерывно дифференцируема по x в $\overline{\Pi}$. Более того, верны равномерные по $x\in\overline{\Pi}$, ε, ω оценки

$$\begin{aligned} &\left|(\varepsilon\omega_k)^{2-a} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} W^{\mathrm{osc}}_*(x'-k, x_{n+1}, \varepsilon\omega_k)\chi(x'-k)\right| \leqslant C\varepsilon^{2-a},\\ &\left|(\varepsilon\omega_k)^{2-a}\nabla_{x'} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} W^{\mathrm{osc}}_*(x'-k, x_{n+1}, \varepsilon\omega_k)\chi(x'-k)\right| \leqslant C\varepsilon^{1-a}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Поэтому оператор $\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ ограничен и ограниченно обратим в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ и переводит область определения оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$ в себя. Как и в (4.7), с учётом уравнения (2.16) несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)\big)^{-1}\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{loc}}_{\alpha,N}(\omega)\mathcal{V}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega) &= -\Delta + V_0 + \\ &+ \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\varepsilon\omega_k)^{1-a}\Bigg(\sum_{j=1}^{n+1} A_{j,\mathrm{osc}}(x'-k,x_{n+1},\varepsilon\omega_k)\frac{\partial}{\partial x_j} + \\ &\qquad + A_{0,\mathrm{osc}}(x'-k,x_{n+1},\varepsilon\omega_k)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Оператор в правой части этого равенства рассматривается в $\Pi_{\alpha,N}$ с теми же краевыми условиями, что и $\mathcal{H}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}_{\alpha,N}(\omega)$. Коэффициенты $A_{j,\mathrm{osc}}$, $A_{0,\mathrm{osc}}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{j,\mathrm{osc}}(x,\varepsilon) :=& -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^{2-a}W^{\mathrm{osc}}_*(x,\varepsilon)}\frac{\partial W^{\mathrm{osc}}_*}{\partial x_j}(x,\varepsilon),\\ A_{0,\mathrm{osc}}(x,\varepsilon) :=& -\frac{1}{1+\varepsilon^{2-a}W^{\mathrm{osc}}_*(x,\varepsilon)}\Bigg(2\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 W^{\mathrm{s}}_*}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(\Delta_x W^{\mathrm{s}}_*)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \\ &+ \varepsilon^{1-a}W^{\mathrm{s}}_*\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)W^{\mathrm{osc}}_*(x,\varepsilon)\Bigg) + \varepsilon^{1-a}W(x). \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в скобках в правой части формулы для $A_{0,\mathrm{osc}}$ следует понимать в смысле частных производных по x и ξ функции $W^{\mathrm{s}}_*(x,\xi)$ с последующей подстановкой $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$.

Из оценок (5.3) вытекает, что функции $A_{j,\mathrm{osc}}(x,\varepsilon)$, $A_{0,\mathrm{osc}}(x,\varepsilon)$ ограничены равномерно по x, ε и ω_k. Правую часть равенства (5.4) можно представить в виде (3.4), удовлетворив при этом предположения (A1), (A2).

Для этого нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 5.1. *Пусть функция $w=w(x,\xi)$, заданная в $\mathbb{R}^{2n+2}$, 1-периодична по каждой из переменной ξ_i, $i=1,\ldots,n$, и финитна по x:*

$$\operatorname{supp} w(\cdot,\xi) \subseteq M \subset \square \quad \textit{для всех} \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{5.5}$$

где M – некоторое фиксированное множество. Предположим, что

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}w}{\partial x^\alpha \partial \xi^\beta} \in C(\mathbb{R}^{2n+2}), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha|\leqslant m, \quad |\beta|\leqslant 1, \tag{5.6}$$

для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$\int\limits_{\square} w\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int\limits_{\square} dx \int\limits_{(0,1)^{n+1}} w(x,\xi)\,d\xi + O(\varepsilon^m). \tag{5.7}$$

Доказательство. Переходя к функции

$$(x,\xi)\mapsto w(x,\xi)\ -\int\limits_{(0,1)^{n+1}} w(x,\zeta)\,d\zeta,$$

видим, что утверждение леммы достаточно доказать для случая

$$\int\limits_{(0,1)^{n+1}} w(x,\xi)\,d\xi = 0 \quad \text{для} \quad x\in\square. \tag{5.8}$$

В силу этого равенства краевая задача для уравнения

$$\Delta_\xi w_* = w, \quad \xi\in(0,1)^{n+1},$$

с периодическими краевыми условиями разрешима для каждого $x\in\square$, и существует единственное решение, также удовлетворяющее условию (5.8). Эта функция имеет следующую гладкость:

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}w_*}{\partial x^\alpha \partial \xi^\beta} \in C(\mathbb{R}^{2n+2}), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha|\leqslant m, \quad |\beta|\leqslant 2. \tag{5.9}$$

Так же как и w, функция w_* финитна по x. В силу уравнения для w_* выполнено равенство

$$\varepsilon^2\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial w_*}{\partial \xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + w\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где в правой части все производные понимаются как частные производные по x и ξ от функции $w(x,\xi)$, а производная по x_j в левой части есть полная производная по x_j от функции, зависящей от x и x/ε. С учётом последнего равенства имеем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\square} w\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx =&\varepsilon^2\int\limits_{\square}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial w_*}{\partial \xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx - \varepsilon\int\limits_{\square}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \\ &= -\,\varepsilon\int\limits_{\square}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Отметим, что каждая из подынтегральных функций в левой части полученного равенства имеет гладкость (5.6) с заменой m на $m-1$ и удовлетворяет условию (5.8). Реккурентно применяя теперь равенство (5.10) достаточное число раз, приходим к утверждению леммы. $\square$

Обозначим:

$$T^{\mathrm{osc}}(\varepsilon) := \frac{\varepsilon^{a-1}}{|\square'|}\int\limits_{\square}\frac{\psi_0^2(x_{n+1})}{1+\varepsilon^{2-a}W_*^{\mathrm{osc}}(x,\varepsilon)}\left(2\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 W_*^{\mathrm{s}}}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(\Delta_x W_*^{\mathrm{s}})\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx.$$

В силу первой оценки в (5.3) выполнено равенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon^{2-a}W_*^{\mathrm{osc}}(x,\varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon^{2-a}) \tag{5.11}$$

равномерно по $x \in \overline{\square}$. Поэтому из леммы 5.1, условия (2.17) и гладкости функции W_*^{s} следует равенство

$$T^{\mathrm{osc}}(\varepsilon) = O(\varepsilon). \tag{5.12}$$

Определим теперь оператор $\mathcal{L}(t)$. Положим:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1(t) := \sum_{j=1}^{n+1} K_{j,\mathrm{osc}}^{(1)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + K_{0,\mathrm{osc}}^{(1)}(x,t),\\
&\mathcal{L}_2(t) := K_{0,\mathrm{osc}}^{(2)}(x,t), \quad \mathcal{L}_3(t) := 0,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

при $t>0$, где

$$\begin{aligned}
K_{j,\mathrm{osc}}^{(1)}(x,t) :=& \frac{t^{\frac{1}{1-a}}}{1+t^{\frac{2-a}{1-a}} W_*^{\mathrm{osc}}(x,t^{\frac{1}{1-a}})}\frac{\partial}{\partial x_j} W_*^{\mathrm{osc}}(x,t^{\frac{1}{1-a}}),\\
K_{0,\mathrm{osc}}^{(1)}(x,t) :=& -\frac{1}{1+t^{\frac{2-a}{1-a}} W_*^{\mathrm{osc}}(x,t^{\frac{1}{1-a}})}\left(2\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 W_*^{\mathrm{s}}}{\partial x_j\partial\xi_j}\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)+\right.\\
&\left.+t^{\frac{1}{1-a}}(\Delta_x W_*^{\mathrm{s}})\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)\right)+t\,T^{\mathrm{osc}}(t^{\frac{1}{1-a}}),\\
K_{0,\mathrm{osc}}^{(2)}(x,t) :=& -T^{\mathrm{osc}}(t^{\frac{1}{1-a}})+W(x)+\frac{W^{\mathrm{s}}\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)W_*^{\mathrm{osc}}\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)}{1+t^{\frac{2-a}{1-a}}W_*^{\mathrm{osc}}(x,t^{\frac{1}{1-a}})},
\end{aligned}$$

и при $t=0$ операторы $\mathcal{L}_i$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(0) :=& 0, \quad \mathcal{L}_3(0) := 0,\\
\mathcal{L}_2(0) :=& \frac{1}{2}\int\limits_{\square} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx-\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1})\int\limits_{(0,1)^{n+1}}|\nabla_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)|^2\,d\xi.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Несложно убедиться, что при таком выборе оператора $\mathcal{L}(t)$ правая часть (5.4) принимает вид (3.4), если в качестве нового малого параметра выбрать ε^{1-a}, а в качестве новых случайных переменных – ω_k^{1-a}.

Проверим теперь выполнение предположений (A1), (A2). Первое из предположений следует непосредственно из определения величины T^{osc} и коэффициента $K_{0,\mathrm{osc}}^{(2)}$.

Проверим предположение (A2), а именно, оценку (3.5). Вначале выясним поведение скалярного произведения $(\mathcal{L}_2(t)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}$. Для этого воспользуемся оценкой (5.12), равенством (5.11) и леммой 5.1:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_2(t)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)} =& \int\limits_{\square} K_{2,\mathrm{osc}}^{(2)}(x,t)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx = \int\limits_{\square} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx+\\
&+\int\limits_{L_2(\square)}\psi_0^2(x_{n+1})W^{\mathrm{s}}\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)W_*^{\mathrm{osc}}(x,t^{\frac{1}{1-a}})\,dx+O(t^{\frac{1}{1-a}})=\\
=&\int\limits_{\square} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx+\\
&+\int\limits_{L_2(\square)}\psi_0^2(x_{n+1})W^{\mathrm{s}}\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)W_*^{\mathrm{s}}\left(x,\frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)\,dx+O(t^{\frac{1}{1-a}})=
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\square} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx + \int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} W^{\mathrm{s}}(x,\xi)W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi + O(t^{\frac{1}{1-a}}).$$

С учётом уравнения (2.16) и краевых условий для W_*^{s} мы можем проинтегрировать по частям в последнем интеграле:

$$\int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} W^{\mathrm{s}}(x,\xi)W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\Delta_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi =$$
$$= -\int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)|^2 W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi.$$

Теперь окончательно получаем:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_2(t)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)} = &\int\limits_{L_2(\square)} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx - \\ - \int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) &\int\limits_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)|^2 W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi + O(t^{\frac{1}{1-a}}).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Выясним теперь поведение решения уравнения (3.2). Правая часть этого уравнения есть функция

$$\big(\mathcal{L}_1(t)\psi_0\big)(x,t) = -\frac{\psi_0(x_{n+1})}{1 + t^{\frac{2-a}{1-a}} W_*^{\mathrm{osc}}(x, t^{\frac{1}{1-a}})} \left(2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 W_*^{\mathrm{s}}}{\partial x_j \partial \xi_j}\left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right) + \right.$$
$$\left. + t^{\frac{1}{1-a}} (\Delta_x W_*^{\mathrm{s}})\left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-a}}}\right)\right) + t\,T^{\mathrm{osc}}(t^{\frac{1}{1-a}})\psi_0(x_{n+1}).$$

Для решения уравнения (3.2) с такой правой частью методом двух масштабов можно построить асимптотическое разложение при малых t [6]. Это разложение будет верно по меньшей мере в норме $L_2(\square)$. Первый член разложения есть величина порядка $O(t^{\frac{2}{1-a}})$. Поэтому

$$(U, \mathcal{L}_1(t)\psi_0)_{L_2(\square)} = O(t^{\frac{2}{1-a}}), \quad t \to 0.$$

Таким образом, с учётом (5.15) имеем:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_2(t)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)} - (U, \mathcal{L}_1(t)\psi_0)_{L_2(\square)} = \int\limits_{L_2(\square)} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx - \\ - \int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)|^2 W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi + O(t^{\frac{1}{1-a}}) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{L_2(\square)} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)|^2 W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)\,d\xi\end{aligned} \tag{5.16}$$

при достаточно малых t. Это доказывает выполнение предположения (A2) при $t>0$. При $t=0$ имеем $\mathcal{L}_1(t)\psi_0=0$, $U=0$, и оценка (5.16) выполняется в силу определения $\mathcal{L}_2(0)$, см. (5.14).

Проверим теперь оценки (3.6). Как и в предыдущем параграфе, для доказательства правой оценки применим принцип минимакса с пробной функцией ψ_0:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)\leqslant&\frac{\|\nabla\psi_0\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}+(V_0\psi_0,\psi_0)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\|\psi_0\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}+\\
&+\frac{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\big(W^{\mathrm{osc}}(\cdot-k,x_{n+1},\varepsilon\omega_k)\psi_0,\psi_0\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\|\psi_0\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}\leqslant\\
\leqslant&\Lambda_0+\frac{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\big(W^{\mathrm{osc}}(\cdot-k,x_{n+1},\varepsilon\omega_k)\psi_0,\psi_0\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\|\psi_0\|^2_{L_2(\square)}}\leqslant\\
\leqslant&\Lambda_0+\frac{\sum\limits_{\substack{k\in\Gamma_{\alpha,N}\\ \varepsilon\omega_k\neq0}}(\varepsilon\omega_k)^{-a}\left(W^{\mathrm{osc}}\left(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon\omega_k}\right)\psi_0,\psi_0\right)_{L_2(\square)}}{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\|\psi_0\|^2_{L_2(\square)}}=\\
=&\Lambda_0+\frac{1}{N^n|\square'|}\sum_{\substack{k\in\Gamma_{\alpha,N}\\ \varepsilon\omega_k\neq0}}(\varepsilon\omega_k)^{-a}\int\limits_{\square}W^{\mathrm{s}}\left(x,\frac{x}{\varepsilon\omega_k}\right)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx.
\end{aligned}$$

В силу леммы 5.1 и предположения (2.18) отсюда следует:

$$\lambda_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)\leqslant\Lambda_0+C\varepsilon^{1-a}\leqslant\Lambda_0+\frac{C}{N^4},\quad C>0,$$

где константа C не зависит от ε и N. С учётом (2.19), при достаточно большом N_1 это даёт правую оценку в (3.6).

Для доказательства левой оценки в (3.6) совершенно аналогично предыдущему параграфу, на основе принципа минимакса выводится нижняя оценка:

$$\lambda_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)\geqslant\min_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k),\tag{5.17}$$

где $\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)$ – минимальное собственное значение оператора $\mathcal{H}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)$ на ячейке $\square_k$ с соответствующими краевыми условиями. Оно одновременно является собственным значением и оператора $\big(\mathcal{V}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)\big)^{-1}\mathcal{H}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)\mathcal{V}_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)$, который в соответствии с равенством (5.4) есть малое регулярное возмущение оператора $-\Delta+V_0$ в $\square_k$ с соответствующими краевыми условиями. Тогда согласно регулярной теории возмущений, асимптотика собственного значения $\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k)=&\Lambda_0+\frac{(\varepsilon\omega_k)^{1-a}}{|\square'|}(\mathcal{L}_1(\varepsilon\omega_k)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}+\\
&+\frac{(\varepsilon\omega_k)^{2-2a}}{|\square'|}\big((\mathcal{L}_2(\varepsilon\omega_k)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)}-(U,\mathcal{L}_1(\varepsilon\omega_k)\psi_0)_{L_2(\square)}\big)+\\
&+O\big((\varepsilon\omega_k)^{3-3a}\big),
\end{aligned}$$

где U – решения уравнения (A2) с правой частью $\mathcal{L}_1(\varepsilon\omega_k)\psi_0$. Отсюда, из формулы (5.16) и выполнения предположения (A1) получаем:

$$\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k) = \Lambda_0 + \frac{(\varepsilon\omega_k)^{2-2a}}{|\square'|}\Bigg(\int\limits_{\square} W(x)\psi_0^2(x_{n+1})\,dx -$$
$$- \int\limits_{\square} dx\,\psi_0^2(x_{n+1}) \int\limits_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_*^{\mathrm{s}}(x,\xi)|^2\,d\xi\Bigg) + O\big((\varepsilon\omega_k)^{3-3a}\big),$$

откуда следует, что

$$\lambda_{k,1}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega_k) \geqslant \Lambda_0$$

при достаточно малых ε. В силу (5.17) это доказывает левую оценку в (3.6) и завершает доказательство теоремы 2.2.

Замечание 5.1. Идея построения оператора $\mathcal{V}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{osc}}(\omega)$ заимствована из работ [4], [5], где подобный оператор был построен в одномерном случае. В настоящей работе этот подход распространён на случай произвольной размерности.

6. Случайное дельта-взаимодействие

В настоящем параграфе мы исследуем оператор $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)$ и доказываем теоремы 2.3, 2.6, 2.9, 2.12.

В статьях [7, Ex. 5], [8, Ex. 5] было показано, что с помощью определенной замены пространственных переменных и умножения на определенную функцию, операторы с дельта-взаимодействиями можно свести к обычным дифференциальным операторам, сохранив при этом спектр и самосопряжённость. В применении к нашему оператору $\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)$, результаты работ [7, Ex. 5], [8, Ex. 5] дают следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Существует замена переменных $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$, $y_i = y_i(x, \varepsilon\omega)$, $i = 1, \ldots, n+1$, такая что*

1. *Вне малых фиксированных окрестностей поверхностей S_k, $k \in \Gamma$, замена $x \mapsto y$ является тождественной, то есть $y_i = x_i$. Замена $x \mapsto y$ переводит каждую ячейку $\square_k$ в себя.*
2. *Функции y_i являются дважды дифференцируемыми функциями, при этом вторые производные кусочно-непрерывны.*
3. *Пусть $p = p(y, \varepsilon\omega)$ – якобиан замены $x \mapsto y$, то есть*
$$p = \det \frac{D(y_1, \ldots, y_{n+1})}{D(x_1, \ldots, x_{n+1})},$$
где матрица в правой части – это матрица Якоби замены. На функциях $u \in L_2(\Pi_{\alpha,N})$, $u = u(y)$ определим оператор в терминах обратной замены $x = x(y, \varepsilon\omega)$:
$$(\mathcal{V}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)u)(x) := p^{-\frac{1}{2}}(x(y,\varepsilon\omega))u(x(y,\varepsilon\omega)).$$
Выполнено равенство:
$$\big(\mathcal{V}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)\big)^{-1}\mathcal{H}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega)\mathcal{V}_{\alpha,N}^{\varepsilon,\mathrm{dlt}}(\omega) = -\Delta + V_0 + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \varepsilon\omega_k \mathcal{S}(k)\mathcal{M}(\varepsilon\omega_k)\mathcal{S}(-k), \tag{6.1}$$
где $M(t)$ – симметричный дифференциальный оператор второго порядка с кусочно-непрерывными коэффициентами, равными нулю вне малой окрестности поверхности S.

4. *Справедливо равенство*

$$(\mathcal{M}(t)\psi_0,\psi_0)_{L_2(\square)} = \int\limits_S W^{\mathrm{dlt}}\psi_0^2\,dS.$$

Определим оператор $\mathcal{L}(t)$:

$$\mathcal{L}_1 := 0, \quad \mathcal{L}_2(t) := \mathcal{M}(t^{\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{L}_3(t) := 0, \quad \mathcal{L}(t) := t\mathcal{M}(t), \quad t\in[0,t_0].$$

Тогда согласно пункту 3 леммы 6.1, правая часть равенства (6.1) совпадает с оператором (3.4), если в качестве нового малого параметра взять $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, а в качестве новых случайных переменных – $\omega_k^{\frac{1}{2}}$. Предположение (A1) при этом выполняется. Решение соответствующего уравнения (3.2) равно нулю, а потому в силу (2.21) предположение (A2) также выполняется. И так как операторы $\mathcal{L}_i$, $i=1,2,3$, симметричны, то возможно прямое применение общих теорем 3.1, 3.2, 3.3, 3.4. Это немедленно приводит нас к утверждению теорем 2.3, 2.6, 2.9, 2.12.

Авторы выражают благодарность Г.П. Панасенко за обсуждение отдельных аспектов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гадыльшин Р.Р. *О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на оси* // Теор. матем. физика. 2002. Т. 132. № 1. С. 97-104.
2. Борисов Д.И. *Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном* // Матем. сборник. 2006. Т. 197. № 4. С. 3-32.
3. D. Borisov, A. Golovina, I. Veselić *Quantum Hamiltonians with weak random abstract perturbation. I. Initial length scale estimate* // Preprint: arXiv:1501.06503. 2015.
4. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре оператора Шрёдингера с быстро осциллирующим финитным потенциалом* // Теор. матем. физ. 2006. Т. 147. № 1. С. 58-63.
5. Борисов Д.И. *О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов* // Теор. матем. физ. 2007. Т. 151. № 2. С. 207-218.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов.* М.: Наука, 1984. 352 с.
7. D. Borisov *Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation* // Math. Phys. Anal. Geom. 2007. V. 10. No. 2. P. 155-196.
8. D.I. Borisov *Distant perturbations of the Laplacian in a multi-dimensional space* // Ann. H. Poincaré. 2007. V. 8. No. 7. P. 1371-1399.
9. Бикметов А.Р., Борисов Д.И. *О дискретном спектре оператора Шредингера с узкой потенциальной ямой* // Теор. матем. физ. 2005. Т. 145. № 3. С. 373-385.
10. Бикметов А.Р. *Асимптотики собственных элементов краевых задач оператора Шредингера с большим потенциалом, локализованным на малом множестве* // Жур. вычис. матем. матем. физ. 2006. Т. 46. № 4. С. 666-681.
11. F. Martinelli and H. Holden *On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(R^\nu)$* // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. No. 2. P. 197-217.
12. J. Fröhlich, T. Spencer *Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy* // Comm. Math. Phys. 1983. 88. No. 2. P. 151-184.
13. J. Baker, M. Loss, and G. Stolz *Minimizing the ground state energy of an electron in a randomly deformed lattice* // Comm. Math. Phys. 2008. V. 283. No. 2. P. 397-415.
14. D. Borisov and I. Veselić *Low lying spectrum of weak-disorder quantum waveguides* // J. Stat. Phys. 2011. V. 142. No. 1. P. 58-77.
15. D. Borisov and I. Veselić *Low lying eigenvalues of randomly curved quantum waveguides* // J. Funct. Anal. 2013. V. 265. No. 11. P. 2877-2909.

16. J. Bourgain *An approach to Wegner's estimate using subharmonicity* // J. Stat. Phys. 2009. V. 134. No. 5-6. P. 969-978.
17. L. Erdös and D. Hasler *Anderson localization at band edges for random magnetic fields* // J. Stat. Phys. 2012. V. 146. No. 5. P. 900-923.
18. L. Erdös and D. Hasler *Wegner estimate and anderson localization for random magnetic fields* // Comm. Math. Phys. 2012. V. 309. No. 2. P. 507-542.
19. F. Ghribi, P. D. Hislop, and F. Klopp *Localization for Schrödinger operators with random vector potentials* // In *Adventures in mathematical physics. Contemp. Math.* Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2007. V. 447. P. 123-138.
20. F. Ghribi and F. Klopp *Localization for the random displacement model at weak disorder* // Ann. Henri Poincaré. 2010. V. 11. No. 1-2. P. 127-149.
21. P.D. Hislop and F.Klopp *The integrated density of states for some random operators with nonsign definite potentials* // J. Funct. Anal. 2002. V. 195. No. 1. P. 12-47.
22. F. Kleespies and P. Stollmann *Lifshitz asymptotics and localization for random quantum waveguides* // Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. No. 10 P. 1345-1365.
23. F. Klopp *Localization for semiclassical continuous random Schrödinger operators II: The random displacement model* // Helv. Phys. Acta. 1993. V. 66. No. 7-8. P. 810-841.
24. F. Klopp *Localisation pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires dans $L^2(\mathbf{R}^d)$: un modéle semi-classique* // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1995. V. 45. No. 1. P. 265-316.
25. F. Klopp *Localization for some continuous random Schrödinger operators* // Comm. Math. Phys. 1995. V. 167. No. 3. P. 553-569.
26. F. Klopp *Weak disorder localization and Lifshitz tails: continuous Hamiltonians* // Ann. Henri Poincaré. 2002. V. 3. No. 4. P. 711-737.
27. F. Klopp, M. Loss, S. Nakamura, and G. Stolz *Localization for the random displacement model* // Duke Math. J. 2012. V. 161. No. 4. P. 587-621.
28. F. Klopp and S. Nakamura *Spectral extrema and Lifshitz tails for non-monotonous alloy type models* // Comm. Math. Phys. 2009. V. 287. No. 3 P. 1133-1143.
29. F. Klopp, S. Nakamura, F. Nakano, and Y. Nomura *Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields* // Ann. Henri Poincaré. 2003. V. 4. No. 4. P. 795-811.
30. V. Kostrykin and I. Veselić *On the Lipschitz continuity of the integrated density of states for sign-indefinite potentials* // Math. Z. 2006. V. 252. No. 2. P. 367-392.
31. D. Lenz, N. Peyerimhoff, O. Post, and I. Veselić *Continuity properties of the integrated density of states on manifolds* // Japan. J. Math. 2008. V. 3. No. 1. P. 121-161.
32. D. Lenz, N. Peyerimhoff, O. Post, and I. Veselić *Continuity of the integrated density of states on random length metric graphs* // Math. Phys. Anal. Geom. 2009. V. 12. No. 3 P. 219-254.
33. D. Lenz, N. Peyerimhoff, and I. Veselić *Integrated density of states for random metrics on manifolds* // Proc. London Math. Soc. 2004. V. 88. No. 3 P. 733-752.
34. K. Leonhardt, N. Peyerimhoff, M. Tautenhahn, and I. Veselić *Wegner estimate and localization for alloy-type models with sign-changing exponentially decaying single-site potentials* // Rev. Math. Phys., to appear.
35. G. Stolz *Non-monotonic random Schrödinger operators: the Anderson model* // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 248. No. 1. P. 173-183.
36. N. Ueki *On spectra of random Schrödinger operators with magnetic fields* // Osaka J. Math. 1994. V. 31. No. 1 P. 177-187.
37. N. Ueki *Simple examples of Lifschitz tails in Gaussian random magnetic fields* // Ann. Henri Poincaré. 2000. V. 1. No. 3. P. 473-498.
38. N. Ueki *Wegner estimate and localization for random magnetic fields* // Osaka J. Math. 2008. V. 45. No. 3. P. 565-608.
39. I. Veselić *Wegner estimate and the density of states of some indefinite alloy type Schrödinger operators* // Lett. Math. Phys. 2002. V. 59. No. 3. P. 199-214.

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия

University of Hradec Králové,
Rokitanskeho, 62
50003, Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: BorisovDI@yandex.ru

Рамис Хамитович Каримов,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: karimov_ramis_92@mail.ru

Тимур Фархатович Шарапов,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: stf0804@mail.ru