ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 2 (2015). С. 19-34.

УДК 517.5

ОБ УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСОВ ИЗ ЭКСПОНЕНТ

Р.А. БАШМАКОВ, А.А. МАХОТА, К.В. ТРУНОВ

Аннотация. В классическом пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ существует безусловный базис $\{e^{ikt}\}$ (k — целые). В работе рассматриваются вопросы о существовании безусловных базисов из экспонент в весовых гильбертовых пространствах $L^2(I,\exp h)$ функций, суммируемых с квадратом на интервале I вещественной оси с весом $\exp(-h)$, где h — выпуклая функция. Получены условия, показывающие, что безусловные базисы из экспонент могут существовать лишь в очень редких случаях.

Ключевые слова: базисы Рисса, безусловные базисы, ряды экспонент, гильбертово пространство, преобразование Фурье-Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 30D20

Пусть I — интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,\exp h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_I f(t)\overline{g}(t)e^{-2h(t)}\,dt.$$

Определение 1. *Семейство* $\{e^{\lambda_k t},\ k = 1,2,...\}$ *называется безусловным базисом в пространстве* $L^2(I,\exp h)$*, если*

1) семейство $\{e^{\lambda_k t},\ k=1,2,...\}$ *полно в пространстве* $L^2(I,\exp h)$*;*

2) существуют положительные постоянные m, M *такие, что для любой конечной последовательности* $a_k\in\mathbb{C}$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$m\sum_k |a_k|^2\|e^{\lambda_k t}\|^2 \le \|\sum_k a_k e^{\lambda_k t}\|^2 \ \le M\sum_k |a_k|^2\|e^{\lambda_k t}\|^2. \tag{1}$$

Мы здесь придерживаемся определения из работы [2]. Как отмечено в этой работе, если система $\{e^{\lambda_k t}\}$ образует безусловный базис в пространстве $L^2(I,\exp h)$, то любая функция $f\in L^2(I,\exp h)$ единственным образом разлагается в безусловно (перестановочно) сходящийся ряд по этой системе:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k t},\quad t\in I. \tag{2}$$

В этом параграфе рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент в пространстве $L^2(I,\exp h)$.

Основным инструментом исследований является преобразование Лапласа.

R.A. Bashmakov, A.A. Makhota, K.V. Trounov, On absence conditions of unconditional bases of exponents.

Поступила 01 апреля 2015 г.

Как показано в работе [7], преобразование Лапласа $L : S \longmapsto \widehat{S}$ устанавливает изоморфизм пространства, сопряженного к $L^2(I, \exp h)$, с гильбертовым пространством $\widehat{L}^2(I, \exp h)$ функций F, аналитических в полосе $J + i\mathbb{R}$, где

$$J = \{x : \ \widetilde{h}(x) = \sup_{t \in I}(xt - h(t)) < \infty\}$$

с нормой

$$\|F\| = \sqrt{\int_0^\infty \int_J \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}\, d\widetilde{h}'(x) dy},$$

при этом

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)}\, dt = \|e^{\lambda t}\|^2, \ \lambda = x + iy.$$

Пусть система $\{e^{\lambda_k t}\}$ образует в пространстве $L^2(I, \exp h)$ безусловный базис. Через S_k обозначим линейный функционал в пространстве $L^2(I, \exp h)$, который каждой функции $f \in L^2(I, \exp h)$ ставит в соответствие коэффициент f_k в разложении (2):

$$S_k(f) = f_k.$$

Если через P обозначим $\max(M, \frac{1}{m})$, где M, m — постоянные в соотношении (1), то для любого n выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \|e^{\lambda_k t}\|^2 \le \|\sum_{k=1}^{n} f_k e^{\lambda_k t}\|^2 \le P \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \|e^{\lambda_k t}\|^2.$$

Переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получим

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \|e^{\lambda_k t}\|^2 \le \|f\|^2 \le P \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \|e^{\lambda_k t}\|^2.$$

По определению функции $K(\lambda) = K(\operatorname{Re}\lambda)$ это соотношение можно записать в виде

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 K(\lambda_k) \le \|f\|^2 \le P \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 K(\lambda_k). \tag{3}$$

Из левого неравенства следует ограниченность функционала S_k:

$$|S_k(f)| \le \sqrt{\frac{P}{K(\lambda_k)}}\|f\|.$$

Таким образом, функции $\widehat{S}_k(\lambda)$ лежат в пространстве $\widehat{L}^2(I, \exp h)$ и, кроме того,

$$\widehat{S}_k(\lambda_n) = \begin{cases} 0, & n \ne k, \\ 1, & n = k. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что $\lambda_n, \ n \ne k$, являются простыми нулями функции $\widehat{S}_k(\lambda)$. В самом деле, если бы для некоторого $m \ne k$ величина $\widehat{S}'_k(\lambda_m)$ обращалась бы в 0, то функция $(\lambda_k - \lambda_m)\widehat{S}_k(\lambda)/(\lambda - \lambda_m)$, лежащая в $\widehat{L}^2(I, \exp h)$, обращалась бы в нуль в точках $\lambda_n, \ n \ne k$, и равнялась бы 1 в точке λ_k, то есть во всех точках $\lambda_n, \ n = 1, 2, ...$, совпадала бы с функцией $\widehat{S}_k(\lambda)$. Но в силу полноты системы $e^{\lambda_n t}$ в пространстве $L^2(I, \exp h)$ система точек $\lambda_n, \ n = 1, 2, ...$, является множеством единственности для пространства $\widehat{L}^2(I, \exp h)$. Тем самым, функции $(\lambda_k - \lambda_m)\widehat{S}_k(\lambda)/(\lambda - \lambda_m)$ и $\widehat{S}_k(\lambda)$ должны были бы совпадать тождественно.

Пусть

$$L(\lambda) = \widehat{S}_1(\lambda)(\lambda - \lambda_1).$$

Это функция, аналитическая в полосе $J+i\mathbb{R}$, с простыми нулями в точках λ_n, $n=1,2,...$ Функции

$$\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}=\frac{\widehat{S}_1(\lambda)(\lambda-\lambda_1)}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_1)\widehat{S}_1'(\lambda_k)},\quad k\neq 1,$$
$$\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_1)(\lambda-\lambda_1)}=\widehat{S}_1(\lambda),$$

тоже являются элементами пространства $\widehat{L}^2(I,\exp h)$ и совпадают с функцией $\widehat{S}_k(\lambda)$ во всех точках λ_n, $n=1,2,...$. Снова в силу полноты системы $\{e^{\lambda_n t}\}$ в пространстве $L^2(I,\exp h)$ имеем

$$\widehat{S}_k(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)},\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

При фиксированном $\lambda\in\mathbb{C}$ функция $e^{\lambda t}$ лежит в пространстве $L^2(I,\exp h)$ и, тем самым, разлагается в ряд по системе $e^{\lambda_k t}$:

$$e^{\lambda t}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\lambda)e^{\lambda_k t}. \tag{6}$$

Подействуем функционалом S_n на это равенство. С учетом соотношений (4) получим

$$\widehat{S}_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\lambda)\widehat{S}_n(\lambda_k)=c_n(\lambda).$$

Отсюда вместе с (5) имеем

$$c_n(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Представление (6) и условие (3) влекут соотношение

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\lambda)|^2K(\lambda_k)\leq K(\lambda)\leq P\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\lambda)|^2K(\lambda_k)$$

или

$$\frac{1}{P}K(\lambda)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|L(\lambda)|^2K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2}\leq PK(\lambda). \tag{7}$$

Итак, доказана теорема:

Теорема 1. *Если система $\{e^{\lambda_k t}\}$ является безусловным базисом в пространстве $L^2(I,\exp h)$, то существует функция L, аналитическая в полосе $J+i\mathbb{R}$, с простыми нулями в точках λ_k, $k=1,2,...$, для которой выполняется соотношение* (7).

Соотношение (7) позволяет выявить некоторые свойства распределения нулей функции $L(\lambda)$.

Введем характеристику $\tau(u,z,p)$ для выпуклой функций $u(x)$.

Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r>0$ через $B(z,r)$ обозначим круг $\{w: |w-z|<r\}$, и для непрерывной в $\overline{B}(z,r)$ функции f положим

$$\|f\|_r=\max_{w\in\overline{B}(z,r)}|f(w)|.$$

Пусть $d(f,z,r)$ — расстояние от функции f до подпространства гармонических в $B(z,r)$ функций:

$$d(f,z,r)=\inf\{\|f-H\|_r,\ H-\text{гармонична в }\ B(z,r)\}.$$

Если $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$, то функция $u(w) = u(\operatorname{Re} w)$ является непрерывной функцией в вертикальной полосе $I + i\mathbb{R}$ на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : \ d(u, z, r) \le p\}.$$

Ясно, что $\tau(u, z, p)$ зависит только от $\operatorname{Re} z$. Функцию u при необходимости мы доопределяем, полагая равной $+\infty$ вне интервала I, тогда $\tau(u, z, p)$ не может превосходить расстояния от y до границы интервала определения функции u. Итак, $\tau(u, z, p)$ – радиус наибольшего круга с центром в точке z, в котором функция u отклоняется от пространства гармонических функций на этом круге не более чем на p.

Введенная характеристика $\tau(u, z, p)$ выпуклой функции $u(x)$ оказывается тесно связанной с геометрической характеристикой выпуклости $\rho_2(u, y, p)$, введенной в работах [4], [7]:

$$\rho_2(u, y, p) = \sup\{t > 0 : \ \int_{y-t}^{y+t} |u'(\tau) - u'(y)|\, d\tau \le p\}.$$

Эту величину $\rho_2 = \rho_2(u, y, p)$ можно определить из равенства

$$\frac{u(y - \rho_2) + u(y + \rho_2)}{2} - u(y) = \frac{p}{2}.$$

Заметим, что

$$\rho(u, y, p) = \rho_2(u, y, 2p).$$

Для произвольной непрерывной функции $u(y)$ на вещественной оси и положительного числа r через $d_1(u, y, r)$ обозначим отклонение в равномерной норме функции u на промежутке $[y - r; y + r]$ от линейных функций:

$$d_1(u, y, r) = \inf\{\max_{t \in [y-r; y+r]} |u(t) - l(t)|, \ l \text{ — линейна}\}.$$

Через $\rho(u, y, p)$ обозначим наибольшее число r, такое, что на интервале $[y-r; y+r]$ функция u отклоняется от линейных функций не более чем на p:

$$\rho(u, y, p) = \sup\{r : \ d_1(u, y, r) \le p\}.$$

Лемма 1. *1. Для функции $\tau(y, p) = \tau(u, y, p)$ для любого положительного p выполняются оценки*

$$\tau(y, p) \ge \rho(y, p) \ge \frac{1}{16}\tau(y, p).$$

2. При $q \ge p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\tau(y, q) \ge \tau(y, p) \ge \frac{p}{16q}\tau(y, q).$$

3. Функция $\tau(y) = \tau(u, y, p)$ удовлетворяет условию Лифшица: для всех x, y из области определения функции u

$$|\tau(y) - \tau(x)| \le |y - x|.$$

Доказательство. 1. Зафиксируем точку $z \in \mathbb{C}$ так, что $y = \operatorname{Re} z$ лежит в области определения функции u. Положим $r = \rho(u, y, p)$. Тогда существует линейная функция l, удовлетворяющая условию

$$|u(x) - l(x)| \le p, \quad x \in [y - r; y + r].$$

Функция $v(w) = l(\operatorname{Re} w)$ — гармонична и

$$|u(\operatorname{Re} w) - l(\operatorname{Re} w)| \le p, \quad w \in B(z, r).$$

Тем самым,

$$\tau(y, p) \ge r = \rho(y, p).$$

Теперь положим $r = \tau(u, y, p)$. В круге $B(z, r)$ существует гармоническая функция H такая, что $\|u - H\|_r \le p$. Возьмем линейную функцию l, такую, что $l(x) \le u(x)$, для любого x, $l(y) = u(y)$ (существование такой функции обеспечивается выпуклостью функции u), и пусть $v(w) = l(\operatorname{Re} w)$. Тогда в круге $B(z, r)$ выполняются неравенства

$$v(w) \leq u(w) \leq H(w) + p,$$

следовательно,

$$(H(w) + p) - v(w) \geq 0.$$

Кроме того, поскольку $v(z) = u(\operatorname{Re} z)$, то

$$(H(z) + p) - v(z) = (H(z) + p) - u(\operatorname{Re} z) = (H(z) - u(\operatorname{Re} z)) + p \leq 2p.$$

Применим неравенство Харнака для неотрицательных гармонических функций к функции $H(w) + p - v(w)$: в круге $B(z, \frac{r}{2})$ имеем оценку

$$(H(w) + p) - v(w) \leq 3\left((H(z) + p) - v(z)\right) \leq 6p.$$

Тогда в том же круге $B(z, \frac{r}{2})$ выполняется оценка

$$|u(\operatorname{Re} w) - v(w)| \leq |u(\operatorname{Re} w) - H(w)| + |h(w) + p - v(w)| + p \leq 8p.$$

Функции в левой части этого нарвенства зависят только от $x = \operatorname{Re} w$, поэтому мы получаем

$$|u(x) - l(x)| \leq 8p, \quad x \in \left[y - \frac{r}{2}; y + \frac{r}{2}\right].$$

Из этой оценки следует, что

$$\rho(y, 8p) \geq \frac{r}{2} = \tau(y, p)$$

или

$$\tau(y, p) \leq 2\rho(y, 8p).$$

Из этой оценки получим

$$\tau(y, p) \leq 16\rho(y, p)$$

2. Вторая часть леммы 1 может быть получена на основе свойств функции $\rho(y, z, p)$.

3. Возьмем точки y_1, y_2 из области определения функции $u(x)$, и пусть $r = \tau(u, y_1, p)$. Это значит, что в круге $B(y_1, r)$ существует гармоническая функция $H(z)$, удовлетворяющая условию

$$|u(\operatorname{Re} z) - H(z)| \leq p.$$

Если $|y_1 - y_2| < r$, то это неравенство выполняется и в круге $B(y_2, r - |y_1 - y_2|)$, тем самым

$$\tau(u, y_2, p) \geq r - |y_1 - y_2| = \tau(u, y_1, p) - |y_1 - y_2|,$$

или

$$\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p) \leq |y_1 - y_2|.$$

Если же $|y_1 - y_2| \geq r = \tau(u, y_1, p)$, то тем более

$$\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p) \leq |y_1 - y_2|.$$

Поменяем местами y_1, y_2:

$$\tau(u, y_2, p) - \tau(u, y_1, p) \leq |y_1 - y_2|.$$

Таким образом,

$$|\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p)| \leq |y_1 - y_2|.$$

□

В работе [11] показано, что величина $\tau = \tau(u, \lambda, p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в круге $B(\lambda, \tau)$, то

$$\max_{z\in\overline{B}(\lambda,\tau)} (H(z) - u(z)) = 2p. \tag{8}$$

Эту величину определим для функции $\ln K(\lambda)$ и числа $\ln(5P)$, где P — константа из соотношения (7). В дальнейшем ее будем обозначать просто через $\tau(\lambda)$. Итак,

$$\inf_{v\in A(B(\lambda,\tau))} \max_{z\in\overline{B}(\lambda,\tau)} |\ln K(z) - v(z)| = \ln(5P),$$

где через $A(B(\lambda, \tau))$ обозначено множество функций гармонических в круге $B(\lambda, \tau)$.

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda)$ — функция, аналитическая в полосе $J + i\mathbb{R}$, с простыми нулями λ_k, $k = 1, 2, ...$, при некотором P удовлетворяющая двусторонней оценке*

$$\frac{1}{P}K(\lambda) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2} \le PK(\lambda).$$

Тогда

1) В любом круге $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$ содержится хотя бы один нуль λ_k функции L.

2) Для любых n, k, $n \ne k$, выполняется неравенство

$$|\lambda_k - \lambda_n| \ge \frac{\max(\tau(\lambda_k), \tau(\lambda_n))}{10P^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Для любого k в круге $B(\lambda_k, \frac{\tau(\lambda_k)}{20P^{\frac{3}{2}}})$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{5^6P^8}K(\lambda) \le \frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2} \le PK(\lambda).$$

Доказательство. 1. Первый пункт докажем от противного: пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ в круге $B = B(\lambda, 2\tau(\lambda))$ нет ни одного нуля функции L. Возьмем точку $z \in B(\lambda, \tau(\lambda))$. Тогда для любого k имеем $\tau(\lambda) \le |\lambda_k - \lambda|/2$ и $|\lambda - z| < \tau(\lambda) \le |\lambda_k - \lambda|/2$, значит

$$|z - \lambda_k| \ge |\lambda_k - \lambda| - |\lambda - z| \ge \frac{1}{2}|\lambda - \lambda_k|,$$
$$|z - \lambda_k| \le |\lambda_k - \lambda| + |\lambda - z| \le \frac{3}{2}|\lambda - \lambda_k|.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \le \frac{|z-\lambda_k|}{|\lambda-\lambda_k|} \le \frac{3}{2} < 2.$$

Из этого соотношения вытекает двусторонняя оценка, верная для $z \in B(\lambda, \tau(\lambda))$

$$\frac{1}{4}C(\lambda)|L(z)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2|z-\lambda_k|^2} \le 4C(\lambda)|L(z)|^2,$$

где через $C(\lambda)$ обозначено число

$$C(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2}.$$

По соотношению (7), которое по условию теоремы выполняется для функции $L(\lambda)$, получим

$$\frac{1}{4P}C(\lambda)|L(z)|^2 \le K(z) \le 4PC(\lambda)|L(z)|^2,\ z \in B(\lambda, \tau).$$

Прологарифмируем это соотношение
$$|\ln K(z) - \ln(C(\lambda)|L(z)|^2)| \le \ln(4P) < \ln(5P),\ z \in B(\lambda, \tau).$$
Поскольку в круге $B(\lambda, 2\rho(\lambda))$ по предположению нет нулей функции L, то функция $u(z) = \ln(C(\lambda)|L(z)|^2)$ гармонична в круге $B(\lambda\tau(\lambda))$ и непрерывна в его замыкании. Тогда последняя оценка противоречит определению величины $\tau(\lambda)$.

2. Зафиксируем два различных номера $k,\ n$. По соотношению (7) функция
$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{K(\lambda_n)}}{L'(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda)} L(\lambda)$$
удовлетворяет верхней оценке
$$|F(\lambda)| \le \sqrt{PK(\lambda)}.$$
А по определению величины $\tau(\lambda_k)$ в круге $B(\lambda_k, \tau(\lambda_k))$ существует гармоническая функция $u_k(\lambda)$, удовлетворяющая оценке
$$|\ln K(\lambda) - u_k(\lambda)| \le \ln(5P), \tag{9}$$
в частности,
$$\sqrt{K(\lambda)} \le \sqrt{5P} e^{\frac{u_k(\lambda)}{2}}.$$
Пусть $g_k(\lambda)$ — функция, аналитическая в круге $B(\lambda_k, \tau(\lambda_k))$, и такая, что $\operatorname{Re} g_k(\lambda) = u_k(\lambda)/2$. Тогда функция
$$f(z) = F(\tau(\lambda_k)z + \lambda_k) e^{-g_k(\tau(\lambda_k)z + \lambda_k)}$$
аналитична в единичном круге $B(0, 1)$ и удовлетворяет верхней оценке
$$|f(z)| \le \sqrt{5}P,$$
причем $f(0) = 0$. По лемме Шварца выполняется верхняя оценка
$$|f(z)| \le \sqrt{5}P|z|,$$
значит,
$$|f'(0)| \le \sqrt{5}P.$$
Вычислив $f'(0)$, получим
$$|F'(\lambda_k)| \le \sqrt{5}P \frac{e^{\frac{u_k(\lambda_k)}{2}}}{\tau(\lambda_k)}.$$
Отсюда и из соотношения (9) вытекает
$$|F'(\lambda_k)| \le 5P^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{K(\lambda_k)}}{\tau(\lambda_k)}.$$
Вычислим по определению значение $F'(\lambda_k)$ и получим
$$\frac{|L'(\lambda_k)|\sqrt{K(\lambda_n)}}{|L'(\lambda_n)||\lambda_k - \lambda_n|} \le 5P^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{K(\lambda_k)}}{\tau(\lambda_k)}.$$
Индексы k, n произвольные, можем их поменять местами:
$$\frac{|L'(\lambda_n)|\sqrt{K(\lambda_k)}}{|L'(\lambda_k)||\lambda_n - \lambda_k|} \le 5P^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{K(\lambda_n)}}{\tau(\lambda_n)}.$$
Перемножим последние две оценки и получим
$$\frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2} \le \frac{25P^3}{\tau(\lambda_k)\tau(\lambda_n)},$$
или
$$|\lambda_k - \lambda_n|^2 \ge \frac{\tau(\lambda_k)\tau(\lambda_n)}{25P^3}. \tag{10}$$

Пусть $\tau(\lambda_k) \geq \tau(\lambda_n)$ и предположим, что неравенство пункта 2 не выполняется, то есть

$$|\lambda_k - \lambda_n| < \frac{\tau(\lambda_k)}{10P^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Круг

$$B' = \{|\lambda - \lambda_n| \leq \frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_k)\}$$

лежит в круге $B(\lambda_k, \tau(\lambda_k))$, в котором существует гармоническая функция $u_k(z)$ с оценкой

$$|\ln K(z) - u_k(z)| \leq \ln(5P).$$

Тогда

$$\tau(\lambda_n) \geq \frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_k).$$

Эта оценка вместе с оценкой (10) дает неравенство

$$|\lambda_k - \lambda_n|^2 \geq \frac{1}{25P^3}\tau(\lambda_k)\tau(\lambda_n) \geq \frac{1}{25P^3}\frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_k)^2.$$

Так как по смыслу $P > 1$, то

$$\frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}} > \frac{9}{10} > \frac{1}{4}$$

и

$$|\lambda_k - \lambda_n|^2 > \frac{1}{100P^3}\tau^2(\lambda_k)$$

или

$$|\lambda_k - \lambda_n| > \frac{1}{10P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_k),$$

что противоречит предположению (11).

3. Зафиксируем некоторый номер k. Правое неравенство в пункте 3 следует просто из условия теоремы. В круге $B(\lambda_k, \tau(\lambda_k))$ по определению величины $\tau(\lambda_k)$ существует гармоническая функция $u_k(\lambda)$ такая, что

$$-\ln(5P) \leq \ln K(\lambda) - u_k(\lambda) \leq \ln(5P). \tag{12}$$

По условию теоремы

$$K(\lambda) \geq \frac{1}{P}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K(\lambda_n)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_n)|^2|\lambda - \lambda_n|^2} \geq \frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{P|L'(\lambda_k)|^2|\lambda - \lambda_k|^2}$$

или

$$\ln K(\lambda) \geq \ln\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda - \lambda_k|^2} - \ln P.$$

Следовательно, для $\lambda \in B(\lambda_k, \tau(\lambda_k))$ имеем

$$\ln\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda - \lambda_k|^2} - \ln P - u_k(\lambda) - \ln(5P) \leq 0,$$

то есть

$$u_k(\lambda) + 2\ln P + \ln 5 - \ln\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda - \lambda_k|^2} \geq 0.$$

По пункту 2 в круге $B\left(\lambda_k, \frac{1}{10P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_k)\right)$ нет нулей функции $L(\lambda)$ кроме λ_k. Следовательно, функция

$$v_k(\lambda) = -\ln\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda - \lambda_k|^2}$$

гармонична в этом круге. А функция $u_k(\lambda)+v_k(\lambda)+\ln(5P^2)$ гармонична и неотрицательна в нем. По неравенству Харнака в круге $B(\lambda_k, \frac{\tau(\lambda_k)}{20P^{\frac{3}{2}}})$ выполняется оценка

$$u_k(\lambda)+v_k(\lambda)+\ln(5P^2) \le 3(u_k(\lambda_k)+v_k(\lambda_k)+\ln(5P^2)) = 3(u_k(\lambda_k)-\ln K(\lambda_k)+\ln(5P^2)).$$

Из левого неравенства в (12) имеем $u_k(\lambda_k) \le \ln K(\lambda_k)+\ln(5P)$, поэтому

$$u_k(\lambda)+v_k(\lambda) \le 3\ln(5P)+2\ln(5P^2) = \ln 5^5P^7.$$

Из правого неравенства в (12) имеем $u_k(\lambda) \ge \ln K(\lambda)-\ln(5P)$, значит,

$$-v_k(\lambda) \ge \ln K(\lambda)-\ln(5P)-\ln 5^5P^7 = \ln K(\lambda)-\ln(5^6P^8).$$

Таким образом,

$$\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2} \ge \frac{1}{5^6P^8}K(\lambda).$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_k,\ k=1,2,...,$ *— нули функции* $L(\lambda)$*, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы. Тогда в любом ограниченном множестве* B*, содержащем хотя бы две из точек* $\lambda_k,\ k=1,2,...,$ *найдется точка* λ_n *так, что*

$$\sum_{\lambda_k\in B, k\ne n} \frac{1}{|\lambda_k-\lambda_n|^2} \le \frac{(5P)^{12}}{\tau^2(\lambda_n)}. \tag{13}$$

Доказательство. В силу соотношения (7) для любого λ выполняется оценка

$$\sum_{\lambda_k\in B} \frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2} \le PK(\lambda). \tag{14}$$

Существует такой номер n, что

$$\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2} = \min_{\lambda_k\in B}\left(\frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2}\right).$$

По пункту 3 теоремы 2 для точек λ, лежащих на границе круга $B\left(\lambda_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_n)\right)$, справедлива оценка

$$\frac{1}{5^6P^8}K(\lambda) \le 20^2P^3\frac{K(\lambda_n)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}$$

или

$$\frac{K(\lambda)}{|L(\lambda)|^2} \le 4^25^8P^{11}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)}.$$

Отсюда и из оценки (14) получим

$$4^25^8P^{11}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)} \ge \frac{1}{P}\sum_{\lambda_k\in B}\frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2}.$$

Учитывая выбор номера n, для точек λ на границе $B\left(\lambda_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(\lambda_n)\right)$ имеем

$$4^25^8P^{11}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2\tau^2(\lambda_n)} \ge \frac{1}{P}\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2}\sum_{\lambda_k\in B}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|^2}$$

или

$$\sum_{\lambda_k\in B}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|^2} \le \frac{4^25^8P^{12}}{\tau^2(\lambda_n)}. \tag{15}$$

По пункту 2 теоремы 2 для указанных точек λ при $k \neq n$ выполняется оценка

$$|\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda_k| \leq \frac{3}{2}|\lambda_n - \lambda_k|,$$

поэтому из (15) вытекает оценка

$$\sum_{\lambda_k \in B, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} < \frac{(5P)^{12}}{\tau^2(\lambda_n)}.$$

Теорема 3 доказана. □

На основе теоремы 3 можно показать, что существование базисов Рисса из экспонент в рассматриваемых пространствах скорее исключение, чем правило.

Теорема 4. *Пусть I — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$— выпуклая функция на этом интервале,*

$$K(\lambda) = \int_I e^{2\operatorname{Re}\lambda t - 2h(t)}\, dt, \quad J = \{x: \ K(x) < \infty\}.$$

Предположим, что для некоторого $p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел τ_m, $m = 1, 2, ...$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$

$$\delta\tau_m \leq \tau(\ln K(z), x, p) \leq \tau_m, \ m = 1, 2, ...,$$

2) имеет место соотношение

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{\tau_m} = \infty,$$

тогда в пространстве $L^2(I, \exp h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если условия теоремы выполнены для некоторого p, то в силу утверждения п.2 леммы 1, эти условия выполнены для любого $p > 0$.

Допустим, что в пространстве $L^2(I, \exp h)$ система $e^{\lambda_k t}$ образует базис Рисса. По теореме 1 существует целая функция с простыми нулями в точках λ_k, для которой выполняется соотношение (7). Далее будем считать, что в условии теоремы 4 в качестве числа p фигурирует число $\ln(5P)$, где P — констаната из соотношения (7), и для краткости записи величину $\tau(\ln K(z), \lambda, \ln(5P))$ будем обозначать через $\tau(\lambda)$. По теореме 3 совокупность точек λ_k обладает свойством (13). Возьмем произвольный индекс m. Пусть

$$\tau_m = \sup_{\lambda \in [a_m, b_m]} (\tau(\lambda)),$$

s_m — наибольшее натуральное число, такое, что

$$a_m + 4s_m\tau_m \leq b_m.$$

Тогда

$$a_m + 4(s_m + 1)\tau_m \geq b_m - a_m,$$

поэтому

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{(a_m + s_m\tau_m) - a_m}{\tau_m} = \infty.$$

Для простоты записи впредь будем считать, что $a_m + s_m\tau_m = b_m$. При фиксированном индексе m рассмотрим систему P, состоящую из квадратов со стороной $4\tau_m$

$$P_{ql} = \{z: \ a_m + 2l\tau_m \leq \operatorname{Re} z \leq a_m + 2(l+1)\tau_m, \quad 2q\tau_m \leq \Im z \leq 2(q+1)\tau_m\},$$

$$l = 0, 1, ..., s_m - 1, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Два квадрата из этой системы будем называть смежными, если они имеют общую вершину. Пусть Q_1, Q_2 — два не смежных квадрата из данной системы и $z_1, w_1 \in Q_1$, $z_2, w_2 \in Q_2$. Тогда

$$|z_1 - z_2| \leq 4|w_1 - w_2|. \tag{16}$$

В самом деле, из того, что квадраты не смежные, следует, что $|w_1 - w_2| \geq 4\Delta\tau_m$ или

$$\tau_m \leq \frac{1}{4}|w_1 - w_2|.$$

Значит,

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - w_1| + |w_1 - w_2| + |w_2 - z_2| \leq 8\sqrt{2}\tau_m + |w_2 - z_2| \leq 4|w_2 - z_2|.$$

Центр квадрата P_{ql} обозначим через ζ_{ql}. Каждый квадрат P_{ql} содержит круг $B(\zeta_{ql}, 2\tau_m)$, который, в свою очередь, в условиях теоремы содержит круг $B(\zeta_{ql}, 2\tau(\zeta_{ql})$. По п.1 теоремы 2 в этом круге содержится хотя бы одна точка из системы показателей λ_k. Возьмем достаточно большое N и через B_N обозначим объединение квадратов P_{ql} по всем q и l, $|l| \leq N$. Применим теорему 5 к системе λ_k и к множеству B_N. Найдется номер n такой, что выполняется соотношение

$$\sum_{\lambda_k \in B_N, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} < \frac{(5P)^{12}}{\tau^2(\lambda_n)}.$$

По условию 1) доказываемой теоремы отсюда следует оценка

$$\sum_{\lambda_k \in B_N, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} < \frac{(5P)^{12}}{\delta^2\tau_m^2}. \tag{17}$$

Пусть Q_0 — квадрат из системы P, содержащий точку λ_n, а точка λ_k лежит в квадрате Q (из нашей системы), не смежном с Q_0. Возьмем любую точку $\lambda \in Q$ и воспользуемся соотношением (16):

$$|\lambda_k - \lambda_n| \leq 4|\lambda - \lambda_n|$$

или

$$\frac{1}{16|\lambda - \lambda_n|^2} \leq \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2}.$$

Проинтегрируем это неравенство по λ по всему квадрату Q:

$$\frac{1}{16\tau_m^2}\int_Q \frac{1}{16|\lambda - \lambda_n|^2}\, dv(\lambda) \leq \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2}.$$

Через B_N' обозначим множество B_N, из которого удалены квадраты, смежные с Q_0. Поскольку в каждом квадрате есть по крайней мере одна точка из системы показателей, то из последнего неравенства и из соотношения (23) получим

$$\int_{B_N'} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} dv(\lambda) \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2}.$$

Пусть $Q_0 = P_{sj}$, и для определенности предполжим, что $j < 0$, $s \leq \frac{s_m}{2}$ и положим

$$\widetilde{B}_N = \{\lambda :\ a_m + (s+2)\tau_m \leq \operatorname{Re}\lambda \leq b_m,\ (j+2)\tau_m \leq \Im\lambda \leq (N+1)\tau_m\}.$$

Тогда $\widetilde{B}_N \subset B_N'$ поэтому выполняется неравенство

$$\int_{\widetilde{B}_N} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} dv(\lambda) \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2}.$$

Воспользуемся заменой переменных $\lambda - (a_m + (s+2)\tau_m + i(j+2)\tau_m = \tau_m w$ и через w_0 обозначим образ точки λ_n при этой замене:

$$\int_0^{s_m - s - 1}\int_0^{N+1} \frac{1}{|w - w_0|^2} dv(\lambda) \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2},$$

при этом для точки w_0 имеем $-2 \leq \operatorname{Re} w_0$, $\operatorname{Im} w_0 \leq -1$. Следовательно, можем считать, что $w_0 = -2-2i$ — левая часть в последнем неравенстве только уменьшится, и неравенство сохранится. От индексов m, N зависят только пределы интегрирования, поэтому можем в последнем неравенстве перейти к пределу при $m, N \longrightarrow \infty$. С учетом того, что

$$s_m = \frac{b_m - a_m}{\tau_m} \longrightarrow \infty,$$

и поскольку мы предполагаем, что $s \leq \frac{s_m}{2}$, то $s_m - s - 2 \geq \frac{s_m}{2} - 2 \longrightarrow \infty$, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^2 + (y+2)^2} dxdy \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2}.$$

Но интеграл слева расходящийся, получили противоречие.

Теорема 4 доказана. □

Данная теорема требует вычисления функции $K(x)$, что не всегда просто. Оказывается можно обойтись вычислением функции $\widetilde{h}$.

Теорема 4 (a)**.** *Пусть I — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$— выпуклая функция на этом интервале,*

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t \in I}(xt - h(t)).$$

Предположим, что для некоторого $p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел t_m, $m = 1, 2, ...$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$

$$\delta t_m \leq \tau(2\widetilde{h}, x, p) \leq t_m, \;\; m = 1, 2, ...,$$

2) имеет место соотношение

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{t_m} = \infty.$$

Тогда в пространстве $L^2(I, \exp h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Доказательство. Согласно результатам работ [3], [9], [10] при некоторых константах c, $C > 0$, зависящих только от числа p, выполняется соотношение

$$c\frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\rho_1(2\widetilde{h}, x, p)} \leq K(x) \leq C\frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\rho_1(2\widetilde{h}, x, p)}.$$

Отсюда получим, что при некоторых других константах $c, C > 0$ будет выполняться оценка

$$c\frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\tau(2\widetilde{h}, x, p)} \leq K(x) \leq C\frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\tau(2\widetilde{h}, x, p)}.$$

В условиях теоремы получаем

$$c \leq K(x)e^{-2\widetilde{h}(x)}t_m) \leq \frac{C}{\delta}.$$

Положим $C' = \max(|\ln c|, |\ln C - \ln \delta|)$. Тогда

$$|\ln K(x) - (2\widetilde{h}(x) - \ln t_m)| \leq C', \quad x \in [a_m; b_m].$$

Очевидно, что $\tau(2\widetilde{h}, x, p) = \tau(2\widetilde{h} - t_m, x, p)$. Пусть $a'_m = a_m + t_m$, $b'_m = b_m - t_m$. В интервале $[a'_m; b'_m]$ применим п.4 леммы 1 к функциям $u_1(x) = \ln K(x)$, $u_2(x) = 2\widetilde{h}(x) - \ln t_m$. Тогда в условиях доказываемой теоремы

$$\frac{\delta p}{p + C'}t_m \leq \frac{p}{p + C'}\tau_2(x) \leq \tau_1(x) \leq \frac{p + C'}{p}\tau_2(x) \leq \frac{p + C'}{p}\tau_m.$$

Положим $t'_m = \frac{p+C'}{p} t_m$, $\delta' = \frac{\delta p^2}{(p+C')^2}$. Последние неравенства дают
$$\delta' t'_m \le \tau(\ln K, x, p) \le t'_m, \quad x \in [a'_m; b'_m],$$
причем
$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{b'_m - a'_m}{t'_m} = \infty.$$
Таким образом выполнены условия теоремы 4 и теорема 4(a) доказана. □

В формулировке последней теоремы использована величина $\tau(\lambda)$, которую не всегда просто вычислить. Докажем лемму, облегчающую вычисление величины $\tau(\lambda)$ в конкретных примерах.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — дважды дифференцируемая неотрицательная выпуклая функция на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. Допустим, что для некоторой точки $y \in I$ при некоторых константах $A, B, C > 0$ выполняется соотношение*
$$A \le \frac{u''(x)}{(u''(y)} \le B, \quad \text{когда } |x-y| \le C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$
Тогда
$$\min\Big(C, \frac{p}{BC}\Big)\sqrt{\frac{1}{u''(y)}} \le \tau(u,y,p) \le 32\max\Big(C, \frac{p}{AC}\Big)\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$
Доказательство. Поскольку
$$u'(x) - u'(y) = u''(x^*)(x-y),$$
где x^* — точка между x, y, то в условиях теоремы имеем
$$Au''(y)|x-y| \le |u'(x) - u'(y)| \le Bu''(y)|x-y|, \quad \text{если } |x-y| \le C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$
Следовательно, для любого $r \in [0; C\sqrt{1/u''(y)}]$ верно
$$\int_{y-r}^{y+r} |u'(x) - u'(y)| \le Bu''(y)\int_{y-r}^{y+r} |x-y| = Bu''(y)r^2 \le BC^2,$$
$$\int_{y-r}^{y+r} |u'(x) - u'(y)| \ge Au''(y)\int_{y-r}^{y+r} |x-y| = Au''(y)r^2.$$
Из первого неравенства вытекает оценка
$$\rho_2(u, y, BC^2) \ge C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$
Заметим, что
$$\rho_2(u,y,p) \ge \begin{cases} C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p \ge BC^2, \\ \frac{p}{BC}\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p \le BC^2. \end{cases}$$
Таким образом,
$$\rho_2(u,y,p) \ge \min\Big(C, \frac{p}{BC}\Big)\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}. \tag{18}$$
С другой стороны, при $r = C\sqrt{1/u''(y)}$ имеем
$$\int_{y-r}^{y+r} |u'(x) - u'(y)|\, dx \ge Au''(y)r^2 = AC^2,$$

поэтому
$$\rho_2(u,y,AC^2)\le C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$
Заметим, что
$$\rho_2(u,y,p)\le\begin{cases}C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p\le AC^2,\\ \frac{p}{AC}\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p\ge AC^2.\end{cases}\tag{19}$$
Таким образом,
$$\rho_2(u,y,p)\le\max\left(C,\frac{p}{AC}\right)\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$
Отсюда и из оценки (18) получим
$$\min\left(C\frac{p}{BC}\right)\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}\le\rho_2(u,y,p)\le\rho_2(u,y,2p)=\rho(u,y,p),$$
$$\rho(u,y,p)=\rho_2(u,y,2p)\le2\rho_2(u,y,p)\le2\max\left(C,\frac{p}{AC}\right)\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Далее воспользуемся п.1 леммы 1 и получим утверждение леммы 2
Лемма 2 доказана. □

Теперь мы можем сформулировать полезный частный случай теоремы 4(a).

Теорема 4 (b)**.** *Пусть I — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$— выпуклая функция на этом интервале,*
$$\widetilde{h}(x)=\sup_{t\in I}(xt-h(t)).$$
Предположим, что для некоторого $p>0$ существуют последовательность промежутков $[a_m;b_m]$ и положительных чисел t_m, $m=1,2,...$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x\in[a_m;b_m]$
$$\delta t_m\le\sqrt{\frac{1}{\widetilde{h}''(x)}}\le t_m,\ \ m=1,2,...,$$

2) имеет место соотношение
$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{b_m-a_m}{t_m}=\infty.$$
тогда в пространстве $L^2(I,\exp h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Примеры.

1. Пусть $I=\mathbb{R}$ и $h(t)=A|t|^\alpha$, где $\alpha\ge1$.

1a. Если $\alpha>1$, то
$$\widetilde{h}(x)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{A\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},\ x\in\mathbb{R},$$

то есть сопряженное по Юнгу имеет вид $B|x|^\beta$, где $\beta > 1$, и определяется условием $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Тогда при $x \neq 0$

$$\sqrt{\frac{1}{\widetilde{h}''(x)}} = \sqrt{\frac{1}{B\beta(\beta-1)}}|x|^{-\frac{\beta}{2}+1},$$

и условие 1 теоремы 4(b) выполняется, например, для последовательности промежутков $[n;2n]$. Таким образом в пространствах $L^2(\mathbb{R}, e^{A|t|^\alpha})$ базисов Рисса из экспонент не существует.

1б. Если $\alpha = 1$, то есть $h(t) = A|t|$, то

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} 0, \ |x| \leq A, \\ +\infty, \ |x| > A, \end{cases}$$

и $\rho(\widetilde{h}, x, 1) = 1 - |x|$. Следовательно, условия теоремы 4(a) не могут выполняться, и утверждать на основании теоремы 4, что в пространстве $L^2(\mathbb{R}, e^{A|t|})$ не существует базисов Рисса, мы не можем.

2. Пусть $I = [-1;1]$ и $h(t) = \frac{A}{(1-|t|)^\alpha}$, где $A > 0, \quad \alpha > 0$. Тогда

$$\widetilde{h}(x) = |x| - B|x|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \quad B = \frac{A(\alpha+1)}{(A\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}},$$

и

$$\sqrt{\frac{1}{\widetilde{h}''(x)}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{B}(\alpha+1)}|x|^{\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}$$

и снова условие 1 теоремы 4(b) выполняется, например, для последовательности промежутков $[n;2n]$. Таким образом, в пространствах
$L^2(\mathbb{R}, \exp\frac{A}{(1-|t|)^\alpha})$ базисов Рисса из экспонент не существует.

2а. В примере 2 возьмем $A = 0$. Тогда

$$h(t) = 0, \ |t| \leq 1,$$

то есть $L^2(I, e^{h(t}) = L^2[-1;1]$ и

$$\widetilde{h}(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\rho(\widetilde{h}, x, 1) \geq |x| + 1.$$

Пусть существует последовательность промежутков $[a_m; b_m]$, удовлетворяющая условиям теоремы 4. Допустим, что $b_m > 0$, тогда для больших номеров m

$$b_m - a_m \geq 2\tau_m \geq 2\rho(\widetilde{h}, b_m, 1) \geq 2b_m + 2,$$

значит,

$$a_m \leq -b_m - 2 < 0$$

и $0 \in [a_m; b_m]$. Тогда должна выполняться оценка $\rho(\widetilde{h}, 0, 1) \geq \delta\tau_m$. Так как $\rho(\widetilde{h}, 0, 1) = 1$, то $\delta \leq \frac{1}{\tau_m}$. Однако, $\tau_m \longrightarrow \infty$ при $m \longrightarrow \infty$, значит $\delta = 0$. Получили противоречие и теорема 4 неприменима в данном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // Доклады Академии наук. 1946. Т. 54. С. 383–386.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Башмаков Р.А., Исаев К.П. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа.* Вестник Башкирского университета. 2006. № 4. С. 3–6.
4. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН., 1992.
5. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, № 3. С. 67–77.
6. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовх пространствах на R* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006.
7. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 80–87.
8. Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 1. С. 60–71.
9. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.
10. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 1. С. 3–16.
11. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т. 26. № 4. С. 159–175.
12. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и анализ, 22:5.2010. С. 49–68.

Рустэм Абдрауфович Башмаков,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru

Алла Александровна Махота,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: allarum@mail.ru

Кирилл Владимирович Трунов,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: trounovkv@mail.ru