ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 72-85.

УДК 517.984

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

И.Д. ЦОПАНОВ

Аннотация. Рассматриваются регуляризованные следы для дифференциальных операторов, содержащих в качестве коэффициентов при степенях спектрального параметра значения неизвестной функции в заданном наборе точек области определения. Такие дифференциальные операторы интерпретируются в работе как полиномиальные операторные пучки, коэффициенты которых являются неограниченными конечномерными операторами. На основе теории М.В.Келдыша построены общие формулы регуляризованных следов для таких операторных пучков. Полученные формулы развивают известный результат В.А.Садовничего и В.А.Любишкина для относительно-конечномерных возмущений самосопряженных операторов.

Ключевые слова: спектр, операторный пучок, регуляризованные следы.

Mathematics Subject Classification: 47A55, 34B07, 34L15

1. Введение

Рассмотрим операторный пучок вида

$$N_\lambda = A - Q_0 - \lambda\, Q_1 - \cdots - \lambda^{n-1} Q_{n-1} - \lambda^n E, \tag{1}$$

где A – неограниченный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с компактной резольвентой. Относительно операторов $Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1}$ предполагается, что они являются A-конечномерными, т.е. имеют вид $Q_j = P_j A$, где P_j – конечномерные ограниченные операторы в $\mathfrak{H}$:

$$\forall\, h \in \mathfrak{H} \quad P_j h = \sum_{l=1}^{n_j} (h, \varphi_l^j) \psi_l^j, \tag{2}$$

где $\varphi_l^j, \psi_l^j \in \mathfrak{H}$ $(j = 0, 1, ..., n-1;\ l = 1, ..., n_j)$. Заметим, что если векторы φ_l^j не принадлежат области определения оператора A, то Q_j – неограниченный оператор в $\mathfrak{H}$.

Такие пучки возникают, например, при решении методом Фурье начально-краевых задач для нагруженных уравнений [1, 2] вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + \sum_{i=1}^{\nu} a_i(x) u(t, x_i) + \sum_{j=1}^{\mu} b_j(x) \frac{\partial\, u(t, z_j)}{\partial\, t}.$$

Формулой регуляризованных следов для пучка (1) будем называть формулу вида

$$\sum_\nu (\mu_\nu^s - \eta_\nu^s - c_\nu(s)) = F(s), \tag{3}$$

где в данном случае μ_ν и η_ν – собственные значения пучков N_λ и $A_{\lambda^n} \overset{def}{=} A - \lambda^n E$ соответственно, s – натуральный параметр, $c_\nu(s)$ и $F(s)$ – вычисляемые величины. В левой части

I.D. Tsopanov, General formulae of regularized traces for loaded equations.

Поступила 13 октября 2014 г.

(3) знак суммы означает суммирование, возможно, с некоторой расстановкой скобок, по всем собственным значениям пучков N_λ и A_{λ^n}, причем способ расстановки скобок зависит от поведения спектра оператора A.

Впервые формула регуляризованного следа при $n = 1$ и $s = 1$ для относительно конечномерного возмущения самосопряженного неограниченного оператора с достаточно общими условиями на разреженность его спектра была получена в работе [3]. В работе [4] были получены регуляризованные следы при $n = 1$ и $s > 1$ для относительно конечномерного возмущения в виде рекуррентных формул. Построение формул регуляризованных следов при $s > 1$ в случае бесконечномерных возмущений задача более сложная. Методами теории возмущений для абстрактных операторов с дискретным спектром в гильбертовом пространстве формулы вида (3) были получены в [5] (см. также [6] с. 327–337) при условии на разреженность спектра невозмущенного оператора. Существенное продвижение в этом направлении сделано в [7], где были сняты ограничения на разреженность спектра. Обзор и тщательный анализ результатов, полученных в теории регуляризованных следов операторов, приведен в [8].

Вероятно [9] была первой работой, посвященной построению аналитическими методами формул регуляризованных следов для нагруженного обыкновенного дифференциального оператора, который можно в некоторых случаях трактовать как операторный пучок вида (1). В настоящей работе получены формулы (3) регуляризованных следов для операторных пучков (1) и произвольных $s \in \mathbb{N}$.

Интересно отметить, что история регуляризованных следов для полиномиальных операторных пучков повторяет историю следов для операторов. Так, работы [10]–[14] посвящены построению формул для сумм обратных величин собственных значений полиномиальных операторных пучков. Основным методом этих работ является метод линеаризации и использование затем известной теоремы В.Б. Лидского о следах ядерного оператора [15].

2. Предварительные сведения и результаты

В дальнейшем будем считать, что $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$, т.е. $T = A^{-1}$ – компактный оператор. Перейдем от исходного пучка (1) к пучку $L_\lambda = N_\lambda A^{-1}$:

$$L_\lambda = E - P_0 - \lambda\, P_1 - \cdots - \lambda^{n-1} P_{n-1} - \lambda^n T. \tag{4}$$

Комплексное число μ является собственным значением пучка L_λ, если $L_\mu y = 0$ для некоторого ненулевого вектора $y \in \mathfrak{H}$. В работе [16] показано, что спектр пучка L_λ состоит из дискретного набора собственных значений: $\sigma(L_\lambda) = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, с единственной предельной точкой на бесконечности.

Пусть $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – собственные значения пучка $T_\lambda = E - \lambda\, T$, т.е. $\sigma(T_\lambda) = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^\infty$. Рассмотрим также пучок $T_{\lambda^n} \overset{def}{=} E - \lambda^n\, T$, собственные значения которого обозначим через η_k, т.е. $\sigma(T_{\lambda^n}) = \{\eta_k\}_{k=1}^\infty$. Заметим, что нумерация собственных значений идет по неубыванию модуля и с учетом алгебраической кратности. Справедлива [16]

Лемма 1 (М.В. Келдыш). *Пусть $E - L_\lambda$ – аналитическая в области $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{C}$ оператор-функция со значениями в идеале $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов, тогда след главной части оператора $\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1}$ для полюса $\lambda = c$ равен $\frac{N}{\lambda - c}$, где N– алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = c$ пучка L_λ .*

Если для главной части оператора $\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1}$ ввести обозначение $[\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1}]$, а для функции следа – $Tr(\bullet)$, то из леммы (1) очевидно будет следовать соотношение

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_c} \lambda^s Tr\left(\left[\frac{\partial\, L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1} \right] \right) d\lambda = N c^s, \tag{5}$$

где Γ_c – окружность с центром в точке $\lambda = c$, достаточно малого радиуса, проходимая против часовой стрелки.

3. Вывод предварительной формулы регуляризованного следа

Пусть функция распределения характеристических чисел оператора $T = A^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^\alpha} = \varepsilon < \infty \qquad \text{при} \qquad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\,, \tag{6}$$

где ε – некоторая положительная постоянная (т.е. $0 < \varepsilon \leqslant \infty$). Введем обозначения: $r_k = |\lambda_k^{1/n}|$, $d_k = r_{k+1} - r_k$. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого приведено в [17]:

Лемма 2. *При условии* (6) *на функцию* $N(\lambda)$ *существует подпоследовательность натурального ряда* $\{k_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, *такая что* $d_{k_\nu} = r_{k_\nu+1} - r_{k_\nu} \geq \varepsilon_0 \quad \forall\,\nu \in \mathbb{N}$, *где* $\varepsilon_0 > 0$ *– постоянная.*

Следствие 1. *Существует бесконечная система расширяющихся концентрических окружностей* $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ *с центрами в начале координат, свободных от точек спектра пучка* T_{λ^n} *и таких, что расстояние* δ_ν *от окружности* Γ_ν *до спектра* $\sigma(T_{\lambda^n})$ *удовлетворяет условию* $\delta_\nu \geq \varepsilon_0/2 \quad \forall\,\nu \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В качестве Γ_ν возьмем окружность с центром в начале координат и радиусом $\widetilde{R}_\nu = r_{k_\nu} + \frac{1}{2}d_{k_\nu}$. Тогда Γ_ν будет свободна от точек спектра $\sigma(T_{\lambda^n})$, т.к. точки из $\sigma(T_{\lambda^n})$ располагаются на окружностях с центром в начале координат и радиусами $r_k \quad (k \in \mathbb{N})$. Кроме того, т.к. точки спектра $\sigma(T_{\lambda^n})$ располагаются на лучах $\arg\lambda = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, ..., 2n{-}1)$, то $\delta_\nu \geq d_{k_\nu}/2$, следовательно, согласно лемме 2, $\delta_\nu \geq \varepsilon_0/2 \ \ \forall\,\nu \in \mathbb{N}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть* P *– конечномерный оператор в* $\mathfrak{H}$: $P = \sum\limits_{l=1}^{t}(\bullet, \varphi_l)\psi_l, \quad \psi_l \in \mathfrak{D}(T^{-1})$ $(l = 1, 2, ..., t)$, *тогда для* $j = 0, 1, 2, ..., n{-}1$ *и* $R_\lambda = (E{-}\lambda^n T)^{-1}$ *выполнены соотношения* $\|\lambda^j R_\lambda P\| \to 0$ *при* $\lambda \in \Gamma_\nu$ *и* $\nu \to \infty$, *причем, предел является равномерным по* $\arg\lambda$. *(см.* [17]*).*

С помощью леммы 3 можно получить представление в виде ряда для оператор-функции L_λ^{-1}:

Следствие 2. *Для* $\lambda \in \Gamma_\nu$, *при достаточно большом* ν, *верна формула*

$$L_\lambda^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{R_\lambda \sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j P_j\right\}^k R_\lambda, \tag{7}$$

где ряд сходится в равномерной операторной топологии равномерно относительно $\arg\lambda$.

Умножая левую и правую части этого равенства соответственно на левую и правую части равенства $\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda} = -\sum_{j=0}^{n-1} j\lambda^{j-1}P_j - n\lambda^{n-1}T$, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda}L_\lambda^{-1} + n\lambda^{n-1}TR_\lambda = &-\sum_{j=1}^{n-1} j\lambda^{j-1}P_jR_\lambda - \\
-\sum_{j=1}^{n-1} j\lambda^{j-1}P_j \sum_{k=1}^{\infty}\left\{R_\lambda\sum_{l=0}^{n-1}\lambda^l P_l\right\}^k R_\lambda &- n\lambda^{n-1}T\sum_{k=1}^{\infty}\left\{R_\lambda\sum_{l=0}^{n-1}\lambda^l P_l\right\}^k R_\lambda.
\end{aligned} \tag{8}$$

Проинтегрировав обе части равенства (8) по контуру Γ_ν, $\nu \geq m_0$, согласно формуле (5) при $s = 0$, получим слева:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} Tr\left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda}L_\lambda^{-1} + n\lambda^{n-1}TR_\lambda\right)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} Tr\left(\left[\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda}L_\lambda^{-1}\right]\right)d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} Tr\left(\left[n\lambda^{n-1}TR_\lambda\right]\right)d\lambda = M_\nu - N_\nu. \tag{9}$$

Здесь M_ν и N_ν – количества собственных значений, с учетом кратностей, пучков L_λ и T_{λ^n} соответственно, попавших во внутренность контура Γ_ν. Верна

Лемма 4. *Левая часть равенства* (9) *стремится к нулю при* $\nu \to \infty$, *следовательно, т.к.* N_ν *и* M_ν *– целые положительные числа, существует номер* m_0 *такой, что при* $\nu \geq m_0$ $\quad M_\nu = N_\nu$, *т.е., начиная с некоторого номера* m_0, *во все окружности* Γ_ν *будет попадать одинаковое, с учетом кратностей, количество собственных значений пучков* L_λ *и* T_{λ^n}.

Доказательство будет дано позже, после того, как будет исследована функция $F(s)$, определяемая равенством (11).

В дальнейшем будем считать, что номер m_0 таков, что неравенство $\nu \geq m_0$, обеспечит выполнение всех описанных выше условий. Из леммы 4 следует, что при $\nu \geq m_0$ между контурами Γ_{m+1} и Γ_m лежит одинаковое, с учетом кратностей, число собственных значений пучков L_λ и T_{λ^n}, а именно $N_{m+1} - N_m$. Поэтому, умножив обе части (8) на $\lambda^s(2\pi i)^{-1}$, взяв затем след и проинтегрировав по контуру Γ_ν, мы получим в левой части с помощью формулы (5) после перехода к пределу при $\nu \to \infty$ выражение:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=1}^{N_\nu}(\mu_k^s - \eta_k^s) = \left(\sum_{k=1}^{N_{m_0}} + \sum_{\nu=m_0}^{\infty}\sum_{k=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}}\right)(\mu_k^s - \eta_k^s). \tag{10}$$

Теперь, для того чтобы получить формулы типа (3), нужно исследовать правую часть (8), когда над ней произведены вышеназванные действия, т.е. изучить выражение:

$$F(s) = -\lim_{\nu\to\infty}\Bigg\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{j+s-1}Tr(P_jR_\lambda)d\lambda + \\ + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu} Tr\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{j+s-1}P_j\left(R_\lambda\sum_{l=0}^{n-1}\lambda^l P_l\right)^k R_\lambda\right)d\lambda + \\ + \frac{n}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu} Tr\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{n+s-1}T\left(R_\lambda\sum_{l=0}^{n-1}\lambda^l P_l\right)^k R_\lambda\right)d\lambda\Bigg\}. \tag{11}$$

Имеем

$$\left(\sum_{l=0}^{n-1}\lambda^l R_\lambda P_l\right)^k = \left(R_\lambda P_0\right)^k + \sum_{m=1}^{k(n-1)}\lambda^m \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=m \\ 0\leqslant\alpha_1,\ldots,\alpha_k\leqslant n-1}} R_\lambda P_{\alpha_1}\cdots R_\lambda P_{\alpha_k}.$$

Обозначая внутреннюю сумму через $\sum\limits_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$, получим

$$\left(\sum_{l=0}^{n-1}\lambda^l R_\lambda P_l\right)^k = \left(R_\lambda P_0\right)^k + \sum_{m=1}^{k(n-1)}\lambda^m \sum_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}. \tag{12}$$

Используя тождество (12), из (11) получим:

$$
\begin{aligned}
F(s) = -\lim_{\nu\to\infty}\Big\{ & \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{j+s-1}Tr(R_\lambda P_j)d\lambda+ \\
& +\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{j}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{j+s-1}Tr\left(R_\lambda P_j\left(R_\lambda P_0\right)^k\right)d\lambda+ \\
& +\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n-1)}\frac{j}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{j+s+m-1}Tr\left(R_\lambda P_j\sum_m P_{\alpha_1\dots\alpha_k}\right)d\lambda+ \\
& +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{n+s-1}Tr\left(TR_\lambda\left(R_\lambda P_0\right)^k\right)d\lambda+ \\
& +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n-1)}\frac{n}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{m+n+s-1}Tr\left(R_\lambda T\sum_m P_{\alpha_1\dots\alpha_k}\right)d\lambda\Big\}.
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Обозначим слагаемые, стоящие в правой части (13), соответственно через $J_l^\nu(s)$ $(l=1,2,...,5)$. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы вычислить $\lim\limits_{\nu\to\infty}J_l^\nu(s)\quad\forall\, s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $(l=1,2,...,5)$. Для этого необходимо предварительно получить некоторые формулы, этому посвящен следующий параграф.

Отметим, что из последующих рассмотрений легко будет следовать корректность предельного перехода при $\nu\to\infty$ под знаком бесконечных сумм в соотношении (13).

4. Вспомогательные формулы

Напомним, что $T-$ компактный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, функция распределения характеристических значений которого удовлетворяет условию (6). Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$, составленный из собственных векторов оператора T. В дальнейшем через n будет обозначаться порядок пучков (1), (4).

4.1. Вычисления с P_λ^k. Воспользуемся системой окружностей $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, построенной в следствии 1. Пусть $N\geq 0$ – целое число, и P – конечномерный оператор, причем $\psi_l\in\mathfrak{D}(T^{-(N+1)})\quad(l=1,...,t)$, воспользовавшись тогда тем, что $R_\lambda e_j=\lambda_j(\lambda_j-\lambda^n)^{-1}e_j$, получим

$$
Tr(R_\lambda P)=\sum_{l=1}^{t}(R_\lambda\psi_l,\varphi_l)=\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(\psi_l,e_k)(e_k,\varphi_l)}{\lambda_k-\lambda^n}\,,
$$

применим к правой части N раз тождество

$$
\frac{1}{\lambda_k-\lambda^n}=-\frac{1}{\lambda^n}+\frac{\lambda_k}{\lambda^n(\lambda_k-\lambda^n)}\,, \qquad (14)
$$

получим

$$
Tr(R_\lambda P)=-\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{N}\frac{(T^{-k}\psi_l,\varphi_l)}{\lambda^{nk}}+\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{N+1}(\psi_l,e_k)(e_k,\varphi_l)}{\lambda^{nN}(\lambda_k-\lambda^n)}\,. \qquad (15)
$$

Обозначим второе слагаемое через $\Phi_N(\lambda)$. Применяя прием, использованный при доказательстве леммы 3, легко показать, что при $\psi_l\in\mathfrak{D}(T^{-(N+1)})\quad(l=1,2,...,t)$ и $\lambda\in\Gamma_\nu$ выполнено равенство $\Phi_N(\lambda)=o(\lambda^{-nN})\quad(\nu\to\infty)$, причем это соотношение равномерно по $\arg\lambda$.

Пусть теперь имеется набор (2) конечномерных операторов. Пусть $P_l^j = (\bullet, \varphi_l^j)\psi_l^j$, тогда $P_j = \sum\limits_{l=1}^{n_j} P_l^j$, . Рассмотрим оператор-функцию $P_\lambda^k \stackrel{def}{=} R_\lambda P_1 R_\lambda P_2 \cdots R_\lambda P_k$. Легко получить, что

$$P_\lambda^k = \sum_{\substack{l_1,l_2,\dots,l_k \\ 0\leqslant l_j\leqslant n_j}} R_\lambda P_{l_1}^1 R_\lambda P_{l_2}^2 \cdots R_\lambda P_{l_k}^k,$$

$$Tr(P_\lambda^k) = \sum_{\substack{l_1,l_2,\dots,l_k \\ 0\leqslant l_j\leqslant n_j}} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} (R_\lambda \psi_{l_{j+1}}^{j+1}, \varphi_{l_j}^j) \right\} (R_\lambda \psi_{l_1}^1, \varphi_{l_k}^k). \tag{16}$$

Предположим теперь, что

$$\psi_l^j \in \mathfrak{D}(T^{-(N+2)}), \quad N \in \mathbb{N}_0. \;\; j = 1, 2, ..., k; \; l = 1, ..., n_j. \tag{17}$$

Тогда из соотношения (15) и (16), получим при $\lambda \in \Gamma_\nu, \; \nu \to \infty$

$$\begin{aligned} Tr(P_\lambda^k) &= \\ &= \sum_{\substack{l_1,l_2,\dots,l_k \\ 0\leqslant l_j\leqslant n_j}} (-1)^k \sum_{\substack{p_1+p_2+\dots+p_k=M \\ p_1,\dots,p_k\geq 1}} \lambda^{-Mn} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} (T^{-p_{j+1}} \psi_{l_{j+1}}^{j+1}, \varphi_{l_j}^j) \right\} \times \\ &\times (T^{-p_1}\psi_{l_1}^1, \varphi_{l_k}^k) + B_\lambda^M + o(\lambda^{-n(N+k)}), \end{aligned} \tag{18}$$

где целое положительное M удовлетворяет условию $k \leqslant M \leqslant N + k$, а символом B_λ^M обозначается сумма членов, в которых $p_1 + p_2 + ... + p_k \neq M$.

Из соотношения (18) следует, что для любого целого положительного числа M, удовлетворяющего неравенствам $k \leqslant M \leqslant N + k$,, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^{Mn-1} Tr(P_\lambda^k) d\lambda = \\ &= \sum_{\substack{l_1,l_2,\dots,l_k \\ 0\leqslant l_j\leqslant n_j}} (-1)^k \sum_{\substack{p_1+p_2+\dots+p_k=M \\ p_1,\dots,p_k\geq 1}} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} (T^{-p_{j+1}} \psi_{l_{j+1}}^{j+1}, \varphi_{l_j}^j) \right\} (T^{-p_1}\psi_{l_1}^1, \varphi_{l_k}^k) = \\ &= (-1)^k \sum_{\substack{p_1+p_2+\dots+p_k=M \\ p_1,\dots,p_k\geq 1}} Tr(T^{-p_1}P_1 \cdots T^{-p_k}P_k). \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, доказана

Лемма 5. *Пусть даны конечномерные операторы $P_1, ..., P_k$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем, выполнено условие* (17). *Тогда, если натуральное число M таково, что $k \leqslant M \leqslant N + k$, то для оператор-функции $P_\lambda^k \stackrel{def}{=} R_\lambda P_1 R_\lambda P_2 \cdots R_\lambda P_k$ выполнено соотношение* (19). *Если в левой части* (19) *Mn заменить на какое-либо натуральное $s : kn < s < (N + k)n$, не кратное n, то ее значение будет равно нулю.*

4.2. Вычисления с Q_λ^k. В дальнейшем нам понадобятся подобные соотношения для оператор-функции $Q_\lambda^k \stackrel{def}{=} R_\lambda^2 P_1 R_\lambda P_2 \cdots R_\lambda P_k$.

Применяя последовательно тождество (14), аналогично предыдущему получим для функции $Tr(R_\lambda^2 P)$, где P – конечномерный оператор, у которого $\psi_l \in \mathfrak{D}(T^{-(N+2)})$ $(l = 1, 2, ..., t)$, равенство

$$Tr(R_\lambda^2 P) = \sum_{l=1}^{t} \sum_{j=2}^{N+1} (j-1) \frac{(T^{-j}\psi_l, \varphi_l)}{\lambda^{nj}} \; + \; \widetilde{F}_\lambda\,, \tag{20}$$

где

$$\widetilde{F}_\lambda = F^1_\lambda + F^2_\lambda + F^3_\lambda + \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}(N-1)\frac{\lambda_k^{N+1}(\psi_l, e_k)(e_k, \varphi_l)}{\lambda^{(N+1)n}}\,, \qquad (20_1)$$

$$F^2_\lambda = \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{N+2}(\psi_l, e_k)(e_k, \varphi_l)}{\lambda^{Nn}(\lambda_k - \lambda^n)^2}\,, \qquad (21)$$

$$F^1_\lambda = -\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{N+2}(\psi_l, e_k)(e_k, \varphi_l)}{\lambda^{(N+1)n}(\lambda_k - \lambda^n)}\,, \quad F^3_\lambda = \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}(N-1)\frac{\lambda_k^{N+2}(\psi_l, e_k)(e_k, \varphi_l)}{\lambda^{(N+1)n}(\lambda_k - \lambda^n)}\,.$$

Методом, примененным при доказательстве леммы 3, легко показать, что $\widetilde{F}_\lambda = o(\lambda^{-Nn})$ при $\nu \to \infty$ для $\psi_l \in \mathfrak{D}(T^{-(N+2)})$ $(l = 1, 2, ..., t)$ и $\lambda \in \Gamma_\nu$, причем это соотношение равномерно по $\arg\lambda$.

Формулы (20) получены при $N \geq 2$. При $N = 0, 1$ непосредственно получаем, что

$$Tr(R^2_\lambda P) = o(\lambda^{-n}) \quad (\nu \to \infty, \ \ \lambda \in \Gamma_\nu)\,. \qquad (22)$$

Пусть $k \geq 2$. Так же, как и в предыдущем случае, получим

$$Tr(Q^k_\lambda) = \sum_{\substack{l_1, l_2, ..., l_k \\ 0 \leqslant l_j \leqslant n_j}} \left\{\prod_{j=1}^{k-1}(R_\lambda \psi^{j+1}_{l_{j+1}}, \varphi^j_{l_j})\right\}(R^2_\lambda \psi^1_{l_1}, \varphi^k_{l_k}). \qquad (23)$$

Предположим, что выполнено условие гладкости (17) при $N \geq 2$. В этом случае применимы формулы (15) и (20) к оператор-функциям $(\bullet, \varphi^j_{l_j})R_\lambda\psi^{j+1}_{l_{j+1}}$ и $(\bullet, \varphi^k_{l_k})R^2_\lambda\psi^1_{l_1}$ соответственно. Подставляя получающиеся в этом случае выражения для функций $(R_\lambda\psi^{j+1}_{l_{j+1}}, \varphi^j_{l_j})$ и $(R^2_\lambda\psi^1_{l_1}, \varphi^k_{l_k})$ в правую часть равенства (23), получим

$$\begin{aligned}
&Tr(Q^k_\lambda) = \\
&= \sum_{\substack{l_1, l_2, ..., l_k \\ 0 \leqslant l_j \leqslant n_j}} \prod_{j=1}^{k-1}\left\{-\sum_{p=1}^{N+1}\frac{(T^{-p}\psi^{j+1}_{l_{j+1}}, \varphi^j_{l_j})}{\lambda^{np}}\right\}\left\{\sum_{p=2}^{N}(p-1)\frac{(T^{-p}\psi^1_{l_1}, \varphi^k_{l_k})}{\lambda^{np}}\right\} + \\
&+ o(\lambda^{-n(N+k-1)}) = \\
&= \sum_{\substack{l_1, l_2, ..., l_k \\ 0 \leqslant l_j \leqslant n_j}} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{p_1 + p_2 + ... + p_k = M \\ p_1 \geq 2; p_2, ..., p_k \geq 1}} (p_1 - 1)\lambda^{-Mn}\left\{\prod_{j=1}^{k-1}(T^{-p_{j+1}}\psi^{j+1}_{l_{j+1}}, \varphi^j_{l_j})\right\} \times \\
&\times (T^{-p_1}\psi^1_{l_1}, \varphi^k_{l_k}) + G^M_\lambda + o(\lambda^{-n(N+k-1)}),
\end{aligned} \qquad (24)$$

где натуральное M удовлетворяет условию $k + 1 \leqslant M \leqslant N + k - 1$. Символом G^M_λ обозначена сумма всех членов с $p_1 + p_2 + ... + p_k \neq M$. Из этих соотношений

$$\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^{Mn-1}Tr(Q^k_\lambda)d\lambda = \\
&= \sum_{\substack{l_1, l_2, ..., l_k \\ 0 \leqslant l_j \leqslant n_j}} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{p_1 + p_2 + ... + p_k = M \\ p_1 \geq 2; p_2, ..., p_k \geq 1}} (p_1 - 1)\left\{\prod_{j=1}^{k-1}(T^{-p_{j+1}}\psi^{j+1}_{l_{j+1}}, \varphi^j_{l_j})\right\} \times \\
&\times (T^{-p_1}\psi^1_{l_1}, \varphi^k_{l_k}) = \\
&= (-1)^{k-1} \sum_{\substack{p_1 + p_2 + ... + p_k = M \\ p_1 \geq 2; p_2, ..., p_k \geq 1}} (p_1 - 1)Tr(T^{-p_1}P_1 \cdots T^{-p_k}P_k).
\end{aligned} \qquad (25)$$

Пусть теперь $k = 1$, и в условии гладкости $\psi_l \in \mathfrak{D}(T^{-(N+2)})$ $(l = 1, 2, ..., t)$ $N \geq 1$. Тогда из (20)) имеем

$$Tr(R_\lambda^2 P) = \sum_{l=1}^{t} \sum_{j=2}^{N+1} (j-1) \frac{(T^{-j}\psi_l, \varphi_l)}{\lambda^{nj}} + \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{N+2}(\psi_l, e_k)(e_k, \varphi_l)}{\lambda^{Nn}(\lambda_k - \lambda^n)^2} + o(\lambda^{-(N+1)n}).$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{s-Nn}}{(\lambda_k - \lambda^n)^2},$$

где s – некоторое натуральное число: $s \geq Nn$. Функция $f(\lambda)$ имеет полюсы в точках $\lambda = \eta_{k_l}: \ \eta_{k_l}^n = \lambda_k$ $(l = 1, ..., n)$, вычеты в которых легко вычисляются. Имеем

$$\operatorname*{Res}_{\eta_{k_l}} f(\lambda) = \frac{s - (N+1)n + 1}{n^2} \eta_{k_l}^{s-(N+2)n+1} \qquad (l = 1, ..., n).$$

Отсюда видно, что сумма

$$\sum_{l=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\eta_{k_l}} f(\lambda) = 0$$

в тех случаях, когда либо $s + 1 = (N + 1)n$, либо $s + 1$ не кратно n: в первом случае обращается в ноль $\operatorname*{Res}_{\eta_{k_l}} f(\lambda)$ $\forall\, l = 1, ..., n$, во втором

$$\sum_{l=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\eta_{k_l}} f(\lambda) = \frac{s - (N+1)n + 1}{n^2} \sum_{l=1}^{n} \eta_{k_l}^{s-(N+2)n+1} = 0,$$

т.к. $\eta_{k_1}^s + \eta_{k_2}^s + ... + \eta_{k_n}^s$ при любом натуральном s не кратном n.

Из приведенных рассуждений следует, что при $N \geq 1$ и $M = N + 1$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^{Mn-1} Tr(R_\lambda^2 P) d\lambda = N \cdot Tr(T^{-(N+1)}P). \tag{26}$$

Лемма 6. *Пусть даны конечномерные операторы $P_1, P_2, ..., P_k$. Пусть выполнено условие гладкости* (17). *Тогда*

1. *Если $k \geq 2$ и $N \geq 2$ (N – целое число из условия гладкости* (17)*), то при любом целом $M : k+1 \leqslant M \leqslant N+k-1$ выполнено* (25). *При $M \leqslant k$ левая часть* (25) *равна нулю. Если в левой части* (25) *Mn заменить на какое-либо целое $s : s < (N+k-1)n$, не кратное n, то левая часть* (25) *также будет равна нулю.*
2. *Если $k = 1$, то для $N \geq 1$ (N – целое число из условия* (17) *справедливо соотношение* (26). *Если в* (26) *вместо $(N+1)n$ подставить какое-либо s : $s < (N+1)n$, не кратное n, то левая часть* (26) *будет равна нулю.*
3. *Если в условии* (17) *$N = 0$, то при всех $k \geq 1$*

$$\lim_{\nu\to\infty} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^{n-1} Tr(Q_\lambda^k) d\lambda = 0.$$

Последнее равенство следует из соотношения (22).

5. Формулы регуляризованных следов

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что натуральный параметр s принимает значения в промежутке от $Nn + 1$ до $(N + 1)n$, где $N \geq 0$ – целое. Кроме того, конечномерные операторы $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ удовлетворяют условию гладкости (17).

5.1. Вычисление $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_1^\nu(s)$. Имеем

$$J_1^\nu(s) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s-1} Tr(R_\lambda P_j) d\lambda.$$

Из леммы 5 при $k=1$ и $Mn = j+s = (N+1)n$ следует

Лемма 7. *Пусть $Nn+1 \leqslant s \leqslant (N+1)n$, где целое $N \geq 0$. Тогда*

1. $G_1(s) \overset{def}{=} \lim\limits_{\nu\to\infty} J_1^\nu(s) = -j_s \sum_{l=1}^{n_{j_s}} (T^{-(N+1)}\psi_l^{j_s}, \varphi_l^{j_s}) = -j_s\, Tr(T^{-(N+1)}P_{j_s})$, *где* $j_s = (N+1)n - s$.
2. *Если $s = tn$ при любом целом $t \geq 0$, то* $G_1(s) = \lim\limits_{\nu\to\infty} J_1^\nu(s) = 0$.

5.2. Вычисление $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_2^\nu(s)$. Имеем

$$J_1^\nu(s) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s-1} Tr\left(R_\lambda P_j (R_\lambda P_0)^k\right) d\lambda.$$

Из леммы 5 следует

Лемма 8. *Пусть $Nn+1 \leqslant s \leqslant (N+1)n$, где целое $N \geq 0$. Тогда*

1. $G_2(s) \overset{def}{=} \lim\limits_{\nu\to\infty} J_2^\nu(s) =$

$$= j_s \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_0+p_1+\ldots+p_k = N+1 \\ p_j \geq 0}} Tr\left(T^{-p_0} P_{j_s} T^{-p_1} P_0 \cdots T^{-p_k} P_0\right),$$

где $j_s = (N+1)n - s$.

2. *При $s = tn$, $t \geq 0$ – целое,* $G_2(s) = \lim\limits_{\nu\to\infty} J_2^\nu(s) = 0$.

5.3. Вычисление $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_3^\nu(s)$. Имеем

$$J_3^\nu(s) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n-1)} \frac{j}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s+m-1} Tr\left(R_\lambda P_j \sum_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) d\lambda.$$

Из (18) следует, что

$$1 \leqslant k \leqslant j+s-n. \tag{27}$$

$$j_s \leqslant j \leqslant n-1, \quad \text{где} \quad j_s \overset{def}{=} \max\{1, n-s+1\}. \tag{28}$$

Предел интеграла в выражении для $J_3^\nu(s)$ принимает ненулевое значение, если при каждом фиксированном значении индекса k $(k+t+1)n = j+s+m$ при некотором целом $t \geq 0$. Нетрудно получить, что

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad t_0 = \overline{[(j+s+1)/n-k-1]}, \quad t_1 = [(j+s-k-n)/n], \tag{29}$$

где $\overline{[a]}$ обозначает наименьшее из целых чисел больших или равных a.

Из леммы 5 получим следующий результат.

Лемма 9. *Выполнены соотношения*

1. $J_3(j,k,t,s) \stackrel{def}{=}$

$$\stackrel{def}{=} \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s+m-1} Tr\left(R_\lambda P_j \sum_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) d\lambda =$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_0+p_1+\ldots+p_k=k+t+1\\ p_l\geq 0;\, l=0,1,\ldots,k}} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=(k+t+1)-(j+s)\\ \alpha_l\geq 0;\, l=1,\ldots,k}} Tr\left(T^{-p_0}P_jT^{-p_1}P_{\alpha_1}\cdots T^{-p_k}P_{\alpha_k}\right). \tag{30}$$

$$G_3(s) \stackrel{def}{=} \lim_{\nu\to\infty} J_3^\nu(s) = \sum_{j=j_s}^{n-1} j \sum_{k=1}^{j+s-n} \sum_{t=t_0}^{t_1} J_3(j,k,t,s). \tag{31}$$

2. *При* $s=0,1$ $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_3^\nu(s)=0$. *Это следует из того, что множество индексов* j, *определяемое неравенствами* (28), *пусто при* $s=0,1$.

5.4. Вычисление $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_4^\nu(s)$.

Имеем

$$J_4^\nu(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{n+s-1} Tr\left(TR_\lambda\left(R_\lambda P_0\right)^k\right) d\lambda.$$

Воспользуемся очевидным равенством $TR_\lambda = \lambda^{-n}R_\lambda - \lambda^{-n}E$. Подставив его в формулу для $J_4^\nu(s)$, получим

$$J_4^\nu(s) = n\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{s-1} Tr\left(R_\lambda\left(R_\lambda P_0\right)^k\right) d\lambda - n\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{s-1} Tr\left(\left(R_\lambda P_0\right)^k\right) d\lambda.$$

Применив лемму 6 к первому слагаемому и лемму 5 ко второму, получим, что справедлива

Лемма 10.

1. $G_4^1(s) \stackrel{def}{=}$

$$\stackrel{def}{=} \lim_{\nu\to\infty} n\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{s-1} Tr\left(R_\lambda\left(R_\lambda P_0\right)^k\right) d\lambda =$$

$$= n\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_k=N+1\\ p_l\geq 2;\, p_2,\ldots,p_k\geq 1}} (p_1-1) Tr\left(T^{-p_1}P_0T^{-p_2}P_0\cdots T^{-p_k}P_0\right),$$

$$G_4^2(s) \stackrel{def}{=} -\lim_{\nu\to\infty} n\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{s-1} Tr\left(\left(R_\lambda P_0\right)^k\right) d\lambda =$$

$$= n\sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_k=N+1\\ p_l,p_2,\ldots,p_k\geq 1}} Tr\left(T^{-p_1}P_0T^{-p_2}P_0\cdots T^{-p_k}P_0\right).$$

Т.е. $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_4^\nu(s) = G_4^1(s) + G_4^2(s)$.

2. *Если параметр* $s\in\mathbb{N}$ *не кратен* n, *в частности, при* $s=0,1,\ldots,n-1$ $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_4^\nu(s)=0$.

5.5. Вычисление $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_5^\nu(s)$. Имеем

$$J_5^\nu(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n-1)}\frac{n}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{m+n+s-1}Tr\left(R_\lambda T\sum_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right)d\lambda.$$

Применим тождество $TR_\lambda=\lambda^{-n}R_\lambda-\lambda^{-n}E$, получим

$$J_5^\nu(s)=n\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n-1)}\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{m+s-1}Tr\left(R_\lambda\sum_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right)d\lambda-$$

$$-\,n\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n-1)}\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^{m+s-1}Tr\left(\sum_m P_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right)d\lambda.$$

Обозначим слагаемые в правой части последней формулы соответственно через $J_5^{1\nu}(s)$ и $J_5^{2\nu}(s)$.

Из леммы 6 получим пределы изменения индекса k:

$$1\leqslant k\leqslant s-n. \tag{32}$$

Далее, так же как и при доказательстве леммы 10, потребуем, чтобы $(t+k+1)n=m+s$ при целом $t\geq 0$, где

$$\widetilde{t}_0\overset{def}{=}\overline{[(s-(k+1)n+1)/n]}\leqslant t\leqslant[(s-k-n)/n]\overset{def}{=}\widetilde{t}_1, \tag{33}$$

Применяя лемму 6, получаем

$$\begin{gathered}G_5^1(s)\overset{def}{=}\lim_{\nu\to\infty}J_5^{1\nu}(s)=n\sum_{k=1}^{s-n}\sum_{t=\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}(-1)^{k+1}\cdot\\ \cdot\sum_{\substack{p_1+..+p_k=k+t+1\\ p_l\geq 2,p_2,..,p_k\geq 1}}(p_1-1)\sum_{\substack{\alpha_1+..+\alpha_k=(k+t+1)n-s\\ 0\leqslant\alpha_l\leqslant n-1;\, l=1,..,k}}Tr\left(T^{-p_1}P_{\alpha_1}\cdots T^{-p_k}P_{\alpha_k}\right).\end{gathered} \tag{34}$$

Для вычисления $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_5^{2\nu}(s)$ все рассуждения проводятся совершенно аналогично, но на последнем этапе применяется лемма 5.

Имеем $1\leqslant k\leqslant s$. При каждом таком k выполняется соотношение $m+s=(k+\mu)n$ при некоторых целых $\mu\geq 0$, где

$$\begin{gathered}1+s\leqslant(k+\mu)n\leqslant k(n-1)+s,\\ \widetilde{\mu}_0\overset{def}{=}\overline{[(s-nk+1)/n]}\leqslant\mu\leqslant[(s-k)/n]\overset{def}{=}\widetilde{\mu}_1.\end{gathered} \tag{35}$$

Применяя лемму 5, получаем с учетом (35)

$$\begin{gathered}G_5^2(s)\overset{def}{=}\lim_{\nu\to\infty}J_5^{2\nu}(s)=n\sum_{k=1}^{s}\sum_{\mu=\widetilde{\mu}_0}^{\widetilde{\mu}_1}(-1)^{k-1}\cdot\\ \cdot\sum_{\substack{p_1+..+p_k=k+\mu\\ p_l,p_2,..,p_k\geq 1}}\sum_{\substack{\alpha_1+..+\alpha_k=(k+\mu)n-s\\ 0\leqslant\alpha_l\leqslant n-1;\, l=1,..,k}}Tr\left(T^{-p_1}P_{\alpha_1}\cdots T^{-p_k}P_{\alpha_k}\right).\end{gathered} \tag{36}$$

Лемма 11.

1. *Имеет место соотношение* $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_5^\nu(s) = G_5^1(s) + G_5^2(s)$, *где величины* $G_5^1(s)$ *и* $G_5^2(s)$ *определяются равенствами* (34) *и* (36).
2. $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_5^\nu(0) = 0$. *Это легко доказывается из тех же соображений, что и вторые пункты в предыдущих леммах 7–10.*

Следствие 3. *Теперь можно доказать утверждение леммы 4, согласно которой функция* $F(s)$, *определяемая формулой* (11), *такова, что* $F(0) = 0$. *Но, согласно,* (13) *это следует из того, что* $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_k^\nu(0) = 0 \quad \forall\, k = 1,2,3,4,5$. *Справедливость же этих равенств обоснована в леммах 7–11.*

Итог всем предыдущим рассуждениям подводит

Теорема 1. *Пусть имеется операторный пучок вида*

$$L_\lambda = E - P_0 - \lambda\, P_1 \cdots \lambda^{n-1}\, P_{n-1} - \lambda^n\, T,$$

действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, *где операторы* $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ *– конечномерные и имеют вид* $P_j = \sum_{l=1}^{n_j} (\bullet, \varphi_l^j)\psi_l^j$, *а оператор* T *– инъективный самосопряженный компактный оператор в* $\mathfrak{H}$. *Предположим, что функция распределения собственных значений пучка* $T_\lambda = E - \lambda\, T$ *удовлетворяет условию "разреженности"* (6).

Пусть параметр $s \in \mathbb{N} \cap [Nn+1, (N+1)n]$, *где целое* $N \geq 0$. *Тогда, если выполнено* (17), *то существует монотонная подпоследовательность натурального ряда* $\{N_\nu\}_{\nu=m_0}^{\infty}$, *для которой справедлива формула регуляризованного следа*

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{m=1}^{N_\nu} (\mu_m^s - \eta_m^s - c_m(s)) = F(s),$$

где μ_m *и* η_m *– собственные значения пучков* L_λ *и* T_{λ^n} *соответственно, взятые с учетом кратностей, все* $c_m(s) = 0$, *а*

$$F(s) = -G_1(s) - G_2(s) - G_3(s) - G_4^1(s) - G_4^2(s) - G_5^1(s) - G_5^2(s),$$

где значения $G_j^i(s)$ *определяются в леммах 7–11.*

6. Пример

Рассмотрим пучок второго порядка $L_\lambda = E - P_0 - \lambda\, P_1 - \lambda^2 T$ и, предполагая условия теоремы 1 выполненными, выпишем для него формулы следов первого, второго и третьего порядков. Величины $G_j^l(s)$, определенные в теореме 1, примут вид:

1. $G_1(1) = -Tr(T^{-1}P_1)$; $G_2(1) = G_3(1) = G_4^1(1) = G_4^2(1) = G_5^1(1) = 0$,
   $G_5^2(1) = 2Tr(T^{-1}P_1)$;
2. $G_1(2) = G_2(2) = G_4^1(2) = G_5^1(2) = 0$,
   $G_3(2) = Tr((T^{-1}P_1)^2)$; $G_4^2(2) = 2Tr(T^{-1}P_0)$,
   $G_5^2(2) = -2Tr((T^{-1}P_1)^2)$;
3. $G_1(3) = -Tr((T^{-2}P_1)^2)$, $G_2(3) = Tr(T^{-1}P_1T^{-1}P_0)$,
   $G_3(3) = -Tr((T^{-1}P_1)^3)$, $G_4^1(3) = G_4^2(3) = 0$,
   $G_5^1(3) = 2Tr(T^{-2}P_1)$; $G_5^2(1) = 2Tr(T^{-2}P_1) - 4Tr(T^{-1}P_1T^{-1}P_0) + 2Tr((T^{-1}P_1)^3)$.

Из первой группы формул по теореме 1 получим

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{m=1}^{N_\nu} (\mu_m - \eta_m) = -Tr(T^{-1}P_1). \tag{37}$$

Из второй группы формул:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m^2-\eta_m^2) = -Tr((T^{-1}P_1)^2) - 2Tr(T^{-1}P_0). \tag{38}$$

Из третьей группы формул:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m^3-\eta_m^3) = -Tr((T^{-1}P_1)^3) - 3Tr(T^{-2}P_1) + 3Tr(T^{-1}P_1T^{-1}P_0). \tag{39}$$

Применим полученный результат к краевой задаче Штурма-Лиувилля для нагруженного уравнения. Рассмотрим краевую задачу

$$-y''(x)+q(x)y(x)-a(x)y(x_0)-\lambda\, b(x)y(x_1)-\lambda^2\, y(x)=0, \quad 0<x<\pi,$$
$$y(0)=y(\pi)=0, \quad x_0,\ x_1\in\ (0,\pi).$$

Обозначим через A самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(0,\pi)$:
$Ay(x)=-y''(x)+q(x)y(x), \quad D(A)=\{y\in\ W_2^2(0,\pi):\ y(0)=y(\pi)\}$.

Пусть $G(x,\xi)$ – функция Грина оператора A. Тогда имеем равенства

$$y(x_0)a(x)=a(x)\int_0^\pi G(x_0,\xi)Ay(\xi)d\xi, \quad y(x_1)b(x)=b(x)\int_0^\pi G(x_1,\xi)Ay(\xi)d\xi.$$

Таким образом, краевая задача порождает операторный пучок вида $N_\lambda=A-Q_0-\lambda\, Q_1-\lambda^2E$, где

$$Q_0y(x)=\int_0^\pi a(x)G(x_0,\xi)Ay(\xi)d\xi, \quad Q_1y(x)=\int_0^\pi b(x)G(x_1,\xi)Ay(\xi)d\xi.$$

Для пучка $L_\lambda=N_\lambda A^{-1}$ будут выполнены все условия теоремы 1. Таким образом, если $a(x),b(x)\in\ D(A^2)$, то по формулам (37), (38)

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m-\eta_m)=-b(x_1), \quad \lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m^2-\eta_m^2)=b^2(x_1)-2a(x_0).$$

Если $a(x),b(x)\in\ D(A^3)$, то по формуле (39)

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m^3-\eta_m^3)=-b^3(x_1)-3[-b''(x_1)q(x_1)b(x_1)]+3a(x_1)b(x_0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохин Ю.А., Торстко А.Б., Дамешек Л.Ю. и др. *Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом.* Новосибирск: Н. 1987.
2. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения* // Дифференц. ур-ния. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
3. Садовничий В.А., Любишкин В.А. *Конечномерные возмущения дискретных операторов и формула следов* // Функ. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 3. С. 55–65.
4. Любишкин В.А., Цопанов И.Д. *О новых формулах следов для операторов с дискретным спектром* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механика. 1987. № 6. С. 22–25.
5. Садовничий В.А., Дубровский В.В., Любишкин В.А. *Следы дискретных операторов* // ДАН СССР. 1982, Т. 264. №4. С. 830–832.
6. Садовничий В.А. *Теория операторов* М.: Высшая школа, 1999.
7. Фазуллин З.Ю. *Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов.* Дис... д-ра физ-мат. наук. Институт Математики с вычислительным центром РАН. Уфа. 2006.
8. Садовничий В.А., Подольский В.Е. *Следы операторов* // УМН. 2006. Т. 61, Вып. 5(371). С. 89–156.

9. Матвеев Ю.В. *Спектральные свойства дифференциально-функциональных операторов* // Дис... кандидата физ.-мат. наук. МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. М., 1986.
10. Кулеско Н.А., Палант Ю.А. *К теореме Е.И. Сигала о следе операторного пучка* // Математические исследования. Кишинев, 6, вып. 2 (1971). С. 150–152.
11. Кулеско Н.А. *О следах полиномиального операторного пучка* // Функцион. анализ. Линейные пространства. Ульяновск, 1985. С. 87–91.
12. Сигал Е.И. *О следе операторного пучка* // Матем. исследования. Кишинев. 1969. Т. 4, № 2. С. 148–151.
13. M.I. Gil' *Sums of characteristic values of compact polynomial operator pencils* // J. Math. Anal. Appl. 338 (2008) P. 1469–1476.
14. H. *König A trace theorem and a linearization method for operator polynomials* // Integral Equations and Operator theory. 1982. Vol.5. P. 828–849.
15. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965.
16. Келдыш М.В. *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов* // УМН. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
17. Цопанов И.Д. *Общие формулы следов для интегро-дифференциальных операторов* // Владикавк. матем. журн., 9:4. 2007. С. 3–48.

Игорь Дзастемирович Цопанов,
Южный математический институт Российской академии наук,
ул. Маркуса, д. 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
Владикавказский Институт Управления,
ул. Бородинская, д. 14,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: 55tsopanovig@gmail.com